Equations aux dérivées partielles / Partial differential equations

# Justification de la théorie non linéaire de Kirchhoff-Love, comme application d'une nouvelle méthode d'inversion singulière

Régis MONNEAU

**Résumé.** Nous considérons dans le cadre de l'élasticité non linéaire une plaque tridimensionnelle isotrope homogène de St Venant-Kirchhoff, d'épaisseur $2\varepsilon$ et périodique dans les deux autres directions. Le problème se ramène par changement d'échelle à un problème non linéaire de perturbations singulières sur un ouvert fixe. Nous introduisons une nouvelle méthode d'inversion singulière. En appliquant cette méthode nous prouvons, pour des forces extérieures suffisamment petites et fixées, que la solution tridimensionnelle en déplacement converge vers la solution du modèle de Kirchhoff-Love non linéaire des plaques lorsque l'épaisseur $2\varepsilon$ tend vers zéro. Le modèle de plaque limite contient en particulier celui de *von Kármán*. Nous donnons aussi une estimation a priori de la vitesse de convergence.

## Justification of the nonlinear Kirchhoff-Love theory, as the application of a new singular inverse method

**Abstract.** In the framework of nonlinear elasticity, we consider a three-dimensional plate made of a St Venant-Kirchhoff isotropic and homogeneous material of thickness $2\varepsilon$ and periodic in the two other directions. By a change of scales, the problem can be mapped on a fixed open set, and seen as a nonlinear singular perturbation problem. We introduce a new singular inverse method. Applying this method, we prove that for fixed and small enough exterior forces, the three-dimensional displacement converges to the solution of the nonlinear Kirchhoff-Love theory of plate as the thickness $2\varepsilon$ tends to zero. The limit plate model contains in particular this one of *von Kármán*. We also give a quantitative estimate of the convergence.

**Abridged English Version**.
We consider a periodic plate of thickness $2\varepsilon$

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \text{with} \quad \omega = \mathbf{R}^2 \backslash \mathbf{Z}^2$$

submitted to exterior volumic forces $f^\varepsilon$ and exterior surfacic forces $g^\varepsilon$. We recall the nonlinear elastic energy

$$\mathcal{E}_{F^\varepsilon}(u^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\lambda}{2} \left(E_{kk}(u^\varepsilon)\right)^2 + \mu \left(E_{kl}(u^\varepsilon) E_{lk}(u^\varepsilon)\right) - f_i^\varepsilon u_i^\varepsilon - \int_{\omega \times \{+\varepsilon\}} g_i^\varepsilon u_i^\varepsilon + \int_{\omega \times \{-\varepsilon\}} g_i^\varepsilon u_i^\varepsilon$$

where

$$E_{ij}(w) = \frac{1}{2}(\partial_i w_j + \partial_j w_i + \partial_i w_k \partial_j w_k)$$

Here we have used the Einstein convention of summation on repeated indices. We are interested in the rescaled quantities defined on $\Omega = \omega \times (-1, 1)$, and we note $u, F = (f, g)$ the quantities defined on $\Omega$ and $u^\varepsilon, F^\varepsilon = (f^\varepsilon, g^\varepsilon)$ the corresponding quantities defined on $\Omega^\varepsilon$ and related by (see Ciarlet [1])

$$u^\varepsilon_\alpha = \varepsilon^2 u_\alpha \qquad f^\varepsilon_\alpha = \varepsilon^2 f_\alpha \qquad g^\varepsilon_\alpha = \varepsilon^3 g_\alpha$$

$$u^\varepsilon_3 = \varepsilon u_3 \qquad f^\varepsilon_3 = \varepsilon^3 f_3 \qquad g^\varepsilon_3 = \varepsilon^4 g_3$$

The quantities indexed by $\varepsilon$ are evaluated at the point $x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \Omega^\varepsilon$ and the quantities without indices $\varepsilon$ are evaluated at the point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. The greek indices take the values $1, 2$. We see that $u^\varepsilon$ is formally a critical point of the energy $\mathcal{E}_{F^\varepsilon}$ if and only if $u$ satisfies the Euler-Lagrange equations that we note

$$\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F \quad \text{on} \quad \Omega$$

where $\mathcal{A}^\varepsilon$ is a quasilinear differential operator including the nonlinear boundary conditions.

