Méthodes géométriques pour les problèmes à frontières libres.[1]

R. Monneau[2]

19 avril 2006

[1]Ecole d'été CIMPA Damas, mai 2004

[2]CERMICS-ENPC, 6-8 avenue B. Pascal, Cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2, France

Remerciements

Le texte qui suit est un ensemble de notes écrites à l'occasion d'un cours de niveau DEA que j'ai donné à l'Université Paris-XI Dauphine durant la période 2001-2005. A ce titre je remercie très sincèrement Eric Séré pour m'avoir donné l'occasion d'enseigner ce cours.
Je remercie également Mutapha Jazar et Ahmad El Soufi pour m'avoir proposé d'enseigner et de rédiger ce cours pour une école d'été CIMPA organisée à Damas en mai 2004.
Enfin, je voudrais remercier le rapporteur, qui par ses nombreuses et pertinentes remarques a permis d'amériorer la présentation de ce manuscript.

Avertissements

Ces notes de cours sont une introduction partielle à un problème à frontière libre modèle : le problème de l'obstacle. Ces notes sont donc loin d'être exhaustives, mais ont simplement pour ambition de donner de façon assez élémentaire quelques éclairages sur les techniques et résultats liés aux problèmes à frontières libres.

Table des matières

1 Introduction **4**

1 Qu'est-ce qu'un problème à frontières libres ? 4

1.1 Rappel d'un problème classique bien posé 4

1.2 Un problème typique à frontière libre 4

2 Exemple physique d'un problème à frontières libres : le problème de l'obstacle 5

2.1 Formulation faible 5

2.2 Formulation forte 5

3 But du cours 6

4 Bibliographie complémentaire 6

5 Notations 7

2 Régularité de la solution du problème de l'obstacle **9**

1 Le problème modèle 9

2 Régularité de la solution 10

2.1 Rappels de quelques résultats classiques (I) 10

2.2 Régularité de la solution et équation d'Euler-Lagrange 11

3 Régularité $W^{2,\infty}$ de la solution u de (1.1) 14

3.1 Rappels de quelques résultats classiques (II) 14

3.2 La méthode de Alt et Phillips [10] 15

3 Mesure de la frontière libre **18**

1 Mesure de la frontière libre 18

1.1 Rappels de quelques résultats classiques (III) 18

1.2 Lemme de non dégénérescence 18

1.3 Application à la mesure de la frontière libre 19

4 Blow-up **22**

1 Notion de blow-up 22

1.1 Rappel du Théorème d'Ascoli (Théorème de compacité) 22

1.2 Rappel du problème de l'obstacle sur Ω 22

1.3 Changement d'échelle et blow-up 23

5 Formule de monotonie **25**
1 Formule de monotonie 25
2 Application aux blow-up 27

6 Classification des limites de blow-up **29**
1 Rappel du Théorème de Liouville 29
1.1 Classification en dimension 2 30
1.2 Théorème général de classification des limites de blow-up 32

7 Etude des points singuliers **35**
1 Une formule de monotonie pour les points singuliers 35
2 Dépendance continue du blow-up limite 39
3 Description de l'ensemble singulier 42
3.1 Rappel du Théorème d'extension de Whitney 42
3.2 Application à l'étude de l'ensemble singulier 43

8 Etude des points réguliers **45**
1 Exemple de non unicité des limites de blow-up 45
2 Unicité des limites de blow-up et conséquences 45
3 Vers plus de régularité sur la frontière libre 46

Chapitre 1

Introduction

Dans cette introduction, la présentation est relativement informelle et ne se veut pas rigoureuse.

1 Qu'est-ce qu'un problème à frontières libres ?

1.1 Rappel d'un problème classique bien posé

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. On considère les solutions u du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \\ u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Si $f \in L^2(\Omega), g \in H^1(\Omega)$, alors il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

1.2 Un problème typique à frontière libre

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et une partition du bord $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$, où Γ est une partie inconnue du bord de Ω.

Etant donné deux fonctions h et g, on cherche à résoudre le problème suivant : trouver à la fois la frontière libre Γ (et par conséquent Ω) et la fonction u définie sur Ω vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \\ u = g_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \\ \\ u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{(Dirichlet)} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{(Neumann).} \end{cases}$$

En général il n'y a pas de résultat d'existence, d'unicité et de régularité des solutions (Γ, u).

2 Exemple physique d'un problème à frontières libres : le problème de l'obstacle

2.1 Formulation faible

On considère un obstacle, c'est-à-dire une fonction ψ définie sur un ouvert borné régulier Ω de $I\!R^n$. On tend une membrane au-dessus de l'obstacle. Cette membrane est représentée par le graphe d'une fonction u définie sur Ω. On impose la contrainte :

$$\begin{cases} u = g > \psi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \\ u \geq \psi \quad \text{sur} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

On cherche alors la solution u qui minimise l'énergie suivante sous la contrainte (2.1) :

$$\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu.$$

Il est possible de montrer que cette minimisation fournit une solution faible du problème (cf. chapitre 2). La membrane a alors un contact tangent sur l'obstacle.

2.2 Formulation forte

Etant donnée une fonction u, on définit l'ensemble de coincidence :

$$F = \{u = \psi\} \subset\subset \Omega.$$

La frontière libre Γ est le bord de l'ensemble de coincidence :

$$\Gamma = \partial F.$$

Le problème consiste donc à trouver une fonction u définissant F et Γ telle que

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{sur} \quad \Omega \backslash F \\ \\ u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \\ u = \psi \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial F \quad \text{(Dirichlet)} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial F \quad \text{(Neumann).} \end{cases}$$

Cette formulation est forte car on suppose pour définir $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$, que la normale ν à Γ est bien définie, c'est-à-dire que Γ est une frontière régulière.

3 But du cours

Il est très difficile de travailler avec des solutions fortes pour les problèmes à frontières libres, car il n'existe pas en général de résultats directs d'existence de solutions fortes.

Nous allons donc définir des solutions faibles de problèmes à frontières libres, pour lesquelles l'existence (et l'unicité) est assurée. Puis nous allons développer une théorie de la régularité des frontières libres, pour montrer que les solutions sont aussi fortes que possible.

Nous renvoyons en particulier aux livres Kinderlehrer, Stampacchia [108], Friedman [76], Rodrigues [143].

Dans ce qui suit nous utiliserons en particulier les articles suivant Caffarelli [42], Weiss [162], Monneau [127].

A la fin de ce cours est donnée une bibliographie indicative sur les problèmes à frontières libres et le problème de l'obstacle en particulier. Signalons enfin que dans cette bibliographie ne sont pas indiqués les très récents travaux sur les problèmes de type obstacle à deux phases, en particulier parabolique.

4 Bibliographie complémentaire

De très nombreux travaux existent sur le problème de l'obstacle stationnaire ; citons en particulier [15, 33, 36, 37, 39, 41, 42, 43, 44, 50, 51, 52, 53, 54, 75, 77, 78, 101, 102, 103, 109, 113, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 122, 125, 126, 139, 140, 145, 158, 163, 31, 128, 147, 144].

Certaines propriétés qualitatives, comme la convexité de l'ensemble de coincidence ont été étudiées, voir [56, 68, 69, 70, 71, 82, 87, 93, 94, 95, 96, 97, 118, 152].

Les propriétés de régularité supérieure des frontières libres ont été étudiées dans [104, 105, 106, 107, 157]. Sur les singularités des frontières libres et leur régularité générique, voir [124, 127, 148, 149, 150, 151].

Signalons qu'une littétaure existe sur le problème d'infiltration d'eau dans un barrage, qui peut se ramener à un problème de l'obstacle. Voir en particulier [3, 4, 7, 9, 11, 12, 14, 23, 30, 32, 57, 58, 59, 60, 62].

Un autre problème à frontière libre typique, qui lui n'est pas un problème de l'obstacle, est celui de la détermination de la forme des jets d'eau ; plus généralement pour l'étude de problèmes à une ou deux phases avec discontinuité du gradient citons [5, 6, 8, 40, 45, 47, 48, 49, 55, 63, 64, 88, 89, 92, 98, 99, 100, 121, 135, 136, 160, 161, 22, 34, 85]).

Pour l'étude de versions paraboliques de problèmes à frontières libres avec discontinuité du gradient, voir en particulier [16, 17, 18].

5 Notations

Nous rappelons ici les notations que nous utiliserons tout au long de ce cours.

Nous travaillerons toujours sur des ouverts Ω de $I\!R^n$, avec $n \geq 1$. Sauf indication contraire l'ouvert Ω sera supposé borné et régulier (de classe C^2 sera suffisant). Nous noterons ν la normale unitaire extérieure à un ouvert régulier. On notera typiquement $x = (x_1, ..., x_n)$ ou bien X, les points de $I\!R^n$. On notera $a \cdot b$ ou bien $< a, b >$ le produit scalaire de deux vecteurs a, b de $I\!R^n$. Etant donnée une matrice $Q = (Q_{ij})_{ij}$ de taille $n \times n$, et $X = (x_1, ..., x_n) \in I\!R^n$, on note ${}^tX \cdot Q \cdot X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i Q_{ij} x_j$. On notera $\mathbf{S}^{n-1}$ la sphère unité de $I\!R^n$. La boule euclidienne ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ sera notée $B_r(x)$ et $B_r = B_r(0)$. Etant donné un sous-ensemble mesurable A de $I\!R^n$, on notera $|A|$ sa mesure de Lebesgue. Nous noterons A^0 son intérieur, et $\overline{A}$ son adhérence. Etant donné deux ensembles A et B on notera $A \subset\subset B$ si l'adhérence de A est contenue dans l'intérieur de B. On note $\text{dist}(x, A)$ la distance d'un point x à l'ensemble A. Etant donné un sous-ensemble A de $I\!R^n$, on utilisera la notation suivante pour la fonction caractéristique de l'ensemble A :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

De façon générique, nous utiliserons dans tout le cours la notation u pour la solution du problème de l'obstacle, et la notation v pour une fonction générale, utilisée en "variable locale".

Pour une fonction v on notera $v^+ = \max(v, 0)$ et $v^- = \max(-v, 0)$. Le gradient de v sera noté $\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n})$. Pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in I\!R^n$, nous noterons $\nabla_\xi v = \xi \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$. Nous noterons $D^2 v = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,...,n}$ la matrice des dérivées secondes de v, et pour des vecteurs $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in I\!R^n$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in I\!R^n$, nous noterons $D^2_{\xi,\zeta} v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \zeta_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$.

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, et v une fonction réelle définie sur l'ouvert Ω, nous noterons

$$||v||_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |v|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad p < +\infty \\ \\ \sup_\Omega |v| & \text{si} \quad p = +\infty \end{cases}$$

où sup doit être compris ici comme le sup essentiel classique pour des fonctions mesurables. Nous noterons

$$||v||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||v||_{L^p(\Omega)} + ||\nabla v||_{L^p(\Omega)}, \quad \text{où} \quad ||\nabla v||_{L^p(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} ||\frac{\partial v}{\partial x_i}||_{L^p(\Omega)}.$$

Nous noterons aussi

$$||v||_{W^{2,p}(\Omega)} = ||v||_{L^p(\Omega)} + ||\nabla v||_{L^p(\Omega)} + ||D^2 v||_{L^p(\Omega)}, \quad \text{où} \quad ||D^2 v||_{L^p(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ||\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}||_{L^p(\Omega)}.$$

Nous rappelons aussi les notations classiques, $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence pour la norme de $H^1(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact sur Ω, $H^{-1}(\Omega)$ est le dual de $H_0^1(\Omega)$, et $\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$.
On note $C^0(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. Pour tout entier $k \geq 0$, notera en particulier $C^{k+1}(\overline{\Omega})$, le sous-espace des fonctions de $C^k(\overline{\Omega})$ dont les dérivées partielles d'ordre total $k+1$ (définies sur Ω) sont dans $C^0(\overline{\Omega})$. On considère maintenant un ensemble A quelconque de $I\!R^n$, et pour $\alpha \in (0, 1]$, on note

$$|v|_{\alpha;A} = ||v||_{L^\infty(A)} + [v]_{\alpha;A}, \quad \text{où} \quad [v]_{\alpha;A} = \sup_{x,y \in A, x \neq y} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

On rappelle alors que l'espace $C^{0,\alpha}(\overline{A}) = \left\{v \in C^0(\overline{A}), |v|_{\alpha;A} < +\infty\right\}$ est un Banach pour la norme $|\cdot|_{\alpha;A}$. D'une façon générale, étant donné un espace fonctionnel $Y(A)$ de fonctions définies sur A, on dira que $v \in Y_{loc}(A)$ si pour tout ouvert ω borné vérifiant $\omega \subset\subset A$, on a $v \in Y(\omega)$.

Chapitre 2

Régularité de la solution du problème de l'obstacle

1 Le problème modèle

Etant donné Ω un ouvert borné régulier (de classe C^2) de $I\!R^n$, et les fonctions $f, \psi \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^1(\Omega)$, on cherche à minimiser l'énergie

$$E(v) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + fv,$$

pour

$$v \in K = \left\{ v \in H^1(\Omega), \quad v = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad v \geq \psi \text{ sur } \Omega \right\}.$$

Le résultat classique (cf. Evans [72], Théorème 3, page 467) de minimisation de fonctionnelles strictement convexes, continues, infinies à l'infini, sur un convexe fermé K implique le

Théorème 1.1 *Si $K \neq \emptyset$, alors il existe un et un seul minimiseur.*

On note alors u ce minimiseur.

