



Modèle de Frenkel-Kontorova : résultats d’homogénéisation et existence de traveling waves

N. Forcadel¹, M. Al Hajj², C. Imbert³, R. Monneau⁴

Résumé. Dans cette note, nous nous intéresserons au modèle de Frenkel-Kontorova. Il s’agit d’un système d’équations différentielles ordinaires qui décrit la dynamique de particules. Chaque particule satisfait une loi de Newton (incluant un terme d’amortissement et un terme d’accélération) où la force est créée par l’interaction avec les autres particules et avec un potentiel périodique. Ce modèle est un modèle très simple et apparaît dans beaucoup d’applications : dislocations, modèle non-linéaire de la dynamique de l’ADN, en chimie (mouvement de protons dans des réseaux d’atomes d’oxygène). Après avoir expliqué l’importance de l’étude des dislocations (ce qui est la motivation principale de ce travail), nous donnerons un résultat d’homogénéisation. Le but est de décrire quel est le comportement macroscopique des particules quand le nombre de particules par unité de longueur tend vers l’infini. Il s’agit donc de passer d’une description d’un nombre fini de particules à une description de densité de particules. Dans une seconde partie, nous étudierons l’existence de travelling waves pour ce modèle.

Mots-clés. Modèle de Frenkel-Kontorova, Homogénéisation, Traveling waves, Fonction enveloppe.

1. Introduction

Dans cette note, nous nous intéresserons à des résultats récents concernant des modèles de type Frenkel-Kontorova. Il s’agit de systèmes d’équations différentielles ordinaires décrivant le mouvement de particules en interaction avec leurs voisines et soumises à un potentiel périodique. Pour un panorama sur les modèles de Frenkel-Kontorova, nous renvoyons au livre de Braun et Kivshar [5]. Nous étudierons deux questions différentes. Tout d’abord, nous regarderons la limite du système d’EDO quand le nombre de particules par unité de longueur tend vers l’infini. Nous verrons que cela peut être vu comme un résultat d’homogénéisation. Ensuite, nous construirons une solution de type travelling waves pour le système d’EDO. Nous verrons que ces deux questions, a priori différentes, reposent sur la construction de fonctions enveloppes. Cette

⁽¹⁾ Université Paris-Dauphine, Ceremade forcadel@ceremade.dauphine.fr, ⁽²⁾ Université Paris-Est, CERMICS, Ecole des Ponts ParisTech al-hajm@cermics.enpc.fr, ⁽³⁾ CNRS, Université Paris-Est Créteil cyril.imbert@u-pec.fr, ⁽⁴⁾ Université Paris-Est, CERMICS, Ecole des Ponts ParisTech monneau@cermics.enpc.fr

notion remonte aux travaux d'Aubry [2, 3]. De manière formelle, il s'agit d'une fonction $h : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ telle que si v représente la vitesse moyenne des particules et q l'inverse de la densité des particules, alors la position de la i ème particule est donnée à l'instant t par $h(vt + iq)$ (voir Définition 2.5).

2. Résultats principaux

2.1. Homogénéisation

Nous commençons cette présentation par le modèle de Frenkel-Kontorova dans sa forme la plus simple. Si l'on note t le temps et $U_i(t)$ la position de la particule $i \in \mathbb{Z}$, la dynamique la plus simple est donnée par

$$m_0 \frac{d^2 U_i}{dt^2} + \frac{dU_i}{dt} = U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} + \sin(2\pi U_i) + L \quad (2.1)$$

où m_0 est la masse d'une particule, L est une force d'entraînement constante qui fait bouger tout le "train de particules" et le terme $\sin(2\pi U_i)$ décrit la force créée par un potentiel périodique dont la période est supposée être égale à 1.

