Equations aux dérivées partielles / Partial differential equations

Estimations intérieures avec régularité optimale pour un modèle de plaques en élasticité linéaire

Régis MONNEAU

Résumé. Nous nous intéressons au passage $3d-2d$ pour une plaque de faible épaisseur en élasticité linéaire. L'approche classique par développement asymptotique fournit une estimation d'erreur dans H^1 sur les déplacements en supposant des forces de volume au moins de régularité L^2 (et plus pour certaines composantes). Dans notre travail nous adoptons une approche de type théorie de la régularité des solutions d'équations elliptiques. Cette approche fournit, pour un *nouveau modèle de Kirchhoff-Love d'ordre supérieur*, une estimation d'erreur dans H^2 en supposant des forces de volume seulement L^2, ce qui est optimal. Nous obtenons par ailleurs les estimations intérieures $W^{k,p}, C^{k,\alpha}$ correspondantes.

Interior estimates with optimal regularity for a plate model in linear elasticity

Abstract. We are interested in the $3d-2d$ passage for an asymptotically thin plate in linear elasticity. The classical approach by asymptotic expansion gives an error estimate on the displacements in H^1, assuming the volumic forces at least of regularity L^2 (and more for certain components). In our work we apply the regularity theory for solutions of elliptic equations. This approach gives, for a *new model of Kirchhoff-Love of higher order*, an error estimate in H^2 assuming volumic forces only in L^2, which is optimal. We also get some interior error estimates in $W^{k,p}, C^{k,\alpha}$.

Abridged English Version.
We consider the linear elastic problem on the plate $\Omega^\varepsilon = \omega_\ell \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ of thickness 2ε. We state some interior error estimates, but to simplify the presentation we chose here a periodic open set ω_ℓ of "size" ℓ:

$$\omega_\ell = \ell\left(\mathbf{R}^2 \backslash \mathbf{R}^2\right)$$

We are interested in the displacements of this plate under the action of volumic forces f and surfacic forces g. We renormalize the problem (see Ciarlet [4]), and study the displacements u defined on

$$\Omega_\ell = \omega_\ell \times I \quad \text{avec} \quad I = (-1,1)$$

which are solutions of

$$\left\{ \begin{array}{ll} L^\varepsilon u = f & \text{on} \quad \Omega_\ell \\ \\ B^\varepsilon u = g & \text{on} \quad \partial\Omega_\ell = \omega_\ell \times \partial I \end{array} \right. \tag{1}$$

We use greek indices $\alpha, \beta, ...$ for values in $\{1,2\}$, and latin indices $i, j, ...$ for values in $\{1,2,3\}$. More precisely we set $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$, $e^\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta} & \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3} \\ \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3} & \frac{1}{\varepsilon^2} e_{33} \end{pmatrix}$, $\sigma_{ij} = \lambda e^\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e^\varepsilon_{ij}$ for

$\lambda, \mu > 0$, and $\sigma_{ij}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\beta} & \frac{1}{\varepsilon}\sigma_{\alpha 3} \\ \frac{1}{\varepsilon}\sigma_{\alpha 3} & \frac{1}{\varepsilon^2}\sigma_{33} \end{pmatrix}$. Then $(L^{\varepsilon}u)_j = -\partial_i \sigma_{ij}^{\varepsilon}$ and $(B^{\varepsilon}u)_j = \sigma_{3j}^{\varepsilon}$.

Theorem 1 (3d-2d Comparison to the Kirchhoff-Love model)
To simplify we assume $g = 0$. For $\lambda, \mu > 0$ fixed, there exists a constant $C > 0$ such that for every $\ell \geq 1$, there exists a solution u of (1) which satisfies

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\ell}\left|e_{\alpha 3}\left(u-u_0\right)\right|_{L^2(\Omega_\ell)} \\[2ex] \dfrac{1}{\ell^2}\left|e_{33}\left(u-u_0\right)\right|_{L^2(\Omega_\ell)} \end{array}\right\} > C\varepsilon\left(\sum_{\alpha}|f_\alpha|_{L^2(\Omega_\ell)} + \varepsilon|f_3|_{L^2(\Omega_\ell)}\right)$$

where u_0 is the solution to the Kirchhoff-Love model (which satisfies in particular $e_{i3}(u_0) = 0$, cf. Ciarlet [4]).