**Theorem 1 (3d-2d Convergence and error estimate)**
*There exist $\varepsilon_0, R_0, M > 0$ such that for every $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ and every $F$ satisfying the equilibrium condition (3) such that $|F|_{H^4} < R_0$ (where the norm on $F$ is defined in (5)), there exists a solution $u \in H^3(\Omega)$ of*

$$\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F$$

*beyong the solutions satisfying the normalization condition (4). Moreover if we note $u^0$ the solution for $\varepsilon = 0$ given by the nonlinear Kirchhoff-Love theory, then we can build a "two-dimensionnal solution" $v = u^0 + \varepsilon^2 u^2[u^0]$ where the corrector $u^2[u^0]$ only depends on $u^0$, such that we have*

$$|\nabla^\varepsilon(u - v)|_{H^2(\Omega)} \quad \leq \quad \epsilon M \tag{1}$$

*where $\nabla^\varepsilon$ is defined in (6). Moreover every solution satisfying (1) is unique up to the normalization (4).*

This theorem is a consequence of a new singular inverse method which is a mixing between the requirement of a fixed point theorem and the flexibility of the classical inverse function theorem.

I. PRESENTATION DU RESULTAT.
Nous considérons une plaque périodique d'épaisseur $2\varepsilon$

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \omega = \mathbf{R}^2 \backslash \mathbf{Z}^2$$

soumise à des forces volumiques extérieures $f^\varepsilon$ et des forces surfaciques extérieures $g^\varepsilon$. Nous rappelons l'énergie élastique non linéaire pour un matériau de St Venant-Kirchhoff

$$\mathcal{E}_{F^\varepsilon}(u^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\lambda}{2} \left(E_{kk}(u^\varepsilon)\right)^2 + \mu \left(E_{kl}(u^\varepsilon) E_{lk}(u^\varepsilon)\right) - f^\varepsilon_i u^\varepsilon_i - \int_{\omega \times \{+\varepsilon\}} g^\varepsilon_i u^\varepsilon_i + \int_{\omega \times \{-\varepsilon\}} g^\varepsilon_i u^\varepsilon_i$$

où

$$E_{ij}(w) = \frac{1}{2}(\partial_i w_j + \partial_j w_i + \partial_i w_k \partial_j w_k)$$

Ici nous avons utilisé la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Nous sommes intéressés par les quantités "rescalées" définies sur $\Omega = \omega \times (-1, 1)$, et nous notons $u, F = (f, g)$ les quantités définies sur $\Omega$ et $u^\varepsilon, F^\varepsilon = (f^\varepsilon, g^\varepsilon)$ les quantités correspondantes définies sur $\Omega^\varepsilon$ et reliées par (cf. Ciarlet [1])

$$
\begin{array}{lll}
u_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^2 u_\alpha & \qquad f_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^2 f_\alpha & \qquad g_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^3 g_\alpha \\
\\
u_3^\varepsilon = \varepsilon u_3 & \qquad f_3^\varepsilon = \varepsilon^3 f_3 & \qquad g_3^\varepsilon = \varepsilon^4 g_3
\end{array}
$$

où les quantités indéxées par $\varepsilon$ sont évaluées au point $x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \Omega^\varepsilon$ et les quantités sans indice $\varepsilon$ sont évaluées au point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Les indices grecs prennent les valeurs $1, 2$. Nous voyons que $u^\varepsilon$ est formellement un point critique de l'énergie $\mathcal{E}_{F^\varepsilon}$ si et seulement si $u$ satisfait les équations d'Euler-Lagrange que nous notons sous forme compacte

$$\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{2}$$

où $\mathcal{A}^\varepsilon$ est un opérateur différentiel quasilinéaire incorporant les conditions non linéaires aux bords.