Remarque 1.2 *En général on ne peut espérer aucune régularité sur la frontière libre $\partial \{u = \psi\}$.*

Remarque 1.3 *Une hypothèse minimale pour obtenir de la régularité sur $\partial \{u = \psi\}$ est l'hypothèse de non dégénérescence :*

$$f - \Delta\psi \geq \delta_0 > 0.$$

Dans la suite nous allons nous restreindre à l'étude du problème de l'obstacle modèle dans lequel on a

$$\psi \equiv 0, \quad f \equiv 1, \quad g \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Dans toute la suite du cours on s'intéresse ainsi à la fonction u solution du problème de minimisation (avec $g \in C^2(\overline{\Omega})$) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} & \inf_{v \in K} E(v) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + v, \\ \text{où} & \\ & v \in K = \{v \in H^1(\Omega), \quad v = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad v \geq 0 \text{ sur } \Omega\}, \\ \text{avec} & \\ & g > 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

2 Régularité de la solution

2.1 Rappels de quelques résultats classiques (I)

Théorème 2.1 *Si $v \in H^1(\Omega)$, alors $v^+(x) := \max(v(x), 0) \in H^1(\Omega)$ et*

$$\frac{\partial v^+}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \cdot 1_{\{v>0\}} \quad \textit{pour presque tout } x \in \Omega \quad \textit{et pour} \quad i = 1, ..., n.$$

Pour la preuve du Théorème 2.1, voir Brezis [35], Proposition IX.5 page 155 (il faut étendre par passage à la limite le résultat à notre cas).

Corollaire 2.2 (Gradient sur une ligne de niveau)
Si $v \in H^1(\Omega)$, alors

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \cdot 1_{\{v=0\}} = 0 \quad \textit{pour presque tout } x \in \Omega \quad \textit{et pour} \quad i = 1, ..., n.$$

Preuve du Corollaire 2.2.
On écrit $v = v^+ - v^-$. En remarquant que $v^- = (-v)^+$, et en appliquant le Théorème 2.1 à v et à $-v$, on déduit que

$$\frac{\partial(v^+ - v^-)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \cdot 1_{\{v \neq 0\}}$$

d'où le résultat.

Définition 2.3 *Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$. Soit $k \in I\!N \setminus \{0\}$. On dit que Ω est de classe C^k si son bord $\partial\Omega$ est localement le graphe d'une fonction C^k, ce qui est équivalent à dire que l'on peut écrire Ω sous la forme suivante :*

$$\Omega = \{x \in I\!R^n \quad : \quad \Phi(x) < 0\},$$

où Φ est une fonction de classe C^k telle que $\nabla\Phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$.

Théorème 2.4 (Régularité elliptique, théorie L^p)
Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$ de classe C^2. Soit $p \in (1, +\infty)$. Il existe $C = C(\Omega, n, p) > 0$ tel que si $g \in W^{2,p}(\Omega)$ et si $v \in H^1(\Omega)$ vérifie

$$v = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad \Delta v \in L^p(\Omega),$$

alors $v \in W^{2,p}(\Omega)$ et

$$||v||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left(||\Delta v||_{L^p(\Omega)} + ||g||_{W^{2,p}(\Omega)} \right).$$

Pour la preuve du Théorème 2.4, voir Gilbarg-Trudinger [83], Lemme 9.17, page 242. Voir aussi [83, 38, 111, 159, 19], pour des questions de régularité elliptique.

Théorème 2.5 (Injections de Sobolev)
Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$ de classe C^1. Alors on a les injections continues suivantes :
i) Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^*}(\Omega)$ où $1/p^* = 1/p - 1/n$.
ii) Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty)$.
iii) Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ où $\alpha = 1 - n/p \in (0, 1)$.

Pour la preuve du Théorème 2.5, voir Brézis [35], Corollaire IX.14, page 168.

2.2 Régularité de la solution et équation d'Euler-Lagrange

Proposition 2.6 *Si une fonction u minimise*

$$E(v) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + v$$

sur

$$K = \left\{ v \in H^1_g(\Omega), \quad v \geq 0 \text{ sur } \Omega \right\} \quad \text{avec} \quad H^1_g(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega), \quad v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

alors u minimise

$$E_+(v) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + v^+$$

sur $H^1_g(\Omega)$.

Preuve de la Proposition 2.6.
Soit $v \in H^1(\Omega)$, alors

$$E_+(v) = E(v^+) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v^-|^2 \tag{2.2}$$

où $v^- \geq 0$ est définie par $v = v^+ - v^-$. Ainsi

$$E_+(v) \geq E(v^+)$$

et cela implique que

$$\inf_{v\in H^1_g(\Omega)} E_+(v) \geq \inf_{v\in H^1_g(\Omega)} E(v^+) = \inf_{v\in K} E(v).$$

Or par ailleurs on a

$$\inf_{v\in H^1_g(\Omega)} E_+(v) \leq \inf_{v\in K} E_+(v) = \inf_{v\in K} E(v).$$

D'où

$$\inf_{v\in H^1_g(\Omega)} E_+(v) = \inf_{v\in K} E(v). \tag{2.3}$$

Ceci montre en particulier que tout minimiseur u de E sur K est aussi minimiseur de E_+ sur $H^1_g(\Omega)$.

A partir de maintenant, et pour toute la suite du cours, on note u le minimiseur du problème (1.1).

Proposition 2.7 *On a*

$$1_{\{u>0\}} \leq \Delta u \leq 1 \quad \textit{dans} \quad H^{-1}(\Omega).$$

Preuve de la Proposition 2.7.
Soit $\phi \in H^1_0(\Omega)$, et $v = u + \varepsilon\phi$. Alors $E_+(v) \geq E_+(u)$, c'est-à-dire

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi + \zeta_\varepsilon \geq -\varepsilon \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2$$

où

$$\zeta_\varepsilon = \frac{(u+\varepsilon\phi)^+ - u^+}{\varepsilon} = \begin{cases} \phi & \text{si} \quad u+\varepsilon\phi \geq 0 \\ -\dfrac{u^+}{\varepsilon} & \text{si} \quad u+\varepsilon\phi \leq 0. \end{cases}$$

i) Pour $\phi \geq 0$, on a $\zeta_\varepsilon = \phi$ et donc en laissant ε tendre vers 0, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi + \phi \\ &\leq \quad < -\Delta u + 1, \phi >_{H^{-1}(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} . \end{aligned}$$

Ce qui signifie que
$$0 \leq -\Delta u + 1 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega).$$
ii) Pour $\phi \leq 0$, on a
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi + \phi \cdot 1_{\{u > -\varepsilon\phi\}} \geq -\varepsilon \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 + \int_\Omega \frac{u^+}{\varepsilon} 1_{\{u+\varepsilon\phi \leq 0\}}.$$
On remarque que lorsque ε tend vers zéro, on a la convergence suivante
$$\phi \cdot 1_{\{u > -\varepsilon\phi\}} \longrightarrow \phi \cdot 1_{\{u>0\}} \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$
Ainsi, le Théorème de convergence dominée de Lebesgue donne
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi + \phi \cdot 1_{\{u>0\}} \geq 0.$$
D'où
$$< -\Delta u + 1_{\{u>0\}}, \phi >_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \geq 0.$$
Ceci signifie que
$$-\Delta u + 1_{\{u>0\}} \leq 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega).$$

Corollaire 2.8 *$\Delta u \in L^\infty(\Omega)$ et $||\Delta u||_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$.*

Preuve du Corollaire 2.8.
D'après la Proposition 2.7, nous avons en particulier au sens des distributions sur Ω
$$0 \leq \Delta u \leq 1.$$
Donc la distribution Δu est en fait une fonction et le résultat en découle.

Corollaire 2.9 *Si Ω est un ouvert borné de classe C^2 et $g \in C^2(\overline{\Omega})$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $p \in (1, +\infty)$, et pour tout $\alpha \in (0,1)$, $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, et $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour $i = 1, ..., n$.*

Preuve du Corollaire 2.9.
On remarque que $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$ implique $\Delta u \in L^p(\Omega)$ pour tout $p \in (1, +\infty)$, car Ω est borné. En appliquant le Théorème de régularité elliptique 2.4 on obtient la régularité $W^{2,p}(\Omega)$. Le Théorème des injections de Sobolev 2.5 appliqué à u et ∇u donne $u, \nabla u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour $\alpha = 1 - n/p \in (0,1)$.

Corollaire 2.10 (Equations d'Euler-Lagrange)
La solution u de (1.1) vérifie

$$\begin{cases} \Delta u = 1 \quad \textit{dans} \quad \{u > 0\} \cap \Omega \\ \\ u \geq 0 \quad \textit{sur} \quad \Omega \\ \\ \nabla u = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial \{u = 0\} \subset\subset \Omega \\ \\ u = g \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Remarque 2.11 *On retrouve, sous une forme faible, la condition* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ *sur* $\partial \{u = 0\}$.

Preuve du Corollaire 2.10.
Puisque u est continue sur $\overline{\Omega}$, l'ensemble $\{u > 0\}$ est un ouvert.
i) $\Delta u = 1$ dans $\{u > 0\}$ d'après la Proposition 2.7.
ii) $u \geq 0$ sur Ω, d'où $\nabla u = 0$ sur $\partial \{u = 0\}$ car $u \in C^1(\overline{\Omega})$.
iii) $\Delta u = 0$ dans $\{u = 0\}^0$.

3 Régularité $W^{2,\infty}$ de la solution u de (1.1)

3.1 Rappels de quelques résultats classiques (II)

Théorème 3.1 (Inégalité de Harnack)
Soit $v \in L^\infty(B_4)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta v = f \quad \textit{sur} \quad B_4 \subset I\!R^n \\ \\ v \geq 0 \quad \textit{sur} \quad B_4. \end{cases}$$

avec $f \in L^n(B_4)$. Alors il existe une constante $C_H = C_H(n) > 0$ telle que

$$\sup_{B_1} v \leq C_H \left(\inf_{B_1} v + ||f||_{L^n(B_4)} \right).$$

On renvoie à Gilbarg-Trudinger [83] pour une preuve complète (Corollaire 9.21 et Théorème 9.22, page 246).

Preuve dans le cas $f = 0$.
Cette preuve est fondée sur la formule de la moyenne pour v harmonique (cf. Gilbarg-Trudinger [83], Théorème 2.1, page 14) :

$$v(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} v.$$

Ainsi soit $x_1, x_2 \in B_1 = B_1(0)$. Alors, en utilisant les inclusions $B_1(x_1) \subset B_3(x_2) \subset B_4(0)$, on a

$$\begin{aligned} v(x_1) &= \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1(x_1)} v \\ &\leq \frac{1}{|B_1|}\int_{B_3(x_2)} v \\ &= \frac{|B_3|}{|B_1|}\frac{1}{|B_3|}\int_{B_3(x_2)} v \\ &= \frac{|B_3|}{|B_1|} v(x_2) \\ &= 3^n v(x_2). \end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{B_1} v \leq 3^n \inf_{B_1} v,$$

ce qui termine la preuve du Théorème dans le cas $f = 0$.

Théorème 3.2 (Estimations elliptiques intérieures)
Pour tout $\alpha \in (0,1)$, il existe une constante $C_E = C_E(n, \alpha) > 0$, telle que si $v \in L^\infty(B_r)$ vérifie

$$\Delta v = f \quad \textit{dans} \quad B_r$$

avec $f \in C^{0,\alpha}(\overline{B_r})$, alors

$$r^2 ||D^2 v||_{L^\infty(B_{r/2})} \leq C_E \left(\begin{array}{c} ||v||_{L^\infty(B_r)} + r^2 ||f||_{L^\infty(B_r)} \\ +r^{2+\alpha}[f]_{\alpha;B_r} \end{array} \right).$$

Remarque 3.3 *Pour $r = 1$, on a en fait*

$$|v|_{2+\alpha;B_{1/2}} \leq C_E \left(||v||_{L^\infty(B_1)} + |f|_{\alpha;B_1} \right)$$

où $|v|_{2+\alpha;B_{1/2}} = |v|_{\alpha;B_{1/2}} + \sum_{i=1}^n |\frac{\partial v}{\partial x_i}|_{\alpha;B_{1/2}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}|_{\alpha;B_{1/2}}$.

3.2 La méthode de Alt et Phillips [10]

Théorème 3.4 (Borne $W^{2,\infty}$)
La solution u du problème (1.1) vérifie

$$D^2 u \in L^\infty_{loc}(\Omega).$$

Preuve du Théorème 3.4.
L'idée de Alt et Phillips pour estimer les dérivées secondes de u en un point y_0 proche de la frontière libre, consiste à appliquer le Théorème 3.2 dans une boule $B_r(y_0)$, une fois seulement qu'on saura que u est strictement positive dans cette boule et donc que $\Delta u = 1$ dans cette même boule. L'information sur la positivité de u dans cette boule résultera de l'inégalité de Harnack avec second membre f borné mais discontinu a priori (ici $1_{\{u>0\}} \leq f \leq 1$) pour un choix judicieux du rayon r.