Le but de notre étude est de décrire le comportement macroscopique de la solution U de (2.1) quand le nombre de particules par unité de longueur tend vers l'infini. Pour faire cela, on va supposer qu'à l'instant initial les particules satisfont

$$\begin{aligned} U_i(0) &= \varepsilon^{-1} u_0(i\varepsilon) \\ \frac{dU_i}{d\tau}(0) &= 0 \end{aligned}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ et une fonction Lipschitzienne $u_0(x)$ satisfaisant l'hypothèse suivante

Borne sur le gradient par au-dessus et au-dessous à l'instant initial

$$\text{Il existe } K_0 > 0 \text{ t.q. } 0 < 1/K_0 \leq (u_0)_x \leq K_0 \text{ sur } \mathcal{R}. \quad (2.2)$$

Cette hypothèse s'interprète en disant qu'à l'instant initial, le nombre de particules par unité de longueur varie entre $K_0^{-1}\varepsilon^{-1}$ et $K_0\varepsilon^{-1}$.

Il est alors naturel de se demander quel est le comportement macroscopique de la solution U de (2.1) quand ε tend vers zéro, *i.e.* quand le nombre de particules par unité de longueur tend vers l'infini. Pour cela, nous allons introduire une fonction qui décrit la position remise à l'échelle des particules

$$\bar{u}^\varepsilon(t, x) = \varepsilon U_{\lfloor \varepsilon^{-1}x \rfloor}(\varepsilon^{-1}t) \quad (2.3)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière inférieure. Notre premier résultat dit que la dynamique limite quand ε tend vers zéro de l'équation (2.1) est déterminée par une équation de Hamilton-Jacobi du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} u_t^0 = \bar{F}(u_x^0) & \text{pour } (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathcal{R}, \\ u^0(0, x) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (2.4)$$

où \bar{F} est une fonction continue à déterminer. Plus précisément, nous avons le résultat suivant

THÉORÈME 2.1. (Homogénéisation du modèle de Frenkel-Kontorova)

Il existe une masse critique m_0^c telle que pour toute masse $m_0 \in]0, m_0^c]$ et pour tout $L \in \mathcal{R}$, il existe une fonction continue $\bar{F} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ telle que sous l'hypothèse (2.2), la fonction \bar{u}^ε converge localement uniformément vers l'unique solution de viscosité u^0 de (2.4).

REMARQUE 2.2.

La masse critique m_0^c est précisée dans l'hypothèse (A3) ci-dessous.

Dans [7], nous avons traité avec C. Imbert et R. Monneau le cas complètement amorti $m_0 = 0$. Nous avons ensuite généralisé ce résultat dans [8] au cas accéléré $m_0 > 0$. La différence principale est que dans le cas complètement amorti, la dynamique peut être injectée dans une seule EDP alors que dans le cas accéléré, la dynamique doit être injectée dans un système d'EDP où, de manière simplifiée, une équation décrit la position des particules et l'autre leur vitesse. Cette approche (que nous allons détailler plus loin) permet également d'homogénéiser des systèmes de type Frenkel-Kontorova où l'on considère différents types de particules.

Cas avec N types de particules

Etant donné $N \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, on considère une suite de nombres réels $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\theta_{i+N} = \theta_i > 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

On considère alors le modèle de Frenkel-Kontorova généralisé avec N types de particules différentes qui restent ordonnées sur la droite réelle où pour $\tau \in (0, +\infty)$ et $i \in \mathbb{Z}$, U_i satisfait

$$m_0 \frac{d^2 U_i}{d\tau^2} + \frac{dU_i}{d\tau} = \theta_{i+1}(U_{i+1} - U_i) - \theta_i(U_i - U_{i-1}) + \sin(2\pi U_i) + L \quad (2.5)$$

Ce modèle est schématisé dans la Figure 2.1. Comme nous allons le voir, des résultats d'homogénéisation similaires à ceux du Théorème 2.1 peuvent être démontrés. L'idée essentielle pour cela est de travailler avec des systèmes monotones d'EDOs. Inspiré par le travail de Baensens et MacKay [4] et de Hu, Qin et Zheng [9], on introduit pour tout $i \in \mathbb{Z}$ la fonction suivante

$$\Xi_i(\tau) = U_i(\tau) + 2m_0 \frac{dU_i}{d\tau}(\tau).$$

En utilisant cette nouvelle fonction, le système d'EDOs (2.5) peut se réécrire sous la forme suivante : pour $\tau \in (0, +\infty)$ et $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \frac{dU_i}{d\tau} = \alpha_0(\Xi_i - U_i) \\ \frac{d\Xi_i}{d\tau} = 2\theta_{i+1}(U_{i+1} - U_i) - 2\theta_i(U_i - U_{i-1}) + 2\sin(2\pi U_i) + 2L + \alpha_0(U_i - \Xi_i). \end{cases}$$