Il est établi dans Ciarlet [1] que toute solution de (2) converge formellement vers une fonction $u^0$ donnée par

$$
u^0 = \begin{cases} u_\alpha^0 = \zeta_\alpha(x') - x_3 \partial_\alpha \zeta_3(x') \\ \\ u_3^0 = \zeta_3(x') \end{cases}
$$

où $x' = (x_1, x_2)$ et $\zeta$ est la solution de l'équation non linéaire des plaques sur $\omega$ (théorie non linéaire de Kirchhoff-Love):

$$
\begin{cases}
-\partial_\beta n_{\alpha\beta}(\zeta) = h_\alpha \\
\\
\dfrac{8\mu(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)} \Delta^2 \zeta_3 - \partial_\beta \left( n_{\alpha\beta}(\zeta) \partial_\alpha \zeta_3 \right) = h_3 \\
\\
\text{où} \quad n_{\alpha\beta}(\zeta) = \dfrac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu} E^0_{\gamma\gamma}(\zeta) \delta_{\alpha\beta} + 4\mu E^0_{\alpha\beta}(\zeta)
\end{cases}
$$

et

$$E^0_{\alpha\beta}(\zeta) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \zeta_\beta + \partial_\beta \zeta_\alpha + \partial_\alpha \zeta_3 \partial_\beta \zeta_3), \quad h_\alpha = IF_\alpha, \quad h_3 = IF_3 + \partial_\alpha I(x_3 F_\alpha)$$

où l'opérateur $I$ est défini par $IF_i(x') = \int_{-1}^{+1} f_i(x', x_3) dx_3 + [g_i(x', x_3)]_{x_3=-1}^{x_3=+1}$.

Toute fonction $u^0$ telle que définie précédemment sera appelée une solution de l'équation

$$\mathcal{A}^0(u^0) = F \quad \text{sur} \quad \Omega$$

pour conserver le même type de notations.

En particulier l'existence d'une telle solution demande formellement que la condition d'équilibre suivante soit satisfaite

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0 \tag{3}$$

et on cherchera alors les solutions $u$ de moyenne nulle

$$\int_\Omega u = 0 \tag{4}$$

**Notations**

Pour une fonction $h$ nous notons $D^l h$ l'ensemble de toutes les dérivées de $h$ jusqu'à l'odre $l \in \mathbf{N}$: $D^l h = \{\partial_1^{l_1}\partial_2^{l_2}\partial_3^{l_3} h\}_{l_i \geq 0, i=1,2,3, l_1+l_2+l_3=l}$ et $D_T^l h = \{\partial_1^{L_1}\partial_2^{l_2} h\}_{l_\alpha \geq 0,\ l_1+l_2=l}$. Pour $k \geq 0$, nous disons que $F = (f,g) \in H^k$ si et seulement si $f \in H^k(\Omega)$ et $g \in H^k(\partial\Omega)$ et nous définissons les normes corespondantes (ce choix n'est pas optimal)

$$|F|_{H^k} = \sum_{l=0}^{k} |D^l f|_{L^2(\Omega)} + |D_T^l g|_{L^2(\partial\Omega)} \tag{5}$$

Nous définissons

$$\nabla^\varepsilon u = \left( \frac{e_{33}(u)}{\varepsilon^2}, \frac{e_{13}(u)}{\varepsilon}, \frac{e_{23}(u)}{\varepsilon}, e_{12}(u), e_{11}(u), e_{22}(u), e_{\bar{13}}(u), e_{\bar{23}}(u), e_{\bar{12}}(u) \right) \tag{6}$$

où

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right) \quad \text{et} \quad e_{\bar{ij}}(u) = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j - \partial_j u_i\right) = -e_{\bar{ji}}(u)$$

