

# Gestion avec coûts de transaction et calcul des variations

Henri Berestycki et Yonathan Ebguy

HSBC-CCF/DRMM et EHESS - Paris

Journée EDP et Finance

Marne la Vallée, 18 Novembre 2004

## Plan

- Rappels de théorie du portefeuille
- Modélisation financière
- Formulation d'un problème d'optimisation
- Résolution d'une classe de problèmes variationnels
- Essais numériques
- Un problème variationnel pour les options

## Théorie de Markowitz.

Proportions  $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ .

Optimisation sous contrainte

$$\sup_w E[U(W(w))] \text{ s.c. } w^t e = 1$$

Résolution exacte pour fonctions CARA (Constant Absolute Risk Aversion)

Utilité logarithmique ( $U(z) = \log z$ ),  $N = 2$ ,  $w^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$

## Microstructure et coûts de transaction

- Coûts directs ou explicites : commissions de courtage, impôts de bourse...
  - Coûts implicites, imperfections de marché ( $\Rightarrow$  bid/ask spread) :
    - coût du risque de position (aversion au risque des fournisseurs de liquidité)
    - coût fixe de l'immédiateté, problème de liquidité des titres.
    - impact de marché : variation de prix nécessaire pour absorber un certain volume de titre.
- $\Rightarrow$  coûts élevés sur marchés émergents, pour traders techniques (mouvements à court-terme)...

## Microstructure et coûts de transaction (2)

### Dépendent :

- de la taille de la transaction
- du stock total de titres
- du nombre de teneurs de marché ou de participants

Pour portefeuilles importants, coûts proportionnels :

20bp pour marchés de l'OCDE.

40bp pour pays non-liquides Européens (Autriche, Portugal...).

60bp pour marchés émergents.

## Le modèle financier

Deux actifs  $A_t$  (risqué),  $O_t$  (sans risque).

Dynamique:

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu dt + \sigma dB_t, \quad O_t = O$$

Proportion :  $l_t = \frac{A_t}{A_t + O}$ , Réallocation :  $\alpha_t = l_t + \beta_t(l_t)dt$

EDS :

$$d \log W_t = \left( \mu l_t - \frac{1}{2} \sigma^2 l_t^2 - c |\beta_t| \right) dt + \sigma l_t dB_t$$

$Z(l, \beta)$  : distribution de la proportion en fonction de la stratégie.

Problème : optimiser

$$E \left[ \mu l - \frac{1}{2} \sigma^2 l^2 - c |\beta| \right] = \frac{1}{N} \int_0^1 Z(l, \beta) \left( \mu l - \frac{1}{2} \sigma^2 l^2 - c |\beta| \right) dl$$

avec  $N = \int_0^1 Z(l, \beta) dl$  facteur de normalisation

## Approximation par régime stationnaire

Changement de variable :  $\xi = \log(\frac{l}{1-l})$

Diffusion correspondante :  $d\xi_t = [\kappa + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2] dt + \sigma dB_t$

où :  $\kappa = (1 + e^\xi).(\beta(1 + e^{-\xi}) + c|\beta|)$

Comme Dumas et Luciano (HJB) : régime stationnaire.

Equation de Fokker-Planck :  $\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - (\kappa + \mu - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial Z}{\partial \xi} - \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} Z = 0$

soit :  $\frac{\partial Z}{\partial \xi} = 2 \frac{Z}{\sigma^2} (\kappa + \mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \alpha$

## Le problème d'optimisation

Grâce à Fokker-Plank :

$$Zc|\beta| = \frac{c}{(1 + e^\xi).(1 + e^{-\xi} + c.\text{sgn}(\kappa))} \left| \frac{\sigma^2}{2} \frac{dZ}{d\xi} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)Z - \frac{\sigma^2\alpha}{2} \right|$$