Nous passons maintenant à la mise en place technique de cette idée. On sait déjà que $u, \nabla u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $u \geq c > 0$ sur $\partial\Omega$. Soit alors pour $\delta > 0$ suffisamment petit l'ouvert :

$$\omega_\delta = \{x \in \Omega, \quad 0 < \operatorname{dist}(x, \{u = 0\}) < \delta\} \subset\subset \Omega.$$

Estimation sur ω_δ
Rappelons que d'après la Proposition 2.7 on a

$$\Delta u \leq 1 \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

Soit $y_0 \in \omega_\delta$. D'après l'inégalité de Harnack appliquée à la fonction $w(x) = u(y_0 + rx)$ qui vérifie $\Delta w \leq r^2$, on obtient

$$\sup_{B_1(0)} w \leq C_H \left(\inf_{B_1(0)} w + ||r^2||_{L^n(B_4)} \right)$$

et donc

$$\sup_{B_r(y_0)} u \leq C_H \left(\inf_{B_r(y_0)} u + r^2 ||1||_{L^n(B_4)} \right)$$

c'est-à-dire

$$\sup_{B_r(y_0)} u \leq C'_H \left(\inf_{B_r(y_0)} u + r^2 \right)$$

où $C'_H = C_H ||1||_{L^n(B_4)}$. Maintenant soit

$$r = \sqrt{\frac{u(y_0)}{2C'_H}}.$$

Alors

$$0 < u(y_0) \leq \sup_{B_r(y_0)} u \leq C'_H \inf_{B_r(y_0)} u + \frac{u(y_0)}{2}.$$

D'où

$$\inf_{B_r(y_0)} u \geq \frac{u(y_0)}{2C'_H} = r^2 > 0.$$

Ceci implique en particulier que

$$u > 0 \quad \text{sur} \quad B_r(y_0) \quad \text{pour} \quad r = \sqrt{\frac{u(y_0)}{2C'_H}}$$

et donc

$$\Delta u = 1 \quad \text{sur} \quad B_r(y_0).$$

D'après l'estimation elliptique intérieure (Théorème 3.2) on a :

$$\begin{aligned} r^2 ||D^2u||_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(y_0))} &\leq C_E \left(||u||_{L^\infty(B_r(y_0))} + r^2 \right) \\ &\leq C_0 r^2 \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \sup_{B_r(y_0)} u &\leq C'_H \left(\inf_{B_r(y_0)} u + r^2 \right) \\ &\leq C'_H \left(u(y_0) + r^2 \right) \\ &\leq C'_H \left(2C'_H r^2 + r^2 \right) \\ &= C'_H (1 + 2C'_H) r^2 \end{aligned}$$

d'où

$$||D^2u||_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(y_0))} \leq C_0 := C_E(1 + C'_H(1 + 2C'_H)).$$

En particulier $|D^2u(y_0)| \leq C_0$ dès que $B_{4r}(y_0) \subset \Omega$, or $r = \sqrt{\frac{u(y_0)}{2C'_H}}$. D'où ceci est vérifié dès que $\delta \leq \delta_0$ pour une constante $\delta_0 > 0$ choisie suffisamment petite. D'où

$$||D^2u||_{L^\infty(\omega_\delta)} \leq C_0.$$

Estimation sur $\{u = 0\}$

Du fait que $u \geq 0$, et par continuité du gradient, on a $\nabla u = 0$ sur $\{u = 0\}$. Par ailleurs on sait d'après le Corollaire 2.9 que $\nabla u \in W^{1,p}(\Omega)$, ce qui est en particulier vrai pour $p = 2$. On applique alors le Corollaire 2.2 à $v = \nabla u$, qui prouve que $D^2u = \nabla(\nabla u) = 0$ presque partout sur $\{\nabla u = 0\}$ donc en particulier presque partout sur $\{u = 0\}$.

Estimation locale sur $\Omega \backslash (\omega_d \cap \{u = 0\})$

Dans $\Omega \backslash (\omega_d \cap \{u = 0\})$ et en restant à distance du bord fixe $\partial\Omega$, on conclut par l'estimation intérieure (Théorème 3.2).

Conclusion

Cela prouve finallement que $D^2u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Fin de la preuve.

Chapitre 3

Mesure de la frontière libre

1 Mesure de la frontière libre

1.1 Rappels de quelques résultats classiques (III)

Théorème 1.1 (Principe du maximum)
Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$.
i) (faible). Si $v \in H^1(\Omega)$ *et vérifie*

$$\Delta v \geq 0 \quad sur \quad \Omega$$

Alors

$$\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v.$$

ii) (fort) De plus si v *est continue sur* Ω*, et si il existe* $x_0 \in \Omega$ *tel que*

$$v(x_0) = \sup_{\Omega} v$$

alors $v = constante = v(x_0)$ *dans la composante connexe de* Ω *qui contient le point* x_0.

Ce résultat est prouvé dans Gilbarg-Trudinger [83], Théorème 8.1 page 179 et Théorème 8.19 page 198. Voir aussi [24, 123, 138] pour des versions plus générales du principe du maximum.

Exercice : essayer de prouver le ii) à l'aide de l'inégalité de Harnack.

1.2 Lemme de non dégénérescence

Lemme 1.2 (Non dégénérescence)
Soit $v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. *Si* $\Delta v \geq 1$ *dans* $\{v > 0\}$ *et* $x_0 \in \partial\{v > 0\}$, *alors*

$$\sup_{B_r(x_0)} v \geq \frac{r^2}{2n}$$

dès que $B_r(x_0) \subset \Omega$.

Preuve du Lemme 1.2
Soit $w(x) = v(x) - \frac{1}{2n}|x - x_0|^2$. On a

$$\Delta w \geq 0 \quad \text{sur} \quad B_r(x_0) \cap \{v > 0\} = \omega.$$

i) Soit $x_0 \in \{v > 0\}$. Alors $\sup\limits_{\omega} w \leq \sup\limits_{\partial\omega} w$. Or

$$\partial\omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

où

$$\Gamma_1 = ((\partial\{v > 0\}) \cap B_r(x_0)), \quad \Gamma_2 = ((\partial B_r(x_0)) \cap \{v > 0\}).$$

Or on a

$$\begin{cases} \text{sur} \quad \Gamma_1 : \qquad w = -\dfrac{1}{2n}|x - x_0|^2 < 0 \\ \\ \text{sur} \quad \Gamma_2 : \qquad w = v - \dfrac{r^2}{2n}. \end{cases}$$

D'où

$$0 < v(x_0) = w(x_0) \leq \sup_{\Gamma_2}\left(v - \frac{r^2}{2n}\right)$$

c'est-à-dire

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} v \geq \frac{r^2}{2n} + v(x_0).$$

ii) Par continuité, on obtient le même résultat pour $x_0 \in \partial\{v > 0\}$, ce qui termine la preuve du Lemme.

1.3 Application à la mesure de la frontière libre

Théorème 1.3 *On a la mesure de Lebesgue :*

$$|\partial\{u = 0\}| = 0.$$

Le Théorème 1.3 sera prouvé à la fin de ce chapitre.

Corollaire 1.4 *La solution du problème de l'obstacle vérifie*

$$\Delta u = 1_{\{u>0\}} \quad \textit{sur} \quad \Omega. \tag{1.1}$$

Preuve du Corollaire 1.4.
On a $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$. Or

$$\Delta u = 1 \quad \text{sur} \quad \{u > 0\},$$
$$\Delta u = 0 \quad \text{sur} \quad \{u = 0\}^0.$$

Et

$$\Omega \backslash \left(\{u > 0\} \cup \{u = 0\}^0\right) = \partial\{u = 0\} = \partial\{u > 0\}$$

qui est de mesure nulle, d'où le résultat.

La preuve du Théorème 1.3 est basée sur le

Lemme 1.5 ("Petite boule positive")

$$\exists \delta, r_0 > 0, \quad \forall x_0 \in \partial\{u > 0\}, \quad \forall r \in (0, r_0),$$

$$\exists B_{\delta r}(y) \subset B_r(x_0), \quad u > 0 \quad sur \quad B_{\delta r}(y).$$

Remarque 1.6 *En particulier la région $\{u > 0\}$ ne peut pas avoir de pointes en forme de cusp.*

Preuve du Lemme 1.5
On pose $x_0 = 0 \in \partial\{u > 0\}$. On a $u(0) = 0$ et $\nabla u(0) = 0$ car 0 est minimum de u. Or $||D^2u||_{L^\infty(B_{r_0}(0))} \le C_0$ d'après le Théorème 3.4, d'où en écrivant pour tout $\xi \in \mathbf{S}^{n-1}$ et tout $y \in B_r(0)$ avec $r < r_0$

$$\nabla_\xi u(y) = \nabla_\xi u(0) + |y| \int_0^1 D^2_{\xi, \frac{y}{|y|}} u(ty) dt$$

on obtient

$$||\nabla u||_{L^\infty(B_r(0))} \le C_0 r.$$

Le Lemme de non dégénérescence 1.2 prouve que

$$\forall r < r_0, \quad \exists y \in \partial B_{\frac{r}{2}}(0), \quad u(y) \ge \frac{1}{2n}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{8n}.$$

En particulier, si $x \in B_{\delta r}(y)$ avec $\delta \le 1/2$, on a

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\le |x - y| ||\nabla u||_{L^\infty(B_{r_0}(0))} \\ &\le (\delta r)(C_0 r) \\ &= (C_0 \delta) r^2. \end{aligned}$$

D'où
$$\begin{aligned} u(x) &\geq u(y) - C_0\delta r^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{8n} - C_0\delta\right) r^2 > 0 \quad \text{si} \quad \delta < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8nC_0}\right) \end{aligned}$$
c'est-à-dire
$$u > 0 \quad \text{sur} \quad B_{\delta r}(y).$$
Fin de la preuve.

Rappelons le résultat suivant :

Lemme 1.7 *Si $A \subset I\!\!R^n$ est un ensemble mesurable, alors pour presque tout $x \in A$, on a*
$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{|B_r(x) \cap A|}{|B_r|} = 1 = \liminf_{r\to 0^+} \frac{|B_r(x) \cap A|}{|B_r|}.$$

Preuve du Lemme 1.7
Admis, cf. Federer [74] Théorème 2.9.11 page 158 (voir aussi [73, 156] pour des compléments en théorie de la mesure géométrique).

Preuve du Théorème 1.3.
Si la mesure de Lebesgue de $\partial\{u = 0\}$ est non nulle, alors il existe au moins un point $x_0 \in \partial\{u = 0\}$ tel que
$$\limsup_{r\to 0^+} \theta_r(x_0) = 1$$
où
$$\theta_r(x_0) = \frac{|B_r(x_0) \cap \partial\{u = 0\}|}{|B_r|}.$$
Or d'après le Lemme 1.7, il existe une boule $B_{\delta r}(y) \subset B_r(x_0) \cap \{u > 0\}$, d'où
$$|B_r(x_0) \cap \partial\{u = 0\}| \leq |B_r| - |B_{\delta r}|$$
c'est-à-dire
$$\theta_r(x_0) \leq 1 - \frac{|B_{\delta r}|}{|B_r|} = 1 - \delta^n$$
Contradiction.

Chapitre 4

Blow-up

1 Notion de blow-up

1.1 Rappel du Théorème d'Ascoli (Théorème de compacité)

Théorème 1.1 (Théorème d'Ascoli pour les fonctions höldériennes)
Soit $\Omega \subset I\!\!R^n$ un ouvert **borné**, *et $\alpha \in (0,1]$. Soit $(u_n)_{n\in I\!\!N}$ une suite de fonctions vérifiant :*

$$|u_n|_{\alpha;\Omega} \leq C_0 \quad \textit{(estimation a priori).}$$

Alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ et $u_\infty \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, vérifiant

$$|u_\infty|_{\alpha;\Omega} \leq C_0,$$

$$||u_{n_k} - u_\infty||_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow_{k\to+\infty} 0.$$

Preuve du Théorème 1.1.
Cf. Brezis [35] Théorème IV.24 page 72 (voir aussi Evans [72]).

1.2 Rappel du problème de l'obstacle sur Ω

$$\begin{cases} \Delta u = 1 \quad \text{sur} \quad \{u > 0\} \\ \\ u \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \\ ||D^2 u||_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

1.3 Changement d'échelle et blow-up

Définition 1.2 *On appelle blow-up de u en X_0 la suite de fonctions $u_{X_0}^{\varepsilon_n}$ définies par :*

$$u_{X_0}^{\varepsilon_n}(X) = \frac{u(X_0 + \varepsilon_n X)}{\varepsilon_n^2}$$

pour $\varepsilon_n \to 0$.

En particulier, on remarque que pour tout $X_0 \in \Omega$ et pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, la fonction $u_{X_0}^{\varepsilon_n}$ est bien définie sur K, pour n assez grand.

Lorsque cela permettra d'alléger les notations sans introduire d'ambiguité, on notera simplement

$$\varepsilon = \varepsilon_n, \quad u^\varepsilon = u_{X_0}^{\varepsilon_n}.$$

En particulier on a

$$D^2 u^\varepsilon(X) = \left(D^2 u\right)(X_0 + \varepsilon X)$$

d'où

$$||D^2 u^\varepsilon||_{L^\infty} = ||D^2 u||_{L^\infty} \leq C_0$$

et u^ε vérifie (1.1) sur $\dfrac{\Omega - X_0}{\varepsilon}$. Si de plus $X_0 \in \partial\{u = 0\}$, alors $u(X_0) = \nabla u(X_0) = 0$ donc

$$u^\varepsilon(0) = \nabla u^\varepsilon(0) = 0.$$

Or si $Y = |Y|e$, et $e, \xi \in \mathbf{S}^{n-1}$, alors

$$\xi \cdot \nabla u^\varepsilon(Y) = \xi \cdot \nabla u^\varepsilon(0) + \int_0^{|Y|} dt\ D^2_{\xi,e} u^\varepsilon(0 + te)$$

et

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(Y) &= u^\varepsilon(0) + \int_0^{|Y|} ds\ e \cdot \nabla u^\varepsilon(se) \\ &= 0 + \int_0^{|Y|} ds \int_0^s dt\ D^2_{e,e} u^\varepsilon(0 + te). \end{aligned}$$

D'où

$$\forall B_{\varepsilon r}(X_0) \subset \Omega, \qquad \begin{cases} ||D^2 u_{X_0}^\varepsilon||_{L^\infty(B_r(0))} \leq C_0 \\ ||\nabla u_{X_0}^\varepsilon||_{L^\infty(B_r(0))} \leq C_0 r \\ ||u_{X_0}^\varepsilon||_{L^\infty(B_r(0))} \leq C_0 \dfrac{r^2}{2} \\ \sup\limits_{B_r(0)} u_{X_0}^\varepsilon \geq \dfrac{r^2}{2n}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Proposition 1.3 (Compacité des blow-up)
Etant donné une solution u de (1.1) et un blow-up $u^{\varepsilon_n}_{X_0}$ *vérifiant (1.2), on peut trouver une fonction* $u^0_{X_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *vérifiant (1.1) sur* $\mathbb{R}^n$ *et (1.2), tel que* $0 \in \partial\left\{u^0_{X_0} = 0\right\}$*, et une sous-suite* $(u^{\varepsilon_{n_k}}_{X_0})_k$ *telle que pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}^n$*, on a*

$$|u^{\varepsilon_{n_k}}_{X_0} - u^0_{X_0}|_{1;K} \longrightarrow_{k\to+\infty} 0.$$

Remarque 1.4 *La fonction* $u^0_{X_0}$ *est appelée une limite du blow-up* $u^{\varepsilon_n}_{X_0}$*. Cette limite n'est pas nécéssairement unique : elle dépend a priori du choix de la sous-suite extraite.*

Preuve de la Proposition 1.3
Etant donné un rayon $R > 0$ fixé, on a l'estimation (1.2) sur $B_R(0)$. D'après le Théorème d'Ascoli, on peut trouver une fonction fonction limite u^0 et une sous-suite convergent vers u^0 sur $B_R(0)$.