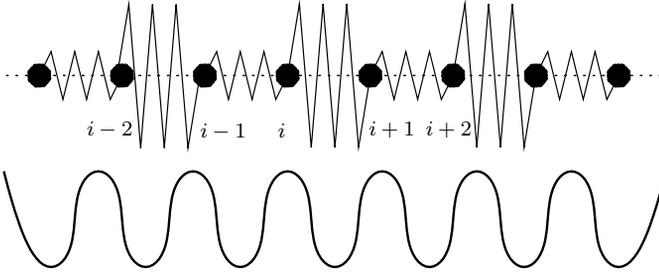


Fig. 2.1. Le modèle de Frenkel-Kontorova avec $N = 2$ types de particules (et de ressorts) et une interaction au plus proche voisin

où $\alpha_0 = \frac{1}{2m_0}$. Grâce à ce changement de variable, le système est maintenant monotone et pourra être homogénéisé.

2.2. Système de Frenkel-Kontorova général avec N types de particules

D'une manière plus générale, on considère le système de Frenkel-Kontorova généralisé avec N types de particules suivant :

$$m_0 \frac{d^2 U_i}{d\tau^2} + \frac{dU_i}{d\tau} = F_i(U_{i-m}, \dots, U_{i+m}) \quad (2.6)$$

où les fonctions $F_j : \mathcal{R}^{2m+1} \rightarrow \mathcal{R}$, qui à V associent $F_j(V)$, vérifient les hypothèses suivantes (avec $V = (V_{-m}, \dots, V_m)$)

(A1) (**Régularité**)

F_j est Lipschitzienne en V uniformément en j .

(A2) (**Monotonie en V_i , $i \neq 0$**)

$F_j(V_{-m}, \dots, V_m)$ est croissante en V_i pour $i \neq 0$.

(A3) (**Monotonie en V_0**)

$$\alpha_0 + 2 \frac{\partial F_j}{\partial V_0} \geq 0 \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

REMARQUE 2.3.

L'hypothèse (A3) s'interprète en demandant que la masse m_0 soit suffisamment petite par rapport aux variations de la non-linéarité.

(A4) (**Périodicité**)

$$F_j(V_{-m} + 1, \dots, V_m + 1) = F_j(V_{-m}, \dots, V_m),$$

(A5) (**Périodicité des types de particules**)

$$F_{j+N} = F_j \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

(A6) **(Ordre)** Pour tout $(V_{-m}, \dots, V_m, V_{m+1}) \in \mathcal{R}^{2m+2}$ tels que $V_{i+1} \geq V_i$ pour tout $|i| \leq m$, on a

$$2F_{j+1}(V_{-m+1}, \dots, V_{m+1}) + \alpha_0 V_1 \geq 2F_j(V_{-m}, \dots, V_m) + \alpha_0 V_0.$$

Cette dernière hypothèse permet de garantir l'ordre des particules, c'est à dire que $U_j \leq U_{j+1}$ pour tout temps. Dans le cas où l'on a un seul type de particules ($F_{j+1} = F_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$), alors cette hypothèse est une conséquence directe de (A2) et (A3).