Espérance à maximiser :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z \left[ \mu \left( \frac{e^\xi}{1+e^\xi} \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{e^\xi}{1+e^\xi} \right)^2 \right] - \frac{c}{u(\xi)} \left| \frac{\sigma^2}{2} \frac{dZ}{d\xi} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)Z - \frac{\sigma^2\alpha}{2} \right| d\xi$$

Avec :  $u(\xi) = (1 + e^\xi).(1 + e^{-\xi} + c.\text{sgn}(\kappa))$

## Une classe de problèmes variationnels :

$a : \mathbb{R} \rightarrow [a_0, a_1]$  avec  $a_0 > 0$

$b : \mathbb{R} \rightarrow [b_0, b_1]$  analytiques

$h$  analytique telle que  $\inf h < \min(h(-\infty), h(+\infty))$

on résout :

$$\min_{Z \in BV_+(\mathbb{R})} J(Z) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(x)DZ + b(x)Z| + Z(x)h(x)dx \quad (1)$$

$$\text{où } N = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(x)dx.$$

Englobe le problème financier.

On prouve :

**Theorem 1** *Dans  $BV(\mathbb{R})$ , le problème (1) a une solution  $Z_m$  telle que :*

$$\exists(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a(z)DZ + b(z)Z_m(z) = 0 \text{ et } Z_m(z) \neq 0 \forall z \in [x,y]$$

$$Z_m(z) = 0 \quad \forall z \notin [x,y]$$

**Theorem 2** *Le problème financier a une solution dans  $BV(I)$*

$$\begin{aligned} Z_m(l) &= C \frac{1}{l^2} \left( \frac{l}{1-l} \right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \text{ entre les bornes optimales } l_- \text{ et } l_+, \\ Z_m(l) &= 0 \text{ ailleurs.} \end{aligned}$$

*Dans la limite  $c \sim 0$ , les bornes optimales ont des équivalents :*

$$\begin{aligned} l_- &= \frac{\mu}{\sigma^2} - \left( 12c \left( \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \\ l_+ &= \frac{\mu}{\sigma^2} + \left( 12c \left( \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Stratégie de l'investisseur conforme à celle trouvée par Magill/Constantinides puis Davis/ Norman.

## Plan de la résolution de la classe de problèmes :

- intuition par un problème modèle, espace de travail
- régularisation du problème
- résolution des problèmes approchés
- convergence des minima sur un compact,
- généralisation à  $\mathbb{R}$ .

## Le problème modèle

Inspiré d'Aurell.

$$\min_{Z \in BV_+(\mathbb{R})} J(Z) = \int_{\mathbb{R}} |DZ| + \int_{\mathbb{R}} Z(x)h(x)dx \text{ t.q. } \int_{\mathbb{R}} Z = 1 \quad (2)$$

$h$  continue intégrable avec un unique minimum fini et un nombre fini de sens de variations.

Résultats classiques (cf Casas, Pola) + Book keeping sur problème auxiliaire

$$\min_{Z \in BV(\mathbb{R})} K(Z) = \int_{\mathbb{R}} Z(x)h(x)dx \text{ t.q. } \int_{\mathbb{R}} Z = 1 \text{ et } Z(x) \leq M \text{ p.p.} \quad (3)$$

## Régularisation du problème

Espace de travail réflexif

$$X_\varepsilon = \{Z \in W^{1,1+\varepsilon}(I), Z \geq 0\}$$

Soit :

$$J_\varepsilon(Z) = \frac{1}{N} \int_I c |DZ|^{1+\varepsilon} + Z(x)h(x)dx$$

$$\text{où } N = \int_I Z(x)dx$$

Problème :

$$\min_{Z \in X_\varepsilon} J_\varepsilon(Z) \text{ s.c. } \int_I Z(x)dx = 1$$

Euler-Lagrange sur problème régulier.