On peut faire le raisonnement avec une suite de rayons R croissant vers l'infini, et par un argument d'extraction diagonale, on peut montrer qu'il existe une sous-suite telle que

$$\forall R > 0, \quad |u^{\varepsilon_{n_k}} - u^0|_{1;B_R(0)} \longrightarrow_{k\to+\infty} 0.$$

En particulier u^0 satisfait (1.2), d'où $0 \in \partial\{u^0 = 0\}$. De plus u^0 satisfait (1.1) car $u^{\varepsilon_{n_k}}$ satisfait (1.1). La seule chose à vérifier est que

$$\Delta u^0 = 1 \quad \text{sur} \quad \left\{u^0 > 0\right\}. \tag{1.3}$$

Preuve de (1.3)
Soit $Y_0 \in \{u^0 > 0\}$, donc $u^0(Y_0) > 0$. Ainsi, par continuité de u^0, il existe $\delta > 0$ telle que

$$u^0(Y) \geq \frac{1}{2}u^0(Y_0) > 0 \quad \text{sur} \quad B_\delta(Y_0).$$

Or $u^{\varepsilon_{n_k}}$ tend vers u^0 uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^n$. Ainsi pour tout $\eta > 0$, on a

$$|u^{\varepsilon_{n_k}} - u^0| \leq \eta \quad \text{sur} \quad B_\delta(Y_0)$$

pour k assez grand. Avec le choix $\eta = \dfrac{u^0(Y_0)}{4}$, on obtient en particulier

$$u^{\varepsilon_{n_k}} \geq \eta > 0 \quad \text{sur} \quad B_\delta(Y_0).$$

D'où

$$\Delta u^{\varepsilon_{n_k}} = 1 \quad \text{sur} \quad B_\delta(Y_0).$$

Et par passage à la limite dans $\mathcal{D}'(B_\delta(Y_0))$, on a

$$\Delta u^0 = 1 \quad \text{sur} \quad B_\delta(Y_0).$$

Fin de preuve.

Chapitre 5

Formule de monotonie

1 Formule de monotonie

Théorème 1.1 (Formule de monotonie)
Soit u une solution du problème de l'obstacle (1.1) sur Ω, et $X_0 \in \Omega$ tel que $B_{r_0}(X_0) \subset\subset \Omega$. Soit
$$\Phi_{u,X_0}(r) := \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r(X_0)} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + u - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(X_0)} u^2.$$
Alors $\Phi_{u,X_0} \in C^1((0, r_0])$ et
$$\frac{d}{dr}\left(\Phi_{u,X_0}\right)(r) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B_r(X_0)} \left| e_r \cdot \nabla \left(\frac{u(X)}{|X - X_0|^2} \right) \right|^2 \geq 0$$
où $e_r = \dfrac{X - X_0}{|X - X_0|}$. En particulier, l'application $r \longmapsto \Phi_{u,X_0}(r)$ est croissante.

Preuve du Théorème 1.1.
Posons $X_0 = 0$. Soit
$$\begin{cases} \Psi_u(r) = \dfrac{1}{r^{n+2}} \displaystyle\int_{B_r} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + u \\ \\ u^\varepsilon(X) = \dfrac{u(\varepsilon X)}{\varepsilon^2}. \end{cases}$$
Alors on a l'invariance par scaling
$$\Psi_{u^\varepsilon}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) = \Psi_u(r).$$
Donc
$$\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\Psi_{u^\varepsilon}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\right\}_{|\varepsilon=1} = 0$$
c'est-à-dire
$$-r\frac{d}{dr}\left(\Psi_u\right) + \frac{d}{d\varepsilon}\left\{\Psi_{u^\varepsilon}(r)\right\}_{|\varepsilon=1} = 0.$$

Or

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\Psi_{u^\varepsilon}(r)\right\}_{|\varepsilon=1} = \frac{1}{r^{n+2}}\int_{B_r} \nabla u\cdot\nabla U + U$$

où

$$U = \frac{d}{d\varepsilon}(u^\varepsilon)_{|\varepsilon=1} = X\cdot\nabla u - 2u.$$

D'où

$$\frac{d}{dr}\left(\Psi_u\right)(r) = \frac{1}{r^{n+3}}\left\{\int_{B_r} U(-\Delta u+1) + \int_{\partial B_r} U\nabla u\cdot\nu\right\}.$$

Or

$$U(-\Delta u+1)\equiv 0$$

car

$$\begin{cases} -\Delta u + 1 = 0 \quad \text{si} \quad u>0 \\ \\ U = 0 \quad \text{si} \quad u = 0. \end{cases}$$

Ici toutes les dérivations sont justifiées car $D^2u\in L^\infty_{loc}(\Omega)$. D'où

$$\frac{d}{dr}\left(\Psi_u\right)(r) = \frac{1}{r^{n+3}}\int_{\partial B_r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - 2u\right)\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Soit $w = \dfrac{u}{r^2}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= 2rw + r^2\frac{\partial w}{\partial r}, \\ r\frac{\partial u}{\partial r} - 2u &= r^3\frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left(\Psi_u\right)(r) &= \frac{1}{r^{n+3}}\int_{\partial B_r} r^3\frac{\partial w}{\partial r}\left(2rw + r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right) \\ &= I + \frac{1}{r^{n-2}}\int_{\partial B_r}\left|\frac{\partial w}{\partial r}\right|^2. \end{aligned}$$

où on a

$$\begin{aligned}
I \;&:= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial (w^2)}{\partial r} \\
&= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\theta \in \partial B_1} r^{n-1} \frac{\partial (w^2(r,\theta))}{\partial r} \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \int_{\theta \in \partial B_1} w^2(r,\theta) \right\} \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} w^2 \right\} \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} u^2 \right\}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{dr} \left\{ \Phi_{u,0}(r) \right\} = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B_r} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 .$$

avec

$$\Phi_{u,0}(r) = \Psi_u(r) - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} u^2.$$

Fin de preuve.

2 Application aux blow-up

Théorème 2.1 (Homogénéité des limites de blow-up)
Soit $X_0 \in \partial \{u > 0\}$ et $u^0_{X_0}$ une limite de blow-up en X_0. Alors $u^0_{X_0}$ est homogène de degré 2, c'est-à-dire

$$u^0_{X_0}(\lambda X) = \lambda^2 u^0_{X_0}(X) \quad \textit{pour tout} \quad \lambda > 0$$

et

$$\Phi_{u^0_{X_0},0}(r) = \textit{constante} = \lim_{\rho \to 0^+} \Phi_{u,X_0}(\rho).$$

Preuve du Théorème 2.1.
Soit

$$u^\varepsilon_{X_0}(X) = \frac{u(X_0 + \varepsilon X)}{\varepsilon^2}.$$

Alors pour une sous-suite extraite on a la convergence suivante dans $C^{0,1}_{loc}(I\!R^n)$:

$$u^{\varepsilon_{n_k}}_{X_0} \longrightarrow u^0_{X_0}$$

et par conséquent à $r > 0$ fixé, on a

$$\Phi_{u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}},0}(r) \longrightarrow \Phi_{u_{X_0}^0,0}(r).$$

Or d'après l'invariance d'échelle on a

$$\Phi_{u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}},0}(r) = \Phi_{u,X_0}(\varepsilon_{n_k} r)$$

$$\longrightarrow \mathit{constante} = \Phi_{u,X_0}(0^+) := \lim_{\rho\to 0^+} \Phi_{u,X_0}(\rho).$$

Ici la limite $\Phi_{u,X_0}(0^+)$ existe d'après la monotonie de $\rho \longmapsto \Phi_{u,X_0}(\rho)$. De plus cette limite est finie car on a les bornes suivantes sur u :

$$\begin{cases} ||D^2u||_{L^\infty(B_r(X_0))} \leq C_0 \\ ||\nabla u||_{L^\infty(B_r(X_0))} \leq C_0 r \\ ||u||_{L^\infty(B_r(X_0))} \leq C_0 \frac{r^2}{2} \end{cases}$$

ce qui garantit que pour tout ρ on a

$$\Phi_{u,X_0}(\rho) \geq -C_1 > -\infty.$$

D'où

$$\Phi_{u_{X_0}^0,0}(r) = \mathit{constante} = \Phi_{u,X_0}(0^+).$$

Or

$$\frac{d}{dr}\left(\Phi_{u_{X_0}^0,0}\right)(r) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B_r(0)} \left| \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_{X_0}^0(X)}{|X|^2}\right)\right|^2.$$

D'où $\dfrac{u_{X_0}^0(X)}{|X|^2}$ ne dépend que de $\theta = \dfrac{X}{|X|}$, c'est-à-dire

$$u_{X_0}^0(X) = |X|^2 w\left(\frac{X}{|X|}\right)$$

Fin de preuve.

Corollaire 2.2 *L'ensemble* $\left\{u_{X_0}^0 = 0\right\}$ *est un cone.*

Chapitre 6

Classification des limites de blow-up

1 Rappel du Théorème de Liouville

Théorème 1.1 (Liouville).
Soit v vérifiant

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \quad \textit{sur} \quad I\!R^n \\ \\ ||v||_{L^\infty(I\!R^n)} \leq C. \end{cases}$$

Alors $v =$ constante.

Preuve du Théorème 1.1.
Soit $m = \inf_{I\!R^n} v > -\infty$ et $w = v - m$. Ainsi

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \quad \text{sur} \quad I\!R^n \\ \\ w \geq 0 \quad \text{sur} \quad I\!R^n \\ \\ \inf_{I\!R^n} w = 0. \end{cases}$$

Alors d'après l'inégalité d'Harnack on a

$$0 \leq \sup_{B_r} w \leq C_H \inf_{B_r} w.$$

Or $\inf_{B_r} w \longrightarrow 0$ lorsque $r \longrightarrow +\infty$, d'où $\sup_{B_r} w \longrightarrow 0$ et $\sup_{I\!R^n} w = 0$ ce qui implique que $w \equiv 0$, c'est-à-dire $v = m =$ *constante.*

Corollaire 1.2 *Si la mesure de l'ensemble $\left\{u^0_{X_0} = 0\right\}$ est nulle, alors il existe une matrice Q, de type $n \times n$ vérifiant trace$(Q) = 1$ et $Q \geq 0$, telle que*

$$u^0_{X_0}(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X.$$

Preuve du Corollaire 1.2.
On note $u^0 = u^0_{X_0}$. Puisque la mesure de Lebesgue de $\left\{u^0_{X_0} = 0\right\}$ est nulle, on a

$$\Delta u^0 = 1 \quad \text{sur} \quad I\!\!R^n.$$

Soit $\xi, \zeta \in \mathbf{S}^{n-1}$, et $v = D^2_{\xi,\zeta} u^0$. Alors

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \quad \text{sur} \quad I\!\!R^n \\ \\ ||v||_{L^\infty(I\!\!R^n)} \leq C_0. \end{cases}$$

D'après le Théorème de Liouville, on a $v = \textit{constante}$. Soit maintenant $X \in I\!\!R^n$ et $\phi(t) = u^0(tX)$. Ainsi on a

$$\phi(t) = \phi(0) + t\phi'(0) + \int_0^t ds \int_0^s d\alpha \ \phi''(\alpha)$$

D'où une évaluation en $t = 1$ donne

$$\begin{aligned} u^0 \quad &= 0 + 0 + \left(\int_0^t ds \int_0^s d\alpha \right) D^2_{X,X} u^0 \\ &= \frac{1}{2} {}^t X \cdot (D^2 u^0) \cdot X. \end{aligned}$$

Fin de preuve.