En utilisant les mêmes idées que précédemment, et en particulier l'équation (2.3), on se ramène à l'étude d'une fonction

$$(u, \xi) = ((u_j(y, \tau))_{j \in \mathbb{Z}}, (\xi_j(y, \tau))_{j \in \mathbb{Z}})$$

satisfaisant le système d'EDP suivant : pour tout $(y, \tau) \in \mathcal{R} \times (0, +\infty)$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (u_j)_\tau = \alpha_0 (\xi_j - u_j) \\ (\xi_j)_\tau = 2F_j([u(\cdot, \tau)]_{j,m}) + \alpha_0 (u_j - \xi_j), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u_{j+n}(y, \tau) = u_j(y+1, \tau) \\ \xi_{j+n}(y, \tau) = \xi_j(y+1, \tau). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où pour une fonction générale v , on a

$$[v]_{j,m}(y) = (v_{j-m}(y), \dots, v_{j+m}(y)).$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on remet le système à l'échelle en considérant

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j^\varepsilon(x, t) = \varepsilon u_j \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon} \right) \\ \xi_j^\varepsilon(x, t) = \varepsilon \xi_j \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon} \right). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

et on impose les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j^\varepsilon(x, 0) = u_0 \left(x + \frac{j\varepsilon}{n} \right) \\ \xi_j^\varepsilon(x, 0) = \xi_0^\varepsilon \left(x + \frac{j\varepsilon}{n} \right). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où u_0 et ξ_0^ε satisfont :

(A0) (Borne par en-dessous sur le gradient) Il existe deux constantes $K_0 > 0$ et $M_0 > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} 0 < 1/K_0 \leq (u_0)_x \leq K_0 \quad \text{dans } \mathcal{R}, \\ 0 < 1/K_0 \leq (\xi_0^\varepsilon)_x \leq K_0 \quad \text{dans } \mathcal{R}, \\ \|u_0 - \xi_0^\varepsilon\|_\infty \leq M_0 \varepsilon. \end{aligned}$$

Notre résultat d'homogénéisation s'énonce alors de la manière suivante :

THÉORÈME 2.4. (Homogénéisation de systèmes de type FK avec N types de particules)

On suppose que les $(F_j)_j$ satisfont (A1)-(A6) et que les données initiales u_0, ξ_0^ε vérifient (A0). Alors il existe une fonction continue $\bar{F} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ telle que pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, les fonctions u_j^ε et ξ_j^ε définies par (2.8) convergent localement uniformément vers l'unique solution de viscosité u^0 de (2.4).

Pour compléter cette partie, il ne reste plus qu'à expliquer comment est déterminée la non-linéarité \bar{F} . Ceci est fait à l'aide des fonctions enveloppes que nous allons définir dans la section suivante et qui vont jouer le rôle des correcteurs de la théorie classique.

2.3. Fonctions enveloppes

Nous allons maintenant définir la notion de fonctions enveloppes pour notre système. De manière formelle, nous allons chercher des fonctions $((h_j(z))_{j \in \mathbb{Z}}$ et $(g_j(z))_{j \in \mathbb{Z}}$ telles que

$$u_i^\varepsilon(x, t) \simeq \varepsilon h_i \left(\frac{u^0(x, t)}{\varepsilon} \right) \quad \text{et} \quad \xi_i^\varepsilon(x, t) \simeq \varepsilon g_i \left(\frac{u^0(x, t)}{\varepsilon} \right)$$

et telles que $\varepsilon h_i \left(\frac{z}{\varepsilon} \right) \rightarrow z$ et $\varepsilon g_i \left(\frac{z}{\varepsilon} \right) \rightarrow z$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. En supposant qu'à l'échelle microscopique $u^0(y, \tau) \simeq py + \lambda\tau$, cela revient à chercher des fonctions $(h_j(z))_{j \in \mathbb{Z}}, (g_j(z))_{j \in \mathbb{Z}}$ telles que

$$(u_j(y, \tau), \xi_j(y, \tau)) = (h_j(py + \lambda\tau), g_j(py + \lambda\tau))$$

soit une solution de (2.7). On est alors amené à la définition suivante :

DÉFINITION 2.5. (Fonctions enveloppes pour le système (2.7))