We show that we can get an error estimate with constants independent on the size of the open set Ω_ℓ, but to this end we have to replace the Kirchhoff-Love model by a new one that we call the Kirchhoff-Love model of higher order, whose solution u_ε depends on ε and is given by (4)-(5).

Theorem 2 (3d-2d Comparison for the new model)
To simplify we assume $g = 0$. Then there exists a constant $C = C(\lambda, \mu) > 0$ such that every solution u of (1) satisfies

$$\left.\begin{array}{l} \left|e_{ij}^{\varepsilon}\left(u-u_\varepsilon\right)\right|_{L^2(\Omega_\ell)} \\[2ex] \left|\partial_3\left(e_{ij}^{\varepsilon}\left(u-u_\varepsilon\right)\right)\right|_{L^2(\Omega_\ell)} \\[2ex] \varepsilon\left|\partial_\alpha\left(e_{ij}^{\varepsilon}\left(u-u_\varepsilon\right)\right)\right|_{L^2(\Omega_\ell)} \end{array}\right\} \leq C\varepsilon\left(\sum_{\alpha}|f_\alpha|_{L^2(\Omega_\ell)} + \varepsilon|f_3|_{L^2(\Omega_\ell)}\right)$$

where u_ε is the solution of the Kirchhoff-Love model of higher order, given by (4)-(5).

More generally we get $W^{k,p}, C^{k,\alpha}$ interior error estimates.

I. INTRODUCTION AU CAS D'UNE PLAQUE PERIODIQUE.

Nous considérons une plaque tridimensionnelle d'épaisseur 2ε: $\Omega^{\varepsilon} = \omega_\ell \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Notre approche fournit certaines estimations intérieures, mais pour en faciliter l'exposé, nous choisissons un ouvert ω_ℓ périodique de "taille" ℓ:

$$\omega_\ell = \ell\left(\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2\right)$$

Nous nous intéressons aux déplacements de cette plaque linéairement élastique sous l'action de forces de volume $f = (f_1, f_2, f_3)$ et de surface $g = (g_1, g_2, g_3)$. Une fois le problème renormalisé (cf. [4] Ciarlet), les déplacements $u = (u_1, u_2, u_3)$ définis sur

$$\Omega_\ell = \omega_\ell \times I \quad \text{avec} \quad I = (-1, 1)$$

sont solutions des équations de l'élasticité mises à l'échelle sur $\omega_\ell \times I$:

$$L^\varepsilon u = f \tag{2}$$

où L^ε est un opérateur elliptique linéaire du second ordre dont les coefficients dépendent de ε. A ce système s'ajoutent les conditions sur les bords supérieurs et inférieurs $\omega_\ell \times \partial I$:

$$B^\varepsilon u = g \tag{3}$$

On notera $x' = (x_1, x_2)$ un point de ω_ℓ et $x = (x', x_3)$ un point de Ω_ℓ. On utilisera les indices grecs $\alpha, \beta, ...$ prenant les valeurs $\{1, 2\}$ et les indices latins $i, j, ...$ prenant les valeurs $\{1, 2, 3\}$. Précisément on pose $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$, $e^\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta} & \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3} \\ \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3} & \frac{1}{\varepsilon^2} e_{33} \end{pmatrix}$, $\sigma_{ij} = \lambda e^\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e^\varepsilon_{ij}$ pour $\lambda, \mu > 0$, et $\sigma^\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\beta} & \frac{1}{\varepsilon}\sigma_{\alpha 3} \\ \frac{1}{\varepsilon}\sigma_{\alpha 3} & \frac{1}{\varepsilon^2}\sigma_{33} \end{pmatrix}$. Ainsi $(L^\varepsilon u)_j = -\partial_i \sigma^\varepsilon_{ij}$ et $(B^\varepsilon u)_j = \sigma^\varepsilon_{3j}$. On a alors le