1.1 Classification en dimension 2

D'après le résultat d'homogénéité (Théorème 2.1), toute limite de blow-up en dimension $n = 2$ s'écrit

$$u^0(X) = r^2 g(\theta), \quad \text{avec} \quad r = |X|, \quad \theta = \frac{X}{|X|}$$

et rappelons que u^0 vérifie

$$\begin{cases} \Delta u^0 = 1_{\{u^0 > 0\}} \quad \text{sur} \quad I\!\!R^2 \\ \\ u^0 \geq 0 \\ \\ u^0 \in C^1(I\!\!R^2), \quad ||D^2 u^0||_{L^\infty(I\!\!R^2)} \leq C_0. \end{cases}$$

Or l'opérateur de Laplace s'écrit en coordonnées polaires :

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Cela donne avec $\theta \in \mathbf{S}^1 = [0, 2\pi)_{periodique} = I\!R \backslash 2\pi \mathbf{Z}$

$$\begin{cases} 4g(\theta) + g''(\theta) = 1_{\{g>0\}} \quad \text{sur} \quad \mathbf{S}^1 \\ \\ g \geq 0 \\ \\ g \in C^1(\mathbf{S}^1), \quad ||g''||_{L^\infty(S^1)} \leq C_0. \end{cases}$$

Là où $g > 0$, les solutions explicites sont

$$g(\theta) = A\cos(2(\theta - \theta_0)) + \frac{1}{4}.$$

Posons $\theta_0 = 0$, les autres solutions s'obtenant par translastion en θ. Quitte à changer θ en $\theta + \frac{\pi}{2}$, on peut supposer que $A \geq 0$. On a alors trois cas.
Cas 1 : $0 \leq A < \frac{1}{4}$
Alors $g > 0$ sur $\mathbf{S}^1$, cela fournit une solution.
Cas 2 : $A > \frac{1}{4}$
Alors $g > 0$ sur l'intervalle $(-\theta_1, \theta_1)$, avec $\theta_1 \in (0, \pi/2)$. D'où $g'(\theta_1) \neq 0$. Contradition avec le fait que g est positive et C^1. Il n'y a donc pas de solutions.
Cas 3 : $A = \frac{1}{4}$
Alors on a

$$g(\theta) = \frac{1}{4}(\cos(2\theta) + 1) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta) \quad \text{là où} \quad g > 0.$$

Ainsi la fonction suivante est une solution

$$g_0(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos^2\theta & \text{si} \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où, ou bien

$$g(\theta) = g_0(\theta)$$

ou bien

$$g(\theta) = g_0(\theta + \pi)$$

ce qui est la même solution à translation près en θ, ou bien

$$g(\theta) = \frac{1}{2}\cos^2\theta$$

Conclusion

A translation près sur θ, i.e. à rotation près des fonctions, on trouve deux types de solutions, définies pour tout $X = (x_1, x_2) \in I\!R^2$ par

$$u^0(X) = r^2 g_0(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1^2 \quad \text{si} \quad x_1 \geq 0 \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad x_1 \leq 0 \end{cases}$$

où bien avec $0 \leq A \leq \frac{1}{4}$:

$$u^0(X) = r^2 \left(A\cos(2\theta) + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X$$

où $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2A & 0 \\ & \\ 0 & \frac{1}{2} - 2A \end{pmatrix} \geq 0,$
avec trace égale à 1.

1.2 Théorème général de classification des limites de blow-up

On prouve facilement le résultat suivant

Lemme 1.3 *Soit $\alpha = \alpha(n)$ la constante définie par*

$$\alpha = \Phi_{u_1^0,0}(1)$$

où

$$u_1^0(X) = \begin{cases} \frac{1}{2} x_1^2 & si \quad x_1 \geq 0 \\ & \\ 0 \quad si & x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Alors $\alpha > 0$

On a par ailleurs le

Lemme 1.4 *Soit Q une matrice $n \times n$ symétrique, de trace égale à 1. Alors pour tout $r > 0$, on a*

$$\Phi_{v,0}(r) = 2\alpha \quad avec \quad v(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X.$$

Preuve du Lemme 1.4
Par invariance par dilatations on peut ramener le calcul au cas $r = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\Phi_{v,0}(1) &= \int_{B_1(0)} \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + v - \int_{\partial B_1(0)} v^2 \\
&= \int_{B_1(0)} -\frac{1}{2} v \Delta v + v - \int_{\partial B_1(0)} \left(v^2 - \frac{1}{2} v \ \frac{X}{|X|} \cdot \nabla v \right) \\
&= \int_{B_1(0)} \frac{1}{2} v \\
&= \left(\int_{B_1(0)} \frac{1}{2} x_1^2 \right) \ \text{trace}(Q) \\
&= 2\alpha
\end{aligned}$$

où on a utilisé une intégration par parties pour la deuxième ligne. Pour la troisième ligne, on a utilisé l'EDP $\Delta v = 1$ et l'homogénéité d'ordre 2 de v qui vérifie alors la relation d'Euler : $X \cdot \nabla v = 2v$, ceci éliminant le terme de bord. La quatrième ligne s'obtient en diagonalisant la matrice Q en base orthonormée. Ceci termine la preuve du Lemme 1.4.

Plus généralement, utilisant des arguments de type principe du maximum, on peut classifier les solutions homogènes de degré 2 de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u^0 = 1_{\{u^0>0\}} \\ \\ u^0 \geq 0 \\ \\ ||D^2 u^0||_{L^\infty(I\!R^n)} \leq C \end{array} \right| \quad \text{dans} \quad I\!R^n.$$

et en déduire le résultat suivant :

Théorème 1.5 (Théorème de type Liouville, classification des limites de blow-up)
Soit u une solution au problème de l'obstacle et $X_0 \in \{u > 0\}$. Soit

$$u_{X_0}^{\varepsilon_n}(X) = \frac{u(X_0 + \varepsilon_n X)}{\varepsilon_n^2}$$

avec $\varepsilon_n \longrightarrow 0$. Alors il existe au moins une sous-suite (ε_{n_k}) telle que la suite de fonctions $\left(u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}}\right)$ converge (uniformément sur tous les compacts de $I\!R^n$) vers une limite $u_{X_0}^0$. Réciproquement, notons $u_{X_0}^0$ toute limite d'une sous-suite $\left(u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}}\right)$ convergente. Alors ou bien
i) $\lim_{r\to 0} \Phi_{u,X_0}(r) = \alpha > 0$
et il existe un vecteur unitaire ν (qui dépend a priori du choix de la sous-suite $\left(u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}}\right)$) tel que

$$u_{X_0}^0(X) = \frac{1}{2}\left(\max(0, < X, \nu >)\right)^2,$$

ou bien
ii) $\lim_{r\to 0} \Phi_{u,X_0}(r) = 2\alpha > 0$
et il existe une matrice Q de type $n \times n$ symétrique, positive ou nulle, vérifiant trace$(Q) =$ 1 (cette matrice Q dépend a priori du choix de la sous-suite $\left(u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}}\right)$) tel que

$$u^0(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X.$$

Définition 1.6 (Points singuliers / Points réguliers)
Les points $X_0 \in \{u > 0\}$ de type i) sont appelés points réguliers de la frontière libre.
Les points $X_0 \in \{u > 0\}$ de type ii) sont appelés points singuliers de la frontière libre.

On écrit

$$\partial\{u=0\} = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

où

$$\mathcal{R} = \left\{X_0 \in \partial\{u=0\}, \Phi_{u,X_0}(0^+) = \alpha\right\},$$
$$\mathcal{S} = \left\{X_0 \in \partial\{u=0\}, \Phi_{u,X_0}(0^+) = 2\alpha\right\}.$$

Interprétation.

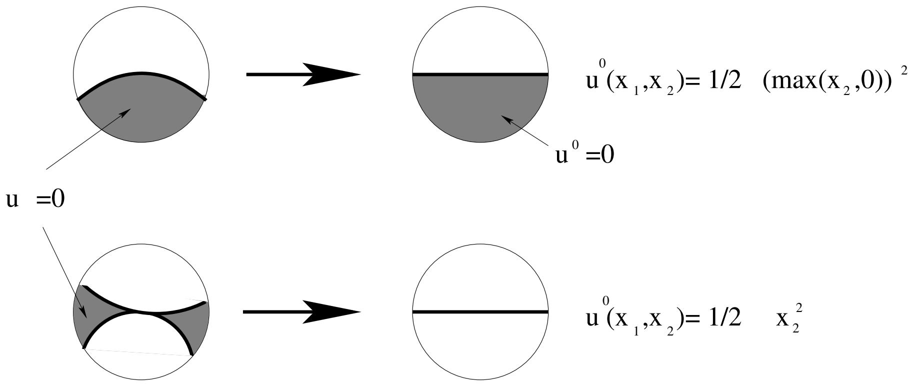

FIG. 6.1 – Limites de Blow-up

Proposition 1.7 *$\mathcal{S}$ est fermé.*

Corollaire 1.8 *$\mathcal{R}$ est un ouvert de $\partial\{u=0\}$, et $\mathcal{S}$ est un fermé de $\partial\{u=0\}$.*

Preuve de la Proposition 1.7.
Soit $X_0^n \in \mathcal{S}$ tel que $X_0^n \longrightarrow X_0$. On veut prouver que $X_0 \in \mathcal{S}$. Si $X_0 \notin \mathcal{S}$, alors $X_0 \in \mathcal{R}$ et donc

$$\Phi_{u,X_0}(r) \longrightarrow \alpha$$

lorsque r tend vers zéro. Soit $r_0 > 0$ tel que

$$\Phi_{u,X_0}(r_0) \leq \frac{3}{2}\alpha.$$

Par ailleurs on a

$$\Phi_{u,X_0^n}(r_0) \geq \Phi_{u,X_0^n}(0^+) = 2\alpha.$$

D'où par passage à la limite on tire

$$\Phi_{u,X_0}(r_0) \geq 2\alpha.$$

Contradiction.

Chapitre 7

Etude des points singuliers

1 Une formule de monotonie pour les points singuliers

Rappelons que l'on écrit

$$\partial\{u=0\} = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

où

$$\mathcal{R} = \left\{X_0 \in \partial\{u=0\}, \Phi_{u,X_0}(0^+) = \alpha\right\},$$
$$\mathcal{S} = \left\{X_0 \in \partial\{u=0\}, \Phi_{u,X_0}(0^+) = 2\alpha\right\}.$$

Théorème 1.1 (Formule de monotonie pour les points singuliers)
Soit $v = \frac{1}{2}{}^tX \cdot Q \cdot X \geq 0$ où Q est une matrice $n \times n$ symétrique vérifiant trace$(Q) = 1$. Si u est une solution du problème de l'obstacle et si $X_0 \in \mathcal{S}$ alors la fonction

$$\Psi^v_{u,X_0}(r) := \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} (u(X_0 + \cdot) - v)^2 \quad \textit{est croissante en } r.$$

Remarque 1.2 *Lorsque cela ne sera pas nécessaire, on ommettra v dans l'expression $\Psi^v_{u,X_0}(r)$, en la notant simplement $\Psi_{u,X_0}(r)$.*

Preuve du Théorème 1.1.
On considère une fonction v vérifiant pour tout $r > 0$

$$\Phi_{v,0}(r) = 2\alpha = \Phi_{u,X_0}(0^+).$$

Ceci est en particulier vérifié par la fonction v du Théorème.
Soit alors

$$w = u(X_0 + \cdot) - v.$$

Par intégration par partie on calcule

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{u,X_0}(r) - \Phi_{u,X_0}(0^+)\\
&= \Phi_{u,X_0}(r) - \Phi_{v,0}(r)\\
&= \frac{1}{r^{n+2}}\int_{B_r} \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + \nabla v \cdot \nabla w + w\\
&\quad - \frac{1}{r^{n+3}}\int_{\partial B_r} w^2 + 2vw\\
&= \frac{1}{r^{n+2}}\int_{B_r} \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + w\,(1 - \Delta v)\\
&\quad - \frac{1}{r^{n+3}}\int_{\partial B_r} w^2 + \frac{1}{r^{n+3}}\int_{\partial B_r} rw\ n \cdot \nabla v - 2vw\\
&= \frac{1}{r^{n+2}}\int_{B_r} \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + w\,(1 - \Delta v)\\
&\quad - \frac{1}{r^{n+3}}\int_{\partial B_r} w^2 + \frac{1}{r^{n+3}}\int_{\partial B_r} w(X \cdot \nabla v - 2v)\\
&= \frac{1}{r^{n+2}}\int_{B_r} -\frac{1}{2}w\Delta w + w\,(1 - \Delta v)\\
&\quad + \frac{1}{r^{n+3}}\int_{\partial B_r} w(X \cdot \nabla v - 2v) + I
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
I \; &:= \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} \frac{1}{2} r w n \cdot \nabla w - w^2 \\
&= \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} \frac{1}{2} w r \frac{\partial w}{\partial r} - w^2 \\
&= \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^2}{4} \right) - w^2 \\
&= \frac{1}{4r^{n-2}} \int_{\partial B_r} \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(w^2 \right) - \frac{4}{r^5} w^2 \\
&= \frac{1}{4r^{n-2}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^2}{r^4} \right) \\
&= \frac{r}{4} \left\{ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^2}{r^4} \right) \right\} \\
&= \frac{r}{4} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{w^2}{r^4} \right\} \\
&= \frac{r}{4} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 \right\}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 \right\} \\
&= \frac{4}{r} \left(\Phi_{u,X_0}(r) - \Phi_{u,X_0}(0^+) \right) \\
&\quad + \frac{2}{r^{n+3}} \int_{B_r} \{ w \Delta w - 2w(1 - \Delta v) \} \\
&\quad - \frac{4}{r^{n+4}} \int_{\partial B_r} w (X \cdot \nabla v - 2v).
\end{aligned}
$$

Or d'après la formule de monotonie on a

$$\Phi_{u,X_0}(r) - \Phi_{u,X_0}(0^+) \geq 0$$

et par ailleurs le v choisi dans le Théorème est homogène de degré 2, donc

$$X \cdot \nabla v - 2v = 0$$

et vérifie

$$\Delta v = 1.$$

On calcule alors (avec u qui signifie ici $u(X_0 + \cdot)$)

$$w\Delta w = (u - v)\Delta(u - v) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & u > 0 \\ & & \\ v & \text{si} & u = 0 \end{array} \right| \quad \geq \quad 0.$$

D'où

$$\frac{d}{dr}\left\{ \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 \right\} \geq 0.$$

Ceci termine la preuve du Théorème.

Lemme 1.3 *Soit $u^0_{X_0}$ un blow-up limite de u en X_0 (celui-ci pouvant a priori dépendre de la sous-suite extraite). Alors on a*

$$\Psi^v_{u,X_0}(0^+) = \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} \left(u^0_{X_0} - v\right)^2.$$

Preuve du Lemme 1.3.
Remarquons que l'on a

$$\Psi_{u^\varepsilon_{X_0},0}(r) = \Psi_{u,X_0}(\varepsilon r).$$

Or pour une sous-suite extraite (ε'), on a la convergence en norme $C^{0,1}$ uniformément sur tous les compacts de $u^\varepsilon_{X_0}$ vers $u^0_{X_0}$, donc à r fixé on a

$$\Psi_{u^{\varepsilon'}_{X_0},0}(r) \longrightarrow \Psi_{u^0_{X_0},0}(r).$$

Par ailleurs par la monotonie de Ψ_{u,X_0}, on a

$$\Psi_{u,X_0}(\varepsilon' r) \longrightarrow \Psi_{u,X_0}(0^+).$$

On en tire l'égalité

$$\Psi_{u,X_0}(0^+) = \Psi_{u^0_{X_0},0}(r)$$

pour tout $r > 0$, ce qui termine la preuve du Lemme.