Soit $p \in (0, +\infty)$ et $\lambda \in \mathcal{R}$. On dit que les fonctions $((h_j)_j, (g_j)_j)$ sont des fonctions enveloppes pour (2.7) si elles vérifient les propriétés suivantes pour tout $z \in \mathcal{R}, j \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda h_j' = \alpha_0 (g_j - h_j) \\ h_j(z+1) = h_j(z) + 1 \\ h_{j+N}(z) = h_j(z+p) \\ h_{j+1}(z) \geq h_j(z) \\ (h_j)_z(z) \geq 0 \\ \exists C \text{ t.q. } |h_j(z) - z| \leq C \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda g_j' = 2F_j([h]_{j,m}(z)) + \alpha_0 (h_j - g_j) \\ g_j(z+1) = g_j(z) + 1 \\ g_{j+N}(z) = g_j(z+p) \\ g_{j+1}(z) \geq g_j(z) \\ (g_j)_z(z) \geq 0 \\ \exists C \text{ t.q. } |g_j(z) - z| \leq C \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Le théorème suivant explique comment est déterminé l'Hamiltonien effectif \bar{F} .

THÉORÈME 2.6. (Hamiltonien effectif et fonctions enveloppes)

Soit $(F_j)_j$ satisfaisant (A1)-(A6) et $p \in (0, +\infty)$. Alors il existe un unique nombre réel λ pour lequel il existe des fonctions enveloppes $((h_j)_j, (g_j)_j)$. De plus, le nombre $\lambda = \bar{F}(p)$ vu comme une fonction de p est continue sur $(0, +\infty)$.

2.4. Traveling waves

Dans cette partie, on se place dans le cas complètement amorti ($m_0 = 0$) et avec un seul type de particule ($N = 1$). Etant donné $F \equiv F_1$, on considère alors le système de particules

$$\frac{dU_i}{d\tau} = F(U_{i-m}, \dots, U_{i+m}). \tag{2.11}$$

Le but est de construire des solutions particulières de type traveling waves du système (2.11), à savoir des solutions de la forme

$$U_i(t) = \phi(i + ct) \tag{2.12}$$

avec

$$\begin{cases} \phi' \geq 0 \\ \phi(-\infty) = 0, \quad \phi(+\infty) = 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Ici c est la vitesse de propagation de l'onde progressive ϕ . De manière évidente, si on injecte (2.12) dans (2.11), le profil ϕ et la vitesse c doivent satisfaire

$$c\phi'(z) = F(\phi(z - m), \dots, \phi(z + m)), \tag{2.14}$$

avec $z = i + ct$.

On pose $f(v) = F(v, \dots, v)$. En plus des hypothèses (A1) et (A2), on utilisera l'hypothèse suivante

Hypothèse (B)

Instabilité $f(0) = 0 = f(1)$ et il existe $b \in (0, 1)$ tel que $f(b) = 0$, $f|_{(0,b)} < 0$, $f|_{(b,1)} > 0$ et $f'(b) > 0$.

Régularité F est C^1 dans un voisinage de $\{b\}^{2m+1}$.

REMARQUE 2.7.

Le point b est instable, et c'est ce que signifie la condition $f'(b) > 0$. En particulier, la partie sur l'instabilité de l'hypothèse (B) signifie que f est de type "bistable".

THÉORÈME 2.8. (Existence d'une onde progressive)

Sous les hypothèses (A1), (A2) et (B), il existe un réel $c \in \mathcal{R}$ et une fonction $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ solutions de

$$\begin{cases} c\phi'(z) = F(\phi(z - m), \dots, \phi(z + m)) \quad \text{dans } \mathcal{R} \\ \phi \text{ est croissante sur } \mathcal{R} \\ \phi(-\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(+\infty) = 1 \end{cases} \tag{2.15}$$

dans le sens classique si $c \neq 0$ et presque partout si $c = 0$.

La méthode de construction d'une solution repose de manière cruciale sur l'existence d'une fonction enveloppe associée. De manière plus précise, $\phi(x)$ est construite comme la limite quand p tend vers 0 de $h_p(px)$ et c comme la

limite de $\frac{\lambda_p}{p}$ (Ici h_p est la fonction enveloppe associée à p et $\lambda_p = \bar{F}(p)$ est l'hamiltonien effectif).