Les valeurs d'adhérence sont des fonctions créneaux

Les problèmes régularisés admettent des minima dont la meilleure valeur d'adhérence est (pour  $h(x) = (\frac{1}{2}bx^2 - ax)$ ) :

$$x_- = \frac{a}{b} - \sqrt[3]{\frac{3c}{b}}$$

$$x_+ = \frac{a}{b} + \sqrt[3]{\frac{3c}{b}}$$

$$Z_m(x) = \frac{1}{x_+ - x_-}, \quad x_- \leq x \leq x_+$$

$$Z_m(x) = 0 \text{ ailleurs}$$

## La Gamma convergence

Définit une topologie sur l'espace des fonctionnelles. Conçue et formalisée par **de Giorgi** pour traduire des propriétés de convergence des minima.

**Definition 3** ( $\Gamma$  – convergence)  $f_j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\Gamma$ –converge dans  $X$  vers  $f_\infty : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  si pour tout  $x$  de  $X$  :

- a) (inégalité lim inf) si  $\forall x_j \rightarrow x$   $f_\infty(x) \leq \liminf_j f_j(x_j)$
- b) (inégalité lim sup)  $\exists x_j \rightarrow x$   $f_\infty(x) \geq \limsup_j f_j(x_j)$

**Definition 4** (équi-mild coercivité)  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  équi-mildly-coercive si  $\exists K \subset X$  compact non vide tel que  $\inf_X f_j = \inf_K f_j$  pour tout  $j$

## La gamma convergence (2).

**Theorem 5**  $(X, d)$  métrique,  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  équi-mildly-coercive sur  $X$ ,  
si  $f_\infty = \Gamma - \lim_j f_j$  alors

$$\exists \min_X f_\infty = \lim_j \inf_X f_j$$

*De plus, si  $(x_j)_j$  précompacte avec  $\lim_j f_j(x_j) = \lim_j \inf_X f_j$ , alors toute valeur d'adhérence de  $(x_j)$  est un minimum de  $f_\infty$ .*

## Convergences des minima

Cadre de démonstration

$$X_I = BV(I)$$

Topologie sur  $X_I$

$$(Z_j) \xrightarrow{X_I} Z \iff \left\{ \begin{array}{l} Z_j \xrightarrow{L^1} Z \\ \partial Z_j \xrightarrow{*} \partial Z \end{array} \right\}$$

Gamma convergence puis idem sur  $\mathbb{R} \Rightarrow$  convergence des minima.

## Retour au problème financier

Rappel :

$$J(Z) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} Z \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{e^\xi}{1+e^\xi} \right)^2 - \mu \left( \frac{e^\xi}{1+e^\xi} \right) \right] + \frac{c}{u(\xi)} \left| \frac{\sigma^2}{2} DZ - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) Z \right| d\xi$$

$\Rightarrow$  Résolution de l'EDO induite par le terme dans la valeur absolue

Donne avec proportion :  $Z_m(l) = C \frac{1}{l^2} \left( \frac{l}{1-l} \right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}$  entre  $l_-$  et  $l_+$

On réinjecte puis optimisation par algorithme ou :