Corollaire 1.4 (Unicité des limites de blow-up pour les points singuliers) *Pour tout $X_0 \in \mathcal{S}$, il existe une unique matrice $n \times n$ symétrique Q_{X_0}, positive, vérifiant trace$(Q_{X_0}) = 1$ telle que la limite $u^0_{X_0}$ de tout blow-up $u^\varepsilon_{X_0}(X) = \dfrac{u(X_0 + \varepsilon X)}{\varepsilon^2}$, est unique et est donnée par*

$$u^0_{X_0} = \frac{1}{2}{}^t X \cdot Q_{X_0} \cdot X.$$

Preuve du Corollaire 1.4.
Supposons qu'il existe deux limites possibles v^1, v^2 obtenues par blow-up, c'est-à-dire telles qu'il existe deux sous-suites (ε') et (ε'') telles que

$$u^{\varepsilon'}_{X_0} \longrightarrow v^1$$

et

$$u^{\varepsilon''}_{X_0} \longrightarrow v^2.$$

On voit d'après le Lemme 1.3 que

$$\frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} (v^1 - v)^2 = \Psi^v_{u,X_0}(0^+) = \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} (v^2 - v)^2.$$

En faisant le choix $v = v^1$, on obtient le résultat.

2 Dépendance continue du blow-up limite

Rappelons que $\mathcal{S}$ est fermé.

Proposition 2.1 (Continuité des limites de blow-up pour les points singuliers) *L'application*

$$\begin{array}{rccc} Q: & \mathcal{S} & \longrightarrow & M_{n\times n} \\ & X_0 & \longmapsto & Q_{X_0} \end{array}$$

est continue.

Corollaire 2.2 *Il existe un module de continuité σ (c'est-à-dire σ est continu, croissant et vérifie $\sigma(0) = 0$) tel que*

$$\forall X_0, Y_0 \in \mathcal{S}, \quad |Q_{X_0} - Q_{Y_0}| \leq \sigma\left(|X_0 - Y_0|\right).$$

Preuve du Corollaire 2.2.
Cela résulte de l'uniforme continuité sur les compacts.

Preuve de la Proposition 2.1.
Soit $X_0^n \longrightarrow X_0$. Etant donné $\varepsilon > 0$, fixons $r > 0$ tel que

$$\Psi_{u,X_0}(r) \leq \Psi_{u,X_0}(0^+) + \varepsilon.$$

Remarquons que à r fixé, on a

$$\Psi_{u,X_0^n}(0^+) \leq \Psi_{u,X_0^n}(r) \longrightarrow \Psi_{u,X_0}(r).$$

D'où

$$\limsup_{n\to+\infty} \Psi_{u,X_0^n}(0^+) \le \Psi_{u,X_0}(0^+) + \varepsilon$$

où ε est arbitraire, ce qui signifie que

$$\limsup_{n\to+\infty} \Psi_{u,X_0^n}(0^+) \le \Psi_{u,X_0}(0^+)$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{1}{2} {}^tX \cdot Q_{X_0^n} \cdot X - v\right)^2$$

$$\le \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{1}{2} {}^tX \cdot Q_{X_0} \cdot X - v\right)^2.$$

Le choix $v = \frac{1}{2} {}^tX \cdot Q_{X_0} \cdot X$ implique

$$Q_{X_0^n} \longrightarrow Q_{X_0}$$

ce qui termine la preuve de la Proposition.

Proposition 2.3 *Il existe un module de continuité σ tel que pour tout $X_0 \in \mathcal{S}$, pour tout $r > 0$, on a*

$$0 \le \Psi^v_{u,X_0}(r) \le \sigma^2(r) \quad \textit{pour le choix} \quad v = u^0_{X_0}.$$

Preuve de la Proposition 2.3.
Par contradiction.

Définition 2.4 *Soit pour $k = 0, ..., n-1$*

$$\mathcal{S}_k = \{X_0 \in \mathcal{S}, \quad \textit{dim Ker } Q_{X_0} = k\}$$

où dim Ker Q_{X_0} est la dimension du noyau de la matrice Q_{X_0}. Ainsi

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{S}_k.$$

Proposition 2.5 *Pour chaque k, l'ensemble*

$$F_k = \bigcup_{j=k}^{n-1} \mathcal{S}_j$$

est fermé.

Preuve de la Proposition 2.5.
Soit $X_0^n \in F_k$ avec $X_0^n \longrightarrow X_0 \in \mathcal{S}$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} Q_{X_0^n} = Q_{X_0}.$$

D'où

$$k \leq \lim \sup_{n\to+\infty} \left(\dim \text{ Ker } Q_{X_0^n}\right) \leq \dim \text{ Ker } Q_{X_0}.$$

Ceci prouve que $X_0 \in F_k$.

Proposition 2.6 (Approximation C^1 de l'ensemble singulier)
Il existe un module de continuité σ tel que pour tout $X_0, Y_0 \in \mathcal{S}_{n-1} = F_{n-1}$, on a

$$\frac{dist\,(Y_0, X_0 + Ker\ \ (Q_{X_0}))}{|Y_0 - X_0|} \leq \sigma\left(|X_0 - Y_0|\right).$$

Preuve de la Proposition 2.6.
Supposons qu'il existe une suite de points $X_0^n, Y_0^n \in \mathcal{S}_{n-1}$ tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\text{dist}\left(Y_0^n, X_0^n + \text{Ker }\ \left(Q_{X_0^n}\right)\right)}{|Y_0^n - X_0^n|} \geq \delta > 0 \\ \\ |Y_0^n - X_0^n| \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que

$$X_0^n, Y_0^n \longrightarrow X_0 \in \mathcal{S}_{n-1}$$

et que (pour un choix judicieux du système de coordonnées)

$$\frac{1}{2}{}^t X \cdot Q_{X_0} \cdot X = \frac{1}{2} x_1^2.$$

Soit alors

$$\varepsilon_n = |Y_0^n - X_0^n| \longrightarrow 0$$

et

$$\nu^n = \frac{Y_0^n - X_0^n}{|Y_0^n - X_0^n|} \longrightarrow \nu \in \mathbf{S}^{n-1}$$

où la convergence des ν^n a lieu encore une fois quitte à extraire une sous-suite. On considère alors le blow-up

$$u_{X_0^n}^{\varepsilon_n}.$$

Le problème se réécrit ainsi :

$$\begin{cases} \text{dist}\left(\nu^n, \text{Ker }\ \left(Q_{X_0^n}\right)\right) \geq \delta > 0 \\ \\ u_{X_0^n}^{\varepsilon_n}(\nu^n) = 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left(\Psi^{u^0_{X_0}}_{u^{\varepsilon_n}_{X^n_0},0}(r)\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\Psi^{u^0_{X_0}}_{u,X^n_0}(\varepsilon_n r)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\Psi^{u^0_{X^n_0}}_{u,X^n_0}(\varepsilon_n r)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\Psi^{u^0_{X_0}}_{u^0_{X^n_0},0}(\varepsilon_n r)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sigma(\varepsilon_n r) + C\sigma(\varepsilon_n).\end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$u^{\varepsilon_n}_{X^n_0} \longrightarrow u^0_{X_0}.$$

En utilisant le Lemme (dont la preuve et le sens évident est laissée au lecteur)

Lemme 2.7 *Ker* $Q_{X^n_0} \longrightarrow$ *Ker* Q_{X_0}.

On obtient

$$\begin{cases} \operatorname{dist}(\nu, \operatorname{Ker}\ (Q_{X_0})) \geq \delta > 0 \\ \\ u^0_{X_0}(\nu) = 0. \end{cases}$$

Le deuxième ligne implique que

$$\frac{1}{2}(\nu_1)^2 = 0$$

alors que la première ligne implique que $\nu_1 \neq 0$. Contradiction.

3 Description de l'ensemble singulier

3.1 Rappel du Théorème d'extension de Whitney

Théorème 3.1 (Théorème d'extension de Whitney)
Soit A un compact de $I\!R^m$ et deux applications

$$f : A \longrightarrow I\!R^p,$$

$$Tf : A \longrightarrow I\!R^{m\times p},$$

telles que

$$\limsup_{a,b\in A, |a-b|\to 0} |Tf(b) - Tf(a)| = 0$$

et

$$\limsup_{a,b\in A, |a-b|\to 0} \frac{f(b) - f(a) - Tf(a)\cdot(b-a)}{|b-a|} = 0.$$

Alors il existe une application C^1 :

$$g : I\!R^m \longrightarrow I\!R^p$$

telle que

$$g_{|A} = f, \quad (\nabla g)_{|A} = Tf.$$

Ce Théorème est prouvé dans Federer [74] Théorème 3.1.14 page 225.

3.2 Application à l'étude de l'ensemble singulier

Proposition 3.2 *Soit $X_0 \in \mathcal{S}_{n-1}$. Alors il existe un rayon $r_{X_0} > 0$ et un compact A de la $(n-1)$-dimensionnelle boule $B^{n-1}_{r_{X_0}}(0) \subset Ker\ Q_{X_0} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$, et il existe une application*

$$f : A \longrightarrow (Ker\ Q_{X_0})^{\perp} \simeq \mathbb{R}$$

(où $(Ker\ Q_{X_0})^{\perp}$ est la droite orthogonale à l'hyperplan formé par le noyau de la matrice Q_{X_0}) tel que en définissant

$$\begin{array}{rccl} \psi : & A & \longrightarrow & B_{r_{X_0}}(X_0) \subset \mathbb{R}^n \\ & x' & \longmapsto & \psi(x') = X_0 + (x', f(x')) \end{array}$$

on a

$$\mathcal{S}_{n-1} \cap B_{r_{X_0}}(X_0) = \psi(A).$$

Preuve de la Proposition 3.2.
Cette Proposition est un Corollaire de la Proposition 2.6, en définissant A par la projection orthogonale sur le noyau Ker Q_{X_0}, de la façon suivante :

$$A = \mathrm{Proj}_{|\mathrm{Ker}\ Q_{X_0}} \left(\mathcal{S}_{n-1} \cap B_{r_{X_0}}(X_0)\right).$$

Proposition 3.3 *On définit Tf sur A par*

$$Tf(x') = \frac{n_{x'}}{n_y}$$

où

$$\begin{cases} n = (n_{x'}, n_y) \in Ker\ Q_{X_0} \times (Ker\ Q_{X_0})^{\perp} \\ |n| = 1 \\ \mathbb{R} \cdot n = \left(Ker\ Q_{\psi(x')}\right)^{\perp}. \end{cases}$$

Alors (f, Tf) satisfait aux hypothèses du Théorème 3.1 d'extension de Whitney sur A.

Preuve de la Proposition 3.3.
Cette Proposition est un Corollaire de la Proposition 2.6, en remarquant que $n = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(\nabla f, 1)$ lorsque f est régulier.

Corollaire 3.4 *$\mathcal{S}_{n-1}$ est contenu dans une hypersurface C^1.*

Remarque 3.5 *Une analyse similaire permet de montrer que les $\mathcal{S}_k$ sont localement contenus dans des variétés C^1 de dimension k.*

Conclusion

La recherche de propriétes qualitatives sur l'ensemble des points singuliers se rencontre dans beaucoup d'autres domaines. Suivant les cas des techniques similaires peuvent s'appliquer ou pas. Citons en vrac :

- Les surfaces minimales et mouvement par courbure moyenne (voir par exemple [84, 90, 141, 142, 21, 28])
- Le problème de Mumford-Shah en traitement d'images (voir par exemple [29, 61, 65, 67, 80, 81, 114, 129, 130])
- Les problèmes de fissures (voir par exemple [1, 20, 27, 79, 110])
- Les problèmes à frontières libres à deux phases
- Le problème de l'obstacle d'évolution
- L'équation de la chaleur non linéaire
- Les équations de Navier-Stokes
- L'étude des singularités des systèmes elliptiques non linéaires
- etc.

Chapitre 8

Etude des points réguliers

1 Exemple de non unicité des limites de blow-up

On regarde le problème de l'obstacle (un peu plus général que précédemment) sur un ouvert Ω, pour une fonction f continue sur Ω :

$$\begin{cases} \Delta u = f \cdot 1_{\{u>0\}} \\ \\ u \geq 0 \\ \\ u \in C^1, \quad ||D^2u||_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Contre-exemple (cf. Blank [25, 26])
Il existe une fonction f continue, et une solution u de (1.1), et un point $X_0 \in \Omega$, régulier au sens de notre définition avec $f(X_0) = 1$, tel que les limites $u^0_{X_0}$ des blow-up $u^\varepsilon_{X_0}(X) = \frac{u(X_0+\varepsilon X)}{\varepsilon^2}$ ne sont pas uniques (cas d'une spirale infinie).

Cela montre que l'unicité des limites de blow-up est délicate (et peut dépendre de la régularité de f).

2 Unicité des limites de blow-up et conséquences

A notre connaissance, il n'y a pas de méthode générale et simple de preuve de l'unicité des limites de blow-up pour les points réguliers.
Néanmoins il est possible de prouver le résultat suivant (cf. Caffarelli [42], Weiss [162]) :

Théorème 2.1 (Unicité des limites de blow-up pour les points réguliers)
Si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ pour un $\alpha \in (0,1]$, et si X_0 est un point régulier d'une solution u de (1.1), alors la limite $u^0_{X_0}$ des blow-up $u^\varepsilon_{X_0}(X) = \frac{u(X_0+\varepsilon X)}{\varepsilon^2}$ est unique.