Théorème 1 (Comparaison 3d-2d, modèle de Kirchhoff-Love)
Pour simplifier l'énoncé on choisit $g = 0$. Pour $\lambda, \mu > 0$ fixés, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\ell \geq 1$, il existe une solution u de (2)-(3) vérifiant

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\ell}\left|e_{\alpha 3}(u - u_0)\right|_{L^2(\Omega_\ell)} \\[2ex] \dfrac{1}{\ell^2}\left|e_{33}(u - u_0)\right|_{L^2(\Omega_\ell)} \end{array}\right\} > C\varepsilon\left(\sum_\alpha |f_\alpha|_{L^2(\Omega_\ell)} + \varepsilon|f_3|_{L^2(\Omega_\ell)}\right)$$

où u_0 est la solution du modèle de Kirchhoff-Love classique (qui vérifie d'ailleurs $e_{i3}(u_0) = 0$, cf. Ciarlet [4]).

Nous montrons qu'on peut obtenir une estimation d'erreur avec des constantes indépendantes de la taille de l'ouvert Ω_ℓ, mais au prix du remplacement du modèle de Kirchhoff-Love par un nouveau modèle de Kirchhoff-Love d'ordre supérieur dont la solution u_ε dépend de ε, et est donnée par (4)-(5).

Théorème 2 (Comparaison 3d-2d, nouveau modèle)
Pour simplifier l'énoncé on choisit $g = 0$. Il existe une constante $C = C(\lambda, \mu) > 0$ telle que toute solution u de (2)-(3) vérifie

$$\left.\begin{array}{l} \left|e^\varepsilon_{ij}(u - u_\varepsilon)\right|_{L^2(\Omega_\ell)} \\[2ex] \left|\partial_3\left(e^\varepsilon_{ij}(u - u_\varepsilon)\right)\right|_{L^2(\Omega_\ell)} \\[2ex] \varepsilon\left|\partial_\alpha\left(e^\varepsilon_{ij}(u - u_\varepsilon)\right)\right|_{L^2(\Omega_\ell)} \end{array}\right\} \leq C\varepsilon\left(\sum_\alpha |f_\alpha|_{L^2(\Omega_\ell)} + \varepsilon|f_3|_{L^2(\Omega_\ell)}\right)$$

où u_ε est la solution du modèle de Kirchhoff-Love d'ordre supérieur, donnée par (4)-(5).

On obtient aussi des estimations similaires dans les normes $W^{k,p}, C^{k,\alpha}$. Le fait que la constante C ne dépende pas de la taille de l'ouvert Ω_ℓ est lié à la méthode de preuve qui donne des estimations uniformes.

II. UN NOUVEAU MODELE DE PLAQUE: LE MODELE DE KIRCHHOFF-LOVE D'ORDRE SUPERIEUR

La solution u_ε du nouveau modèle de Kirchhoff-Love d'ordre supérieur est donnée par

$$u_\varepsilon = U^\varepsilon(\zeta) := \begin{pmatrix} \zeta_\alpha - x_3\partial_\alpha\zeta_3 & + & \varepsilon^2\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{x_3^2}{2}\partial_\alpha \mathrm{div}\,'\zeta + a(x_3)\partial_\alpha\Delta'\zeta_3\right) \\ \\ \zeta_3 & + & \varepsilon^2\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(-x_3\mathrm{div}\,'\zeta + \frac{x_3^2}{2}\Delta'\zeta_3\right) \end{pmatrix} \tag{4}$$

où

$$\mathrm{div}\,'\zeta = \partial_1\zeta_1 + \partial_1\zeta_2, \quad \Delta' = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad a(x_3) = \left(\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\right)\frac{x_3^3}{3!} - 2\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)x_3$$

et où $\zeta(x_1,x_2)$ est tel que $U^\varepsilon(\zeta) \in \left(H^1\left(\Omega_\ell\right)\right)^3$ et

$$a^\varepsilon(U^\varepsilon(\zeta), U^\varepsilon(\xi)) = l(U^\varepsilon(\xi)), \quad \forall\xi \in C^\infty(\omega_\ell) \tag{5}$$

où

$$a^\varepsilon(u,v) = \int_\Omega \lambda e_{ii}^\varepsilon(u)e_{jj}^\varepsilon(v) + 2\mu e_{ij}^\varepsilon(u)e_{ij}^\varepsilon(v)$$

et

$$l(v) = \int_\Omega fv + \int_{\omega\times\{+1\}} gv - \int_{\omega\times\{-1\}} gv$$