Pour étudier la question de l'unicité de l'onde progressive et de la vitesse on utilisera les hypothèses suivantes

Hypothèse (C). Monotonie inverse proche de $\{0\}^{2m+1}$ et $E = \{1\}^{2m+1}$
 Il existe $\beta_0 > 0$ tel que pour $a > 0$, on a

$$\begin{cases} F(X + (a, \dots, a)) < F(X) & \text{pour tout } X, X + (a, \dots, a) \in [0, \beta_0]^{2m+1} \\ F(X + (a, \dots, a)) < F(X) & \text{pour tout } X, X + (a, \dots, a) \in [1 - \beta_0, 1]^{2m+1}. \end{cases}$$

REMARQUE 2.9. (**Monotonie inverse (C)**)

On remarque que l'hypothèse (C) est satisfaite si F est C^1 dans un voisinage de $\{0\}^{2m+1}$ et $\{1\}^{2m+1}$ dans $[0, 1]^{2m+1}$ et $f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$. Cette condition signifie que 0 et 1 sont des points d'équilibres stables et ceci est important pour avoir un principe de comparaison.

Hypothèse (D+)

i) **Interaction avec les voisins d'un seul côté** : On suppose que

$$F(V_{-m}, \dots, V_m) = F(V_{-m}, \dots, V_0).$$

ii) **Monotonie stricte** : F est strictement croissante en V_i pour un certain $i > 0$.

Hypothèse (D-)

i) **Interaction avec les voisins d'un seul côté** : On suppose que

$$F(V_{-m}, \dots, V_m) = F(V_0, \dots, V_m).$$

ii) **Monotonie stricte** : F est strictement croissante en V_j pour un certain $j < 0$.

REMARQUE 2.10.

L'hypothèse (D+) i) ou ii) (resp. (D-) i) ou ii)) est utilisée dans le cas $c > 0$ (resp. $c < 0$) pour obtenir un principe du maximum fort.

Hypothèse (E+)

i) **Monotonie stricte au voisinage de 0** : On suppose que $\frac{\partial F}{\partial V_i}(0) > 0$ pour un certain $i > 0$.

ii) **Régularité au voisinage de $\{0\}^{2m+1}$** :

$\nabla F(0)$ existe avec $f'(0) < 0$, et il existe $\alpha \in (0, 1)$ et $C_0 > 0$ tels que pour

tout $V \in [0, 1]^{2m+1}$

$$|F(V) - F(0) - V \cdot \nabla F(0)| \leq C_0 |V|^{1+\alpha}.$$

Hypothèse (E-)

i) Monotonie stricte au voisinage de 1 : On suppose que pour $E = (1, \dots, 1) \in \mathcal{R}^{2m+1}$, $\frac{\partial F}{\partial V_j}(E) > 0$ pour un certain $j < 0$.

ii) Régularité au voisinage de $\{1\}^{2m+1}$:

$\nabla F(E)$ existe avec $f'(1) < 0$, et il existe $\alpha \in (0, 1)$ et $C_0 > 0$ tels que pour tout $V \in [0, 1]^{2m+1}$

$$|F(V) - F(E) - (V - E) \cdot \nabla F(E)| \leq C_0 |V - E|^{1+\alpha},$$

avec $E = (1, \dots, 1) \in \mathcal{R}^{2m+1}$.

REMARQUE 2.11.

Les hypothèses (E+) et (E-) sont utilisées pour montrer des asymptotiques à l'infini sur le profil ϕ .

THÉORÈME 2.12. (Unicité de la vitesse et du profil)

On suppose que F satisfait (A1) et (A2). Soit (c, ϕ) une solution de

$$\begin{cases} c\phi'(z) = F(\phi(z - m), \dots, \phi(z + m)) & \text{dans } \mathcal{R} \\ \phi(-\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(+\infty) = 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

(a) Unicité de la vitesse : Si on suppose de plus que l'hypothèse (C) est satisfaite, alors la vitesse c est unique.

(b) Unicité du profil ϕ : Si $c \neq 0$, alors sous les hypothèses (C) et (D+) *i*) ou *ii*) ou (E+) si $c > 0$ (resp. (D-) *i*) ou *ii*) ou (E-) si $c < 0$), le profil ϕ est unique (à translation près) et $\phi' > 0$ dans \mathcal{R} .