Paçons-nous dans le cas où $f \equiv 1$
Ainsi on a

$$u^0_{X_0} = \frac{1}{2}\left(\max(0, < X, \nu_{X_0} >\right)^2$$

où le vecteur unitaire ν_{X_0} ne dépend que du point X_0 (et non pas de la sous-suite extraite).

Il est alors possible d'en déduire (comme cela a été fait dans le cadre des points singuliers) :

Corollaire 2.2 (Continuité des limites de blow-up pour les points réguliers)
L'application

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathbf{S}^{n-1} \\ \\ & X_0 & \longmapsto & \nu_{X_0} \end{array}$$

est continue.

Un raisonnement similaire à celui utilisant le Théorème d'extension de Whitney dans le cadre des points singuliers, permet de déduire le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Régularité de la frontière libre)
La partie $\mathcal{R}$ de la frontière libre est localement une hypersurface C^1.

Cela justifie en particulier la définition de l'ensemble $\mathcal{R}$ des points réguliers.

3 Vers plus de régularité sur la frontière libre

On a le résultat suivant

Théorème 3.1 (Analyticité de la frontière libre)
Lorsque $f \equiv 1$, l'ensemble $\mathcal{R}$ de la frontière libre est une hypersurface analytique.

Idée de la démonstration
Supposons que la limite du blow-up en l'origine soit

$$u_0^0(x) = \frac{1}{2}(\max(0, x_1))^2$$

avec $x = (x_1, ..., x_n)$. Kinderlehrer, Nirenberg et Spruck [106] ont introduit pour ce problème la transormation de l'Hodographe-Legendre :

$$u(x) \longmapsto v(y)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} v(y) = u(x) - x_1 y_1 \\ \\ y = (y_1, ..., y_n) \quad \text{avec} \quad y_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad y_i = x_i, \quad i = 2, ..., n. \end{array} \right.$$

Ainsi la frontière libre est envoyée localement sur l'ensemble $\{y_1 = 0\}$, et l'ensemble $\{u > 0\}$ localement sur $\{y_1 > 0\}$. Il est possible de traduire l'EDP sur u en une EDP

sur v. La théorie de la régularité des solutions d'EDP elliptiques avec conditions sur le bord $y_1 = 0$ s'applique et donne une certaine régularité sur la solution v.
On remarque par dérivation que

$$x_1 = -\frac{\partial v}{\partial y_1}.$$

On conclut que l'équation de la frontière libre est

$$x_1 = -\frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1 = 0, x_2, ..., x_n)$$

et donc la régularité de la frontière libre est celle de ∇v.

Remarque 3.2 *Pour finir, signalons une méthode alternative pour prouver l'existence de frontières libres régulières par perturbations : il est possible d'utiliser le Théorème d'inversion locale de Nash et Moser qui s'applique dans l'espace des paramétrisations C^∞ de la frontière libre (cf. par exemple Hamilton [86] pour une telle utilisation, et les références suivantes : [2, 66, 91, 131, 132, 133, 134, 137, 153, 154, 155, 164]).*

Bibliographie

[1] Acerbi, E. ; Fonseca, I. ; Fusco N. *Regularity Results for Equilibria in a Variational Model for Fracture*, Proc. Roy. Soc. Edimburgh Sect. A **127** (5), 889-902, (1997).

[2] Alinhac, S. ; Gérard, P., *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* Interedi-tions / Editions du CNRS (1991).

[3] Alt, H.W., *The fluid flow through porous media. Regularity of the free surface*, Manuscripta Math. **21**, 255-272, (1977).

[4] Alt, H.W., *Strömungen durch inhomogene poröse Medien mit freiem Rand*, J. Reine Angew. Math. **305**, 89-115, (1979).

[5] Alt, H.W. ; Caffarelli, L.A., *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, J. Reine Angew. Math. **105**, 105-144, (1981).

[6] Alt, H.W. ; Caffarelli, L.A. ; Friedman, A., *Axially symetric jet flows*, Arch. Rat. Mech. Anal. **81**, 97-149, (1983).

[7] Alt, H.W. ; Caffarelli, L.A. ; Friedman A., *The dam problem with two fluids*, Comm. Pure Appl. Math. **27**, 601-645, (1984).

[8] Alt, H.W. ; Caffarelli, L.A. ; Friedman A., *Variational Problems with two phases and their free boundaries*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (2), 431-461, (1984).

[9] Alt, H.W. ; Gilardi, G., *The behaviour of the free boundary for the dam problem*, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa **9**, 571-626, (1981).

[10] Alt, H.W. ; Phillips, D., *A free boundary problem for semilinear elliptic equations*, J. Reine Angew. Math. **368**, 63-107, (1986).

[11] Alt, H.W. ; van Duijn, C.J., *A stationary flow of fresh and salt groundwater in a coastal aquifer*, Nonlinear Anal. TMA **14** (8), 625-656, (1990).

[12] Alt, H.W. ; Van Duijn, C.J., *A free boundary problem involving a cusp Part I : Global analysis*, European J. Appl. Math. **4**, 39-63, (1993).

[13] Alt, H.W. ; Van Duijn, C.J., *A free boundary problem involving a cusp Part II : Local Analysis*, Adv. Math. Sci. Appl. **8**, no. 2, 845-900, (1998).

[14] Alt, H.W. ; Van Duijn, C.J., *A free boundary problem involving a cusp : Breakthrough of Salwater*, Interfaces Free Bound. **2**, no. 1, 21-72, (2000).

[15] Athanasopoulos, I. ; Caffarelli, L.A., *A Theorem of Real Analysis and its Applications to Free Boundary Problems*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (5), 499-502, (1985).

[16] Athanasopoulos, I. ; Caffarelli, L.A. ; Salsa, S., *Caloric functions in Lipschitz domains and the regularity of solutions to phase transition problems*, Ann. of Math. **143**, 413-434, (1996).

[17] Athanasopoulos, I. ; Caffarelli, L.A. ; Salsa, S., *Regularity of the free boundary in parabolic phase-transition problems*, Acta Math. **176**, 245-282, (1996).

[18] Athanasopoulos, I. ; Caffarelli, L.A. ; Salsa, S., *Phase Transition Problems of Parabolic Type : Flat Free Boundaries Are Smooth*, Comm. Pure Appl. Math. **51**, 77-112, (1998).

[19] Baderko, E.A., *Schauder estimates for oblique derivative problems*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **326**, 1377-1380, (1998).

[20] Barenblatt, G.I., *Fracture in solids as a free boundary problem*, Procedings of Toledo, Conference on free boundary problems, Coll. Free boundary Problems : theory and application (Toledo, 1993), 20-39, Pitman Res. Notes Math. Ser. **323**. Publication : Longman Sci.Techn., Harlow, (1995).

[21] Barles, G. ; Souganidis, P.E. , *A New Approach to Front Propagation Problems : Theory and Applications*, Arch. Rational Mech. Anal. **141**, no. 3, 237-296, (1998).

[22] Beckner, W. ; Kenig, C. ; Pipher, J., in preparation.

[23] Berestycki, H. ; Bonnet, A. ; van Duijn, C.J., *Flots stationnaires d'eau salée et d'eau douce en milieux poreux dans des couches aquifères*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317**, no. 3, 255-260, (1993).

[24] Berestycki H. ; Nirenberg L. ; Varadhan S.R.S., *The Principle Eigenvalue and Maximum Principle for Second-Order Elliptic Operators in General Domains*, Comm. Pure Appl. Math. **47**, 47-92, (1994).

[25] Blank, I., *Sharp Results for the Regularity and Stability of the Free Boundary in the Obstacle Problem*, Indiana Univ. Math. J. **50**, no. 3, 1077-1112, (2001).

[26] Blank, I., communication personnelle.

[27] Blat, J. ; Morel, J.-M., *Elliptic problems in image segmentation and their relation to fracture theory*, Proceedings of the Int. Conf. on nonlinear elliptic on parabolic problems, Nancy 88, Longman, (1989).

[28] Bonami, A. ; Hilhorst, D. ; Logak, E., *Modified motion by mean curvature : local existence and uniqueness and qualitative properties*, Differential Integral Equations **13**, no. 10-12, 1371-1392, (2000).

[29] Bonnet, A., *On the regularity of edges in image segmentation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (4), 485-528, (1996).

[30] Bonnet, A. ; Kamin, S., *A stationary flow in a strip*, Nonlinear Anal. TMA **35** (6), 765-780, (1999).

[31] Bonnet A., Monneau R., *Distribution of vortices in a type II superconductor as a free boundary problem : Existence and regularity via Nash-Moser theory*, Interfaces and Free Boundaries **2**, 181-200 (2000).

[32] Bonnet A., Monneau R., *On the Mushy Region Arising Between Two Fluids in a Porous Medium*, Nonlinear Analysis, Real World and Applications, Vol. 5, Issue 1, (2004), 159-182.

[33] Bonorino, L., *Regularity of the free boundary for some elliptic and parabolic problems*, NYU Dissertation, (1999).

[34] Brauner, C.M. ; Hulshof J. ; Lunardi A., *A general approach to stability in free boundary problems*, J. Differential Equations **164**, no. 1, 16-48, (2000).

[35] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, (1993).

[36] Brézis, H. ; Kinderlehrer, D., *The Smoothness of Solutions to Nonlinear Variational Inequalities*, Indiana Univ. Math. J. **23** (9), 831-844, (1974).

[37] Brezis, H. ; Stampacchia, G., *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Soc. Math. France **96**, 153-180, (1968).

[38] Cabré, X. ; Caffarelli, L.A., *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Colloquium Publications. Amer. Math. Soc. **43**, (1995).

[39] Caffarelli, L.A., *Free boundary problems : a survey*, (1985).

[40] Caffarelli, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (5), 541-545, (1986).

[41] Caffarelli, L.A., *Free boundary problem in higher dimensions*, Acta Math. **139**, 155-184, (1977).

[42] Caffarelli, L.A., *Compactness Methods in Free Boundary Problems*, Comm. Partial Differential Equations **5**(4), 427-448, (1980).

[43] Caffarelli, L.A., *A remark on the Hausdorff measure of a free boundary, and the convergence of coincidence sets*, Boll. Un. Mat. Ital. A **18** (5), 109-113, (1981).

[44] Caffarelli, L.A., *The Obstacle Problem revisited*, J. Fourier Anal. Appl. **4**, 383-402, (1998).

[45] Caffarelli, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries, Part I : Lipschitz Free Boundaries are* $C^{1,\alpha}$, Rev. Mat. Iberoamericana **3** (2), 139-162, (1987).

[46] Caffarelli, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries, Part II : Flat Free Boundaries are Lipschitz*, Comm. Pure Appl. Math. **42**, 55-78, (1989).

[47] Caffarelli, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries, Part III : Existence Theory, Compactness, and Dependence on X*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **15** (4), 583-602, (1989).

[48] Caffarelli, L.A. ; Fabes, E. ; Mortola, M. ; Salsa, S., *Boundary behavior of non negative solution of elliptic operators in divergence form*, Indiana Univ. Math. J. **30**, 621-640, (1981).

[49] Caffarelli, L.A. ; Kenig, C.E. ; Jerison, D., *Some new monotonicity theorems with applications to free boundary problems*, preprint.

[50] Caffarelli, L.A. ; Kinderlehrer, D., *Potential methods in variational inequalities*, J. Anal. Math. **37**, 285-295, (1980).

[51] Caffarelli, L.A. ; Rivière, N.M., *On the Rectifiability of Domains with Finite Perimeter*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **12**, 177-186, (1975).

[52] Caffarelli, L.A. ; Rivière, N.M., *Smoothness and Analyticity of Free Boundaries in Variational Inequalities*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **3** (4), 289-310, (1975).

[53] Caffarelli, L.A. ; Rivière, N.M., *Asymptotic behaviour of free boundaries at their singular points*, Ann. of Math. **106**, 309-317, (1977).

[54] Caffarelli, L.A. ; Rivière, N.M., *The smoothness of the elastic-plastic free boundary of a twisted bar*, Proc. Amer. Math. Soc. **63**(1), 56-58, (1977).

[55] Caffarelli, L.A. ; Salazar, J., *Solutions of fully nonlinear elliptic equations with patches of zero gradient : existence, regularity and convexity of level curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, no. 8, 3095-3115, (2002).

[56] Caffarelli, L.A. ; Spruck, J., *Convexity properties of solutions to some classical variational problems*, Comm. Partial Differential Equations **7** (11), 1337-1379, (1982).

[57] Carrillo, J., *On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem*, Nonlinear Anal. TMA, **22** (5), 573-607, (1994).

[58] Carrillo, J., *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **147**, no. 4, 269-361, (1999).

[59] Carillo-Menendez, J. ; Chipot, M., *On the dam problem*, J. Differential Equations **45**, 234-270, (1982).

[60] Carillo-Menendez, J. ; Chipot, M., *Sur l'unicité de la solution du problème de l'écoulement à travers une digue*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **292**, 191-194, (1981).

[61] Chambolle, A., *Finite-Differences Discretizations of the Mumford-Shah Functional*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **33**, no. 2, 261-288, (1999).

[62] Chipot, M., *Variational inequalities and flow in porous media*, Springer-Verlag 52, ed. (1982/1984).

[63] Craig, W. ; Sternberg, P., *Symmetry of free-surface flows*, Arch. Rational Mech. Anal. **118**, 1-36, (1992).

[64] Dahlberg, B.E.J., *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rational Mech. Anal. **65**, 278-288, (1977).

[65] David, G., *C^1 arcs for minimizers of the Mumford-Shah functional*, SIAM J. Appl. Math. **56** (3), 783-888, (1996).

[66] Dervieux, A., *A perturbation study of the obstacle problem by means of a generalized implicit function theorem*, Ann. Mat. Pura Appl. **127**, 321-364, (1981).

[67] De Giorgi, E., *Free Discontinuity Problems in Calculus of Variations*, in Frontiers in pure and applied Mathematics, a collection of papers dedicated to J.-L. Lions on the occasion of his 60th birthday, R. Dautray ed., 55-61, North Holland, (1991).