Il est possible de voir que (5) est équivalent à

$$\begin{cases} a_1\Delta'\zeta_\alpha + a_2\partial_\alpha \mathrm{div}\,'\zeta + \varepsilon^2 a_3\partial_\alpha\Delta'\mathrm{div}\,'\zeta + \varepsilon^4 a_4\partial_\alpha\Delta'^2\mathrm{div}\,'\zeta = p_\alpha + \varepsilon^2\partial_\alpha q \\ \\ a_5\Delta'^2\zeta_3 + \varepsilon^2 a_6\Delta'^3\zeta_3 + \varepsilon^4 a_7\Delta'^4\zeta_3 = p_3 + \varepsilon^2\Delta' q_3 \end{cases} \tag{6}$$

où $a_i, i = 1, ..., 7$ sont des constantes qui s'expriment en fonction de λ, μ, et p_α, p_3, q, q_3 sont des fonctions de $f_3, g_3, \mathrm{div}\,'f, \mathrm{div}\,'g, \lambda, \mu$. En posant formellement $\varepsilon = 0$, (6) redonne les équations du modèle de Kirchhoff-Love classique.

La forme très particulière de $U^\varepsilon(\zeta)$ n'est pas nouvelle car elle est reliée (cf. Raoult [22]) au développement asymptotique de $u = \sum_k \varepsilon^{2k}u^{2k}$, par l'égalité $u^0 + \varepsilon^2 u^2 = U^\varepsilon(\zeta^0) + \varepsilon^2 U^0(\zeta^2)$ pour ζ^0 solution des équations de Kirchhoff-Love et un certain ζ^2. Ce qui est nouveau est de choisir ζ dans l'expression $U^\varepsilon(\zeta)$ non pas comme solution des équations de Kirchhoff-Love, mais comme solution de l'équation (5). Ce choix particulier permet d'obtenir des estimations d'erreurs optimales du point de vue de la régularité avec des constantes indépendantes de la géométrie de la plaque.

III. ESTIMATIONS INTERIEURES POUR UNE PLAQUE NON PERIODIQUE.

Nous obtenons des estimations intérieures $W^{k,p}$ et $C^{k,\alpha}$, optimales du point de vue de la régularité. Donnons à titre d'exemple une application de nos résultats

Théorème 3 (Estimation d'erreur 3d-2d intérieure, nouveau modèle)
Soit $\Omega = \omega \times (-1,1)$ *avec* ω *un ouvert quelconque (eventuellement non borné) de* $\mathbf{R}^2$*, et l'ouvert intérieur*

$$\Omega_d = \omega_d \times I, \quad \text{où ici} \quad \omega_d = \Big\{x' \in \mathbf{R}^2, \quad dist\Big(x', \mathbf{R}^2 \backslash \omega\Big) > d\Big\}$$

Il existe deux constantes $C = C(\lambda, \mu), c = c(\lambda, \mu) > 0$*, telles que pour toute solution* ζ *de (5) sur* ω *avec* $g = 0$*, et pour toute solution* u *de (2)-(3) sur* Ω*, on a l'estimation suivante sur* $w = u - U^\varepsilon(\zeta)$ *:*

$$|e^\varepsilon(w)|_{L^\infty(\Omega_d)} \quad \leq \quad C \left(\begin{array}{l} \varepsilon \left(\sum_\alpha |f_\alpha|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon \, |f_3|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ \\ +e^{-c\frac{d}{\varepsilon}} \left(|e^\varepsilon(w)|_{L^\infty(\Omega)} + |u|_{L^\infty(\Omega)} \right) \end{array} \right)$$

Nos résultats, bien que différents et avec une approche différente, sont reliés à ceux de Mielke [18].