**Formules explicites dans la limite  $c$  petit :**

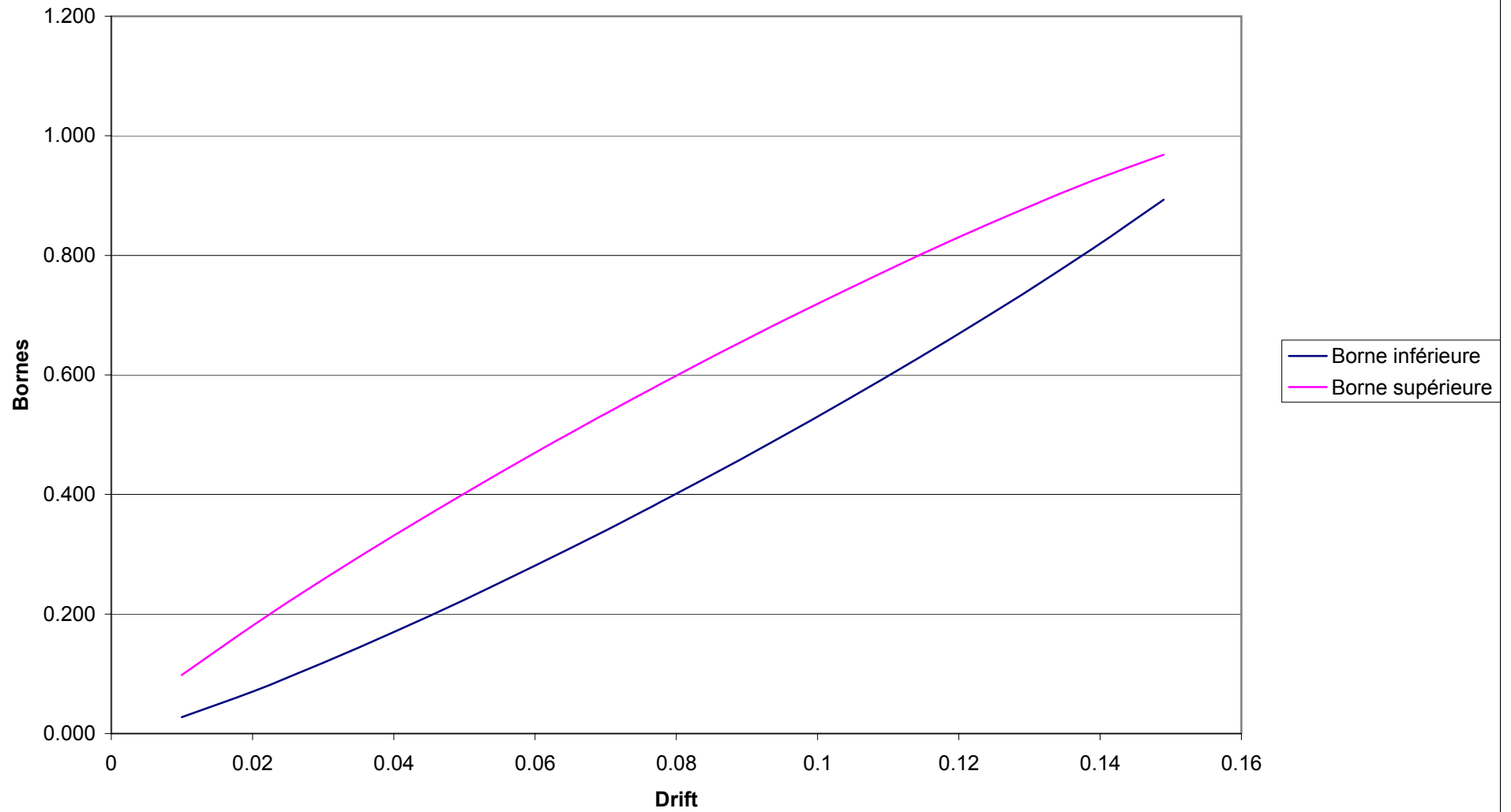
$$\begin{aligned} l_- &= \frac{\mu}{\sigma^2} - \left( 12c \left( \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \\ l_+ &= \frac{\mu}{\sigma^2} + \left( 12c \left( \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