On renvoie également à J. Mallet-Paret [10, 11] pour des résultats similaires pour ce genre de résultat (avec des hypothèses un peu plus fortes et des techniques complètement différentes).

Bibliographie

[1] M. AL HAJ, N. FORCADEL ET R. MONNEAU, Existence and uniqueness of traveling waves for fully overdamped Frenkel-Kontorova models, Preprint disponible sur Hal.
 [2] S. AUBRY, The twist map, the extended Frenkel-Kontorova model and the devil's staircase, Physica D, 7, 1983, 240-258.
 [3] S. AUBRY Exact models with a complete Devil's staircase, J. Phys. C : Solid State Phys., 16, 1983, 2497-2508.

- [4] C. BAESENS AND R. S. MACKAY, A novel preserved partial order for cooperative networks of units with overdamped second order dynamics, and application to tilted Frenkel-Kontorova chains, *Nonlinearity*, 17 (2004), pp. 567–580.
- [5] O.M. BRAUN, Y.S. KIVSHAR *The Frenkel-Kontorova Model, Concepts, Methods and Applications*, Springer-Verlag, 2004
- [6] N. FORCADEL, C. IMBERT ET R. MONNEAU, Homogenization of the fully overdamped Frenkel-Kontorova models, *Journal of Differential Equations*, 246, 2009, pp. 1057-1097.
- [7] N. FORCADEL, C. IMBERT ET R. MONNEAU, Homogenization of some particle systems with two-body interactions and of the dislocation dynamics, *Discrete and Continuous Dynamical Systems A*, 23(3), 2009, pp 785–826.
- [8] N. FORCADEL, C. IMBERT ET R. MONNEAU, Homogenization of accelerated Frenkel-Kontorova models with n types of particles, *Trans. Amer. Math. Soc.* 364 (2012), no. 12, 6187–6227.
- [9] B. HU, W.-X. QIN, AND Z. ZHENG, Rotation number of the overdamped Frenkel-Kontorova model with ac-driving, *Phys. D*, 208 (2005), pp. 172–190.
- [10] J. MALLET-PARET, The Fredholm alternative for functional differential equation of mixed type. *J. Dynam. Differential Equations* 11 (1) (1999), 1-47.
- [11] J. MALLET-PARET, The global structure of traveling waves in spatially discrete dynamical systems. *J. Dynam. Differential Equations* 11 (1) (1999), 49-127.

Colloque Fédération Normandie-Mathématiques

EDP - Normandie

23 & 24 Octobre 2012

Université du Havre
Laboratoire de Mathématiques
Appliquées du Havre
UFR des Sciences et Techniques

COMITÉ SCIENTIFIQUE

Patrizia Donato (LMRS, Rouen)
Olivier Goubet (LAMFA, Amiens)
Rabah Labbas (LMAH, Le Havre)
Taoufik Sassi (LMNO, Caen)

COMITÉ D'ORGANISATION

Gisella Croce (LMAH, Le Havre)
Christian Dogbe (LMNO, Caen)
Olivier Guibé (LMRS, Rouen)

CONFÉRENCIERS

Boris Andreianov (Besançon)
Christophe Besse (Lille 1)
Guillaume Carlier (Paris-Dauphine)
Claire Chainais-Hillairet (Lille 1)
Laurent Chupin (Clermont-Ferrand)
Nicolas Forcadel (Paris-Dauphine)
Daniela Giachetti (Rome-La Sapienza)
Paola Goatin (INRIA Nice)
Antoine Henrot (Nancy)
Philippe Laurençot (Toulouse)
Marc Massot (École Centrale Paris)
Annie Raoult (Paris-Descartes)

Université du Havre
Laboratoire de Mathématiques
Appliquées du Havre
UFR des Sciences et Techniques
25, rue Philippe Lebon - BP 540
76058 - LE HAVRE

Fédération
Normandie-Mathématiques
FR CNRS 3335

Fiche d'inscription sur le site WEB de la conférence
Date limite d'inscription : 15 Octobre 2012

Site Web: <http://edp-normandie.sciencesconf.org/>
Email: edp-normandie@sciencesconf.org