[68] Diaz, J.I. ; Kawohl, B., *On convexity and Starshapedness of level Sets for Some Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems on Convex Rings*, J. Math. Anal. Appl. **177**, 263-286, (1993).

[69] Dolbeault J., Monneau R., *Estimations de convexité pour des équations elliptiques non-lineaires et application à des problèmes de frontière libre*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **331**, 771-776, (2000).

[70] Dolbeault J., Monneau R., *Convexity Estimates for Nonlinear Elliptic Equations and Application to Free Boundary Problems*, Ann. I.H. Poincaré, Analyse Non Linéaire, 19 (6), 903-926 (2002).

[71] Dolbeault J., Monneau R., *On a Liouville type theorem for isotropic homogeneous fully non-linear elliptic equations in dimension two*, Annali della Scuola Normale Superior di Pisa, Classe di Scienze (5) Vol. II (2003), pp. 181-197.

[72] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics **19**, Amer. Math. Soc., (1998).

[73] Falconer, K.J., *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, (1985).

[74] Federer, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, (1969).

[75] Frehse J., *On the Regularity of the Solution of a Second Order Variational Inequality*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **6** (4), 312-315, (1972).

[76] Friedman, A., *Variational Principles and Free Boundary Problems*, Pure and applied mathematics, ISSN 0079-8185, a Wiley-Interscience publication, (1982).

[77] Friedman, A. ; Phillips, D., *The free boundary of a semilinear elliptic equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **282**, 153-182, (1984).

[78] Friedman, A. ; Pozzi G.A., *The free boundary for elastic-plastic torsion problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **257** (2), 411-425, (1980).

[79] Fonseca, I., *Interfacial energy and the Maxwell rule*, Arch. Rational Mech. Anal. **106** (1), 63-95, (1989).

[80] Fonseca, I. ; Fusco, N., *Regularity results for anisotropic image segmentation models*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **24** (3), 463-499 (1997).

[81] Fonseca, I. ; Francfort, G., *Relaxation in BV versus quasiconvexification in $W^{1,p}$; a model for the interaction between fracture and damage*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4**, 407-446, (1995).

[82] Gabriel, R., *A result concerning convex level surfaces of 3-dimensional harmonic functions*, J. London Math. Soc. **32**, 286-294, (1957).

[83] GILBARG, D. ; TRUDINGER, N.S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag, (1998).

[84] GIUSTI, E., *Minimal surfaces and functions of bounded variations*, Birkhäuser, Boston, (1984).

[85] HAMEL F., MONNEAU R., *Existence and uniqueness for a free boundary problem arising in combustion theory*, Interfaces and Free Boundaries **4**, 167-210, (2002).

[86] HAMILTON, R.S., *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. **7**, 65-222, (1982).

[87] HENROT, A. ; SHAHGHOLIAN, H., *Convexity of free boundaries with bernoulli type boundary conditions*, Nonlinear Anal. TMA **28** (5), (1997).

[88] HENROT, A. ; SHAHGHOLIAN, H., *Existence of classical solutions to a free boundary problem for the p-Laplace operator : (I) the exterior convex case*, preprint.

[89] HENROT, A. ; SHAHGHOLIAN, H., *Existence of classical solutions to a free boundary problem for the p-Laplace operator : (II) the interior convex case*, preprint.

[90] ILMANEN, T., *Lectures on Mean Curvature Flow and Related equations*, Lecture Notes ICTP, Trieste, (1995).

[91] ISAKOV, V., *Inverse theorems concerning the smoothness of potentials*, J. Differential Equations **11**, 50-56, (1976).

[92] JERISON D. ; KENIG C., *Boundary behaviour of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. Math. **46** (1), 80-147, (1982).

[93] KAWOHL, B., *When are solutions to nonlinear elliptic boundary value problems convex ?*, Comm. Partial Differential Equations **10**, 1213-1225, (1985).

[94] KAWOHL, B., *On the convexity and symmetry of solutions to an elliptic free boundary problem*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **42**, 57-68, (1987).

[95] KAWOHL, B., *On the convexity of level sets for elliptic and parabolic exterior boundary value problems*, Potential theory (Prague, 1987), Plenum, New York-London, 153-159, (1988).

[96] KAWOHL, B., *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE*, Lecture Notes in Math. **1150**, (1985).

[97] KAWOHL, B., *Geometrical properties of level sets of solutions to elliptic problems*, Proc. Sympos. Pure Math. **45**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, 25-36, (1986).

[98] KENIG, C.E., *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **83**. American Mathematical Society, (1994).

[99] KENIG, C.E. ; TORO, T, *Harmonic measure on locally flat domains*, Duke Math. J. **87** (3), 509-551, (1997).

[100] KENIG, C.E. ; TORO, T, *Harmonic measures and Poisson Kernels*, preprint.

[101] KINDERLEHRER, D., *The Free Boundary Determined by the Solution to a Differential Equation*, Indiana Univ. Math. J. **25** (2), 195-208, (1976).

[102] KINDERLEHRER, D., *The coincidence Set of Solutions of Certain Variational Inequalities*, Arch. Rational Mech. Anal. **40**, 231-250, (1971).

[103] KINDERLEHRER, D., *How a minimal surface leaves an obstacle*, Acta. Math. **130**, 221-242, (1973).

[104] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L., *Regularity in free boundary problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **4**, 373-391, (1977).

[105] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L. ; SPRUCK, J., *Régularité dans les les problèmes elliptiques à frontière libre*, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, **286**, 1187-1190, (1978).

[106] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L. ; SPRUCK, J., *Regularity in elliptic free boundary problems I*, J. Anal. Math. **34**, 86-119, (1978).

[107] Kinderlehrer, D. ; Nirenberg, L. ; Spruck, J., *Regularity in elliptic free boundary problems II : Equations of higher order*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **4** (6), 637-683, (1979).

[108] Kinderlehrer, D. ; Stampacchia G., *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York, (1980).

[109] Kinderlehrer, D. ; Stampacchia G., *A free boundary problem in potential theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25**, 323-344, (1975).

[110] Knowles, J.K., *A note on the energy release rate in quasi-static elastic crack propagation*, SIAM J. Appl. Math. **41**, 401-412, (1981).

[111] Ladyshenskaya, O.A. ; Ural'tseva, N.N., *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, New York : Academic Press, (1968).

[112] Laurence, P. ; Stredulinsky, E., *Existence of Regular Solutions with Levels for Semilinear Elliptic Equations with Nonmonotone L^1 Nonlinearities*, Indiana Univ. Math. J. **39** (4), 1081-1114, (1990).

[113] Lee, Ki-ahm, *Obstacle problem for nonlinear second-order elliptic operator*, PhD thesis.

[114] Leger, J.C., *Flatness and Finitness in the Mumford-Shah problem*, J. Math. Pures Appl. *78*, 431-459, (1999).

[115] Lewy, H., *On the reflection laws of second order differential equations in two independent variables*, Bull. Amer. math. Soc. **65**, 37-58, (1959)

[116] Lewy, H., *On minimal Surfaces with Partially Free Boundary*, Comm. Pure Appl. Math. **4**, 1-13, (1951).

[117] Lewy, H., *On a free boundary problem in two dimensions*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **34** (3), 325-336, (1986).

[118] Lewy, H. ; Stampacchia, G., *On the Regularity of the Solution of a Variational Inequality*, Comm. Pure Appl. Math. **22**, 153-188, (1969).

[119] Lewy, H. ; Stampacchia, G., *On the smoothness of superharmonics which solve a minimum problem*, J. Anal. Math. **23**, 227-236, (1970).

[120] Lewy, H. ; Zhiyuan, T., *On free boundary problems in two dimensions*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **34**, 325-336, (1985).

[121] Lin, F.H., an unpublished course at Courant Institute of Mathematical Sciences, (1990).

[122] Littman, W. ; Stampacchia, G. ; Weinberger, H.F., *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **17** (3), 43-77, (1963).

[123] McNabb, A., *Strong Comparison Theorems for Elliptic Equations of Second Order*, J. of Math. and Mechanics **10** (3), 431-440, (1961).

[124] Mallet-Paret, J., *Generic unfoldings and normal forms of some singularities arising in th eobstacle problem*, Duke Math. J. **46** (3), 645-683, (1979).

[125] Monneau R., *Problèmes de frontières libres, EDP elliptiques non linéaires et applications en combustion, supraconductivité et élasticité*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, (1999).

[126] Monneau R., *A Brief Overview on the Obstacle Problem*, in Proceedings of the Third European Congress of Mathematics, Barcelona, (2000) : Progress in Mathematics. **202**, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, (2001).

[127] Monneau R., *On the Number of Singularities for the Obstacle Problem in Two Dimensions*, Journal of Geometric Analysis, 13 (2), (2003), 359-389.

[128] Monneau R., *On the Regularity of a Free Boundary for a Nonlinear Obstacle Problem Arising in Superconductor Modelling*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, **13** (6), no. 2, 289-311, (2004).

[129] Morel, J.-M., *The Mumford-Shah conjecture in image processing*, Sem. N. Bourbaki, exposé 813, (1995/96).

[130] Morel, J.-M., Solimini, S., *Variational methods in image segmentation*, Birkhäuser, Boston, (1994).

[131] Moser, J., *A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **47**, 1824-1831, (1961).

[132] Moser, J., *A rapidly convergent iteration method and non linear partial differential equations I*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **20**, 265-315, (1966).

[133] Moser, J., *A rapidly convergent iteration method and non linear partial differential equations II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **20**, 449-535, (1966).

[134] Nash, J., *The imbedding problem for Rieman manifolds*, Ann. of Math. **63**, 20-63, (1956).

[135] Phillips, D., *A Minimization Problem and the Regularity of solutions in the Presence of a Free Boundary*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1), (1983).

[136] Phillips, D., *Hausdorff measure estimates of a free boundary for a minimum problem*, Comm. Partial Differential Equations **8** (13), 1409-1454, (1983).

[137] Plotnikov, P.I., *A variant of the Nash-Moser theorem*, Dinamika Sploshn. Sredy **162**, 97-107, (1978).

[138] Proter, M.H. ; Weinberger, H.F., *Maximum Principles in Differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1967).

[139] Redondo, J.C., *The penalized obstacle problem. I. Lipschitz regularity of level sets*, Duke Math. J. **69** (1), 43-65, (1993).

[140] Redondo, J.C., *The penalized obstacle problem. I. $C^{1,\alpha}$ regularity of level sets*, Duke Math. J. **69** (1), 67-85, (1993).

[141] Reifenberg, E.R., *An epiperimetric inequality related to the analyticity of minimal surfaces*, Ann. Math. **80**, 1-14, (1964).

[142] Reifenberg, E.R., *Solution of the Plateau Problem for m-dimensional surfaces of varying topological type*, Acta Math. **104**, 1-92, (1960).

[143] Rodrigues, J.F., *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, North-Holland, (1987).

[144] Rodrigues, J.-F. ; Yi, F., *On a two-phase continuous casting Stefan problem with nonlinear flux*, European J. Appl. Math. **1**, 259-278, (1990).

[145] Rodrigues, J.-F. ; Zaltzmann, B., *On classical solutions of the two-phase steady-state Stefan problem in strips*, Nonlinear Anal. TMA **19** (3), 207-208, (1992).

[146] Rodrigues, J.-F. ; Zaltzmann, B., *Regular solutions of a Stefan problem in strips*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **172**, 165-189, (1997).

[147] Sandier, E. ; Serfaty, S., *A Rigorous Derivation of a Free-Boundary Problem Arising in Superconductivity*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **33**(4), no. 4, 561-592, (2000).

[148] Schaeffer, D.G., *An Example of Generic Regularity for a Non-Linear Elliptic Equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **57**, 134-141, (1974).

[149] Schaeffer, D.G., *A Stability Theorem for the Obstacle problem*, Adv. Math. **16**, 34-47, (1975).

[150] Schaeffer, D.G., *Some Examples of Singularities in a Free Boundary*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **4** (4), 131-144, (1976).

[151] Schaeffer, D.G., *The capacitor problem*, Indiana Univ. Math. J. **24**, 1143-1167, (1975).

[152] Schaeffer, D.G., *One-sided Estimates for the Curvature of the Free Boundary in the Obstacle Problem*, Adv. Math. **24**, 78-98, (1977).

[153] SCHWARTZ, J., *On Nash's implicit functional theorem*, Comm. Pure Appl. Math. **13**, 509-530, (1960).

[154] SERGERAERT, F, *Une généralisation du théorème des fonctions implicites de Nash*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **270**, 861-863, (1970).

[155] SERGERAERT, F, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de fréchet et quelques applications*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Ser. 5, **4**, 599-660, (1972).

[156] SIMON, L., *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **3**, (1983).

[157] SPRUCK, J., *Regularity in elliptic boundary problems*, Recent methods in non-linear analysis, Proc. int. Meet., Rome 1978, 73-81, (1979).

[158] STOJANOVIC, S, *Perturbation formula for regular free boundaries in elliptic and parabolic obstacle problems*, SIAM J. Control Optim. **35** (6), 2086-2100, (1997).

[159] TALENTI, G., *Some estimates of solutions to Monge-Ampère type equations in dimension two*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **8**, 183-230, (1981).

[160] TORO, T., *Geometric conditions and existence of bi-Lipschitz parametrizations*, Duke Math. J. **77** (1), 193-227, (1995).

[161] TORO, T., *Doubling and flatness : geometry of measures*, Notices Amer. Math. Soc. **44** (9), 1087-1094, (1997).

[162] WEISS, G.S., *A homogeneity improvement approach to the obstacle problem*, Invent. Math. **138**, 23-50, (1999).

[163] ZALTZMANN, B., *Multidimensional two-phase quasistationary Stefan problem*, Manuscripta Math. **78**, 287-301, (1993).

[164] ZEHNDER, E., *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems, Part. I*, Comm. Pure Appl. Math. **28**, 91-140, (1975).