## Études de sensibilités des bornes par rapport :

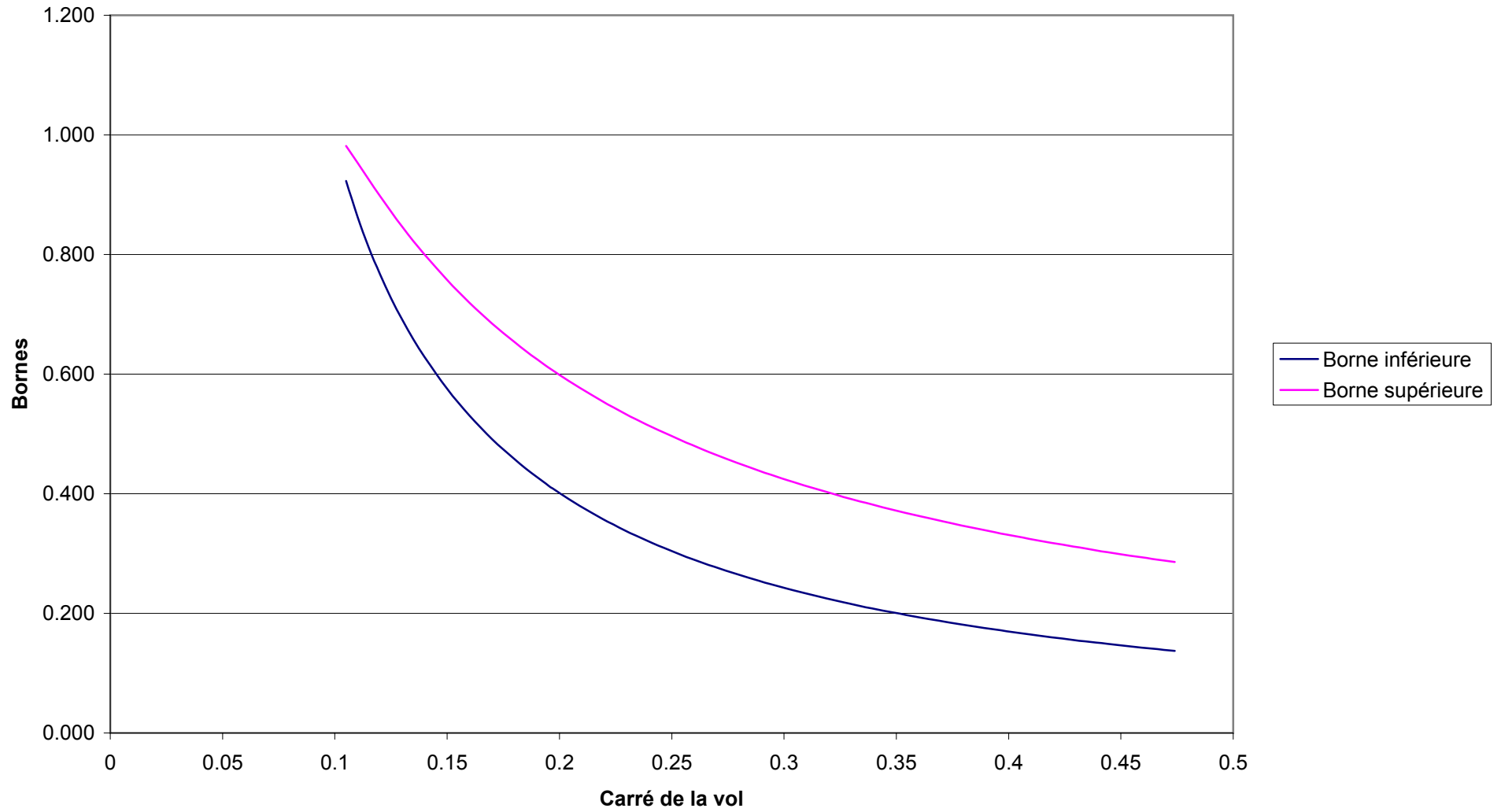
- au drift
- à la volatilité
- au coût  $c$ .

Jeu standard :  $\sigma = 40\%$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $c = 0.01$ .