IV. CONCLUSION ET QUESTIONS OUVERTES.
Le nouveau modèle de Kirchhoff-Love d'ordre supérieur que nous avons présenté est un raffinement du modèle de Kirchhoff-Love classique qui approche mieux la solution tridimensionnelle à l'intérieur de la plaque. Une question particulièrement intéressante serait de chercher un modèle equivalent tenant compte des conditions sur le bord $\partial\omega \times I$. Ceci nécessite une étude plus poussée des couches limites (cf. Dauge, Gruais, Rössle [8]). Enfin il serait intéressant d'appliquer notre approche à d'autres problèmes dans des ouverts minces et à des problèmes non linéaires similaires.

REMERCIEMENTS
Je remercie P.G. Ciarlet, M. Dauge, H. Le Dret, F. Murat et A. Raoult pour les discussions stimulantes que nous avons eues ensemble, ainsi que le rapporteur pour ses remarques judicieuses.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math. 12, 623-727 (1959).

[2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. II*, Comm. Pure Appl. Math. 17, 35-92 (1964).

[3] P.G. Ciarlet, *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis.*, R.M.A. 14. Masson and Springer-Verlag, Paris and Heidelberg, 1990.

[4] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol II: Theory of Plates*, North-Holland, Amsterdam, 1997.

[5] P.G. Ciarlet, P. Destuynder, *A justification of the two-dimensional plate model*, J. Mécanique 18 (1979) 315-344.

[6] M. Dauge, I. Gruais, *Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastrée*, Note aux Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, (1995) 375-380.

[7] M. Dauge, I. Gruais, *Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate, I. Optimal error estimates*, Asymptotic Analysis 13 (1996) 197-197.

[8] M. Dauge, I. Gruais, A. Rössle, *The influence of Lateral Boundary Conditions on the Asymptotics in Thin Elastic Plates*, SIAM Journal on Mathematical Analysis 31, 305-345, (2000).

[9] M. Dauge, I. Gruais, A. Rössle, *The influence of Lateral Boundary Conditions on the Asymptotics in Thin Elastic Plates I: clamped and simply supported plates*, Prepublication IRMAR 97-28, Rennes, (1997).

[10] P. Destuynder, *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.

[11] P. Destuynder, *Estimations d'erreur explicites pour le modèle de plaques de Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin*, C. R. Acad. Sci. Paris 325, Série I, 233-238, (1997).

[12] F. John, *Estimates for the Derivatives of the Stress in a Thin Shell and Interior Shell Equations*, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) 235-267.

[13] G. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Schribe*, J. Reine Angew. Math. 40 (1850) 51-58.

[14] J.-L. Lions, *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*, Lecture Notes in Math. 323, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[15] A.E.H. Love, *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Fourth Edition*, Cambridge University Press, Cambridge (reprinted by Dover Publications, New York, 1944).

[16] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singular Perturbed Domains, I*, Operator Theory, Advances and Applications 111, Birkh"auser, (2000).

[17] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singular Perturbed Domains, II*, Operator Theory, Advances and Applications 112, Birkhäuser, (2000).

[18] A. Mielke, *On the Justification of Plate Theories in Linear Elasticity Theory Using Exponential Decay Estimates*, J. of Elasticity, 38 (1995) 165-208.

[19] R. Monneau, *Uniform elliptic estimate for an infinite plate in linear elasticity*, en préparation.

[20] R. Monneau, *Error estimates for a new plate model in linear elasticity*, en préparation.

[21] J.-C. Paumier, *Existence and convergence of the expansion in the asymptotic theory of elastic thin plates*, Math. Modelling and Numerical Analysis 25(3) (1991) 371-391.

[22] A. Raoult, *Construction d'un modèle d'évolution de plaques avec terme d'inertie de rotation*, Annali di Matematica Pura ed Applicata 139, 361-400, (1985).

[23] B.A. Shoikhet, *An energy identity in physically nonlinear elasticity and error estimates of the plate equations*, Prikl. Matem. Mekhan. 40 (2) (1976) 317-326. English translation J. Appl. Maths. Mechs. (1976) 291-301.