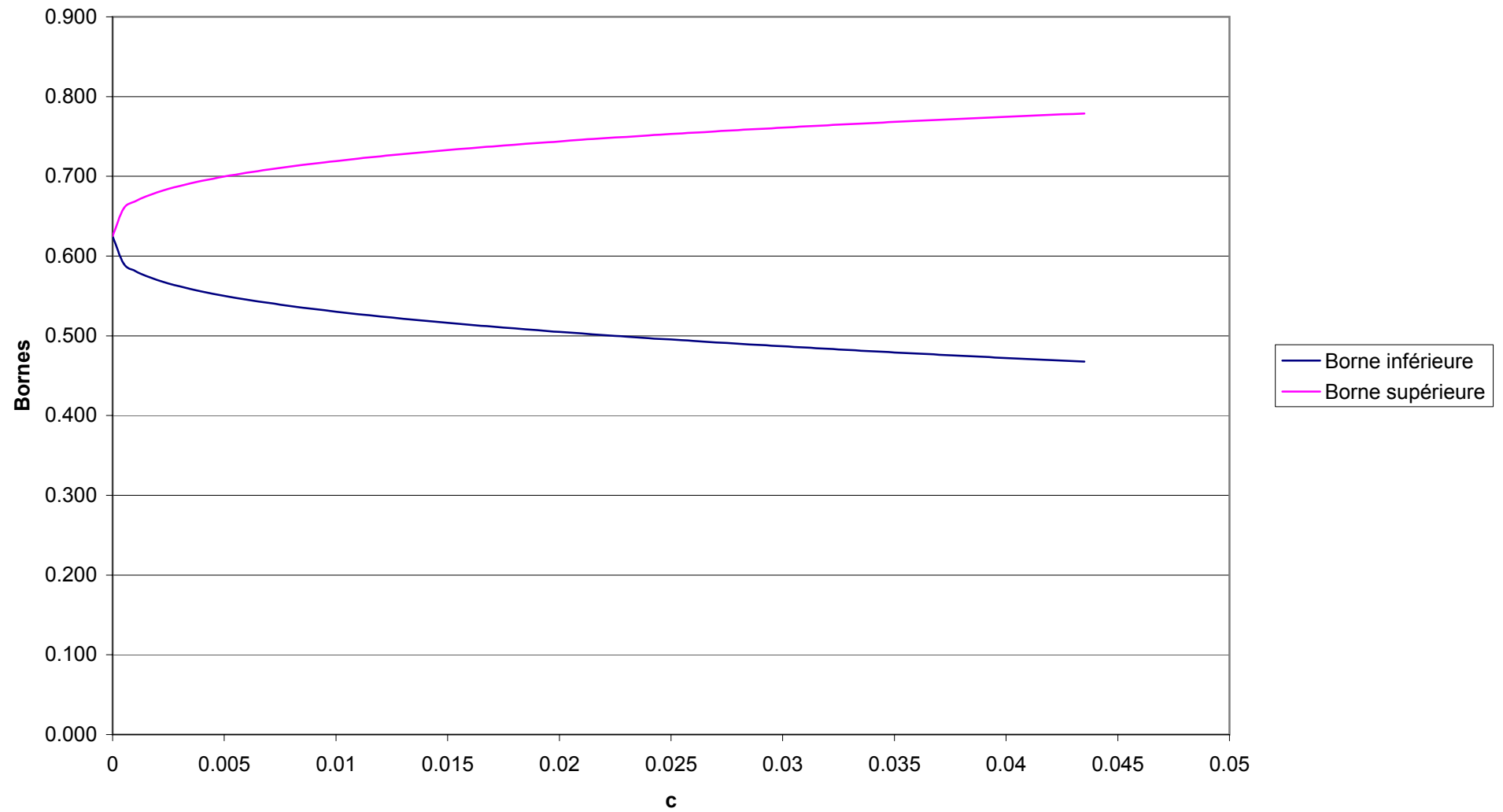
**Sensibilité par rapport au drift**



### Sensibilité par rapport à la vol



### Sensibilité par rapport à c



## Comparaison de stratégies

- "stratégie 1"  $\leftrightarrow$  stratégie optimale.
- la "stratégie 2"  $\leftrightarrow$  stratégie non infinitésimale
- les "stratégie 3" et "stratégie 4"  $\leftrightarrow$  bornes non optimales.

Horizon : 20 ans

|                                               |             |             |             |             |
|-----------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\mu = 0.03$<br>$\sigma = 0.2$<br>$c = 0.005$ | Stratégie 1 | Stratégie 2 | Stratégie 3 | Stratégie 4 |
| Bornes de l'IC                                | 0.686       | 0.686       | 0.5         | 0.74        |
|                                               | 0.814       | 0.814       | 0.9         | 0.78        |
| Tracking error                                | 0.084       | 0.0598      | 0.218       | 0.036       |
| Coûts de transaction                          | 0.078       | 0.153       | 0.021       | 0.225       |
| Gain d'utilité                                | 0.1149      | 0.1143      | 0.11242     | 0.1138      |

|                                              |                |                |             |             |
|----------------------------------------------|----------------|----------------|-------------|-------------|
| $\mu = 0.04$<br>$\sigma = 0.3$<br>$c = 0.01$ | Stratégie 1    | Stratégie 2    | Stratégie 3 | Stratégie 4 |
| Bornes de l'IC                               | 0.347<br>0.543 | 0.347<br>0.543 | 0.3<br>0.6  | 0.4<br>0.5  |
| Tracking error                               | 0.193          | 0.137          | 0.303       | 0.104       |
| Coûts de transaction                         | 0.370          | 0.716          | 0.253       | 0.698       |
| Gain d'utilité                               | 0.0881         | 0.0856         | 0.08731     | 0.0859      |

## Pricing d'option par maximum d'utilité.

Analogie avec résultats exposés.

Idée d'Hodges et Neuberger.

- $\pi$  stratégies
- $y^\pi = (y^1, \dots, y^n)$ . Un call de strike  $E$ , de maturité  $T$  sur l'actif 1.
- $B(0)$  le montant initial de cash.
- $c$  fonction de liquidation

Maximum d'utilité  $U$  à  $T$  :

$$V(B) = \sup_{\pi} E\{U(B^{\pi}(T) + I_{(S_1(T) \leq E)}c(y^{\pi}(T), S(T)) + \\ + I_{(S_1(T) > E)}[c(y^{\pi}(T) - e_1, S(T)) + E])\}$$

- Premier terme : cash,
- Deuxième terme : call pas exercé,
- Troisième terme : call exercé.

## Pricing d'option par maximum d'utilité (2).

Prix d'indifférence (ne rien faire ou accepter  $B_0$  et émettre le call) :

$$B_0 = \inf\{B : V(B) \geq 0\}$$

On définit :

$$V_1(B) = \sup_{\pi} E\{U(B^{\pi}(T) + c(y^{\pi}(T), S(T)))\}$$

et  $B_1 = \inf\{B : V_1(B) \geq 0\}$ , sorte de taxe d'entrée sur le marché

Prix de l'option :

$$p = B_0 - B_1$$

$\Rightarrow$  le pricing correspond à un maximum d'utilité.

## Conclusions

- Formulation du problème de gestion de portefeuille sous forme d'un problème d'optimisation sur  $Z$ .
- Résolution du problème variationnel par Gamma-convergence.
- Permet vision intuitive
- Obtention de formules explicites pour des coûts faibles.
- Méthodes numériques.

## Perspectives

- Application de ces outils à la couverture d'options. Comparaison de stratégie optimale (HN) avec stratégie issue du modèle de Leland.
- Coûts plus stylisés : coûts fixes, non-linéaires, modélisation plus raffinée (cf microstructure).
- Étude complète du problème instationnaire

## Bibliographie

- Aurell, Muratore-Ginanneschi, Financial friction and multiplicative markov market games, 1999.
- Berestycki, Ebguy, A Gamma convergence approach to a problem of portfolio selection with transaction costs.
- Dal Maso, an introduction to gamma-convergence, Birkhäuser, Boston, 1993.
- Davis, Norman, Portfolio Selection with transaction costs, mathematics of operational research, 15, pp 676-713, 1990.
- Dumas, Luciano, An exact solution to a dynamic portfolio choice problem under transaction costs, 1991.
- Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variations, Birkhauser 1984.
- Hodges, Neuberger, "Optimal Replication of contingent claims under transaction costs", 1989.