De plus étant donnée une fonction $u^0$, nous notons $u^2 = u^2[u^0]$ la fonction

$$u^2[u^0] = \begin{cases} u^2_\alpha = 0 \\ \\ u^2_3 = T\left(e_{33}(u^2)\right) \end{cases}$$

avec $Th = \int_0^{x_3} h(x',s)ds$ pour une fonction générale $h$, et où $e_{33}(u^2)$ est donné par:

$$e_{33}(u^2) = -\left( E^2_{33}(u^0) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} E^0_{\beta\beta}(u^0) \right)$$

$$E^0_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_3 \partial_j u_3), \qquad E^2_{ij}(u) = \frac{1}{2}\partial_i u_\gamma \partial_j u_\gamma$$

Nous sommes maintenant en position pour énoncer précisément notre résultat

**Théorème 1 (Convergence 3d-2d et estimation d'erreur)**
*Il existe $\varepsilon_0, R_0, M > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ et tout $F$ satisfaisant la condition d'équilibre (3) tel que $|F|_{H^4} < R_0$, il existe une solution $u \in H^3(\Omega)$ de*

$$\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F$$

*parmi les solutions satifaisant la condition de normalisation (4). De plus si nous notons $u^0$ la solution pour $\varepsilon = 0$, et $v = u^0 + \varepsilon^2 u^2[u^0]$, alors nous avons*

$$|\nabla^\varepsilon(u - v)|_{H^2(\Omega)} \quad \leq \quad \epsilon M \tag{7}$$

*Pour finir toute solution satisfaisant (7) est unique modulo la normalisation (4).*

Ce résultat résoud (dans le cas à bords périodiques seulement) un problème ouvert signalé dans Ciarlet [1, 3]. Par ailleurs, ce résultat est valable sans hypothèses supplémentaires, contrairement par exemple à celles supposées dans Paumier [16] pour pouvoir appliquer le théorème de Nash-Moser, ou bien celles que l'on trouve dans John [10] où les déformations sont supposées bornées en tout points et seul le cas sans forces de volume est traité.
Signalons qu'il existe des résultats différents dans la cadre de la $\Gamma$-convergence comme ceux de Le Dret, Raoult [14], Friesecke, James, Müller [9]. Enfin mentionnons que la méthode de variété centrale bien connue en théorie des systèmes dynamiques a été appliquée avec succès au cas des poutres droites par Mielke [15].

## II. APPROCHE GENERALE: UNE METHODE D'INVERSION SINGULIERE

La preuve du théorème 1 repose sur une nouvelle méthode d'inversion singulière appliquée à la résolution de l'équation $\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F$ à partir de $\varepsilon = 0$. Cette méthode générale s'applique en cinq étapes. Dans la présentation qui suit, on utilise des normes qui restent abstraites pour faciliter la compréhension.

**Méthode d'Inversion Singulière**

**Etape 1:** Pour $\varepsilon = 0$, la solution $u^0$ de $\mathcal{A}^0(u^0) = F$ peut être obtenue pour $|F| < R_0$, grâce au théorème d'inversion locale classique à partir de la solution particulière $u^0 = 0$ correspondant à $F = 0$.

**Etape 2:** Pour chaque $\varepsilon > 0$, la solution $u$ de $\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F$ peut être obtenue pour $|F| < R_\varepsilon$, grâce au théorème d'inversion locale classique à partir de la solution particulière $u = 0$ correspondant à $F = 0$. (Mais à ce stade, $R_\varepsilon$ n'est pas contrôlé lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro.)

**Etape 3:** Il existe une constante $c = c(R_0) > 0$ telle que pour tout $M > 0$, pour tout $|F| < R_0$, il existe un $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M, R_0) > 0$ tel que pour toute fonction $u$ de l'ensemble

$$K_M^\varepsilon = \left\{u, ||u - u^0|| \leq \varepsilon M\right\}$$

et pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, nous avons

$$(D_u\mathcal{A}^\epsilon(u) \cdot w, w) \quad \geq \quad c|w|^2 \tag{8}$$

ce qui prouve en particulier que $D_u\mathcal{A}^\epsilon(u)$ est inversible.
Remarquons qu'ici la norme $||\cdot||$ est une norme plus forte que la norme $|\cdot|$ sur $w$.

**Etape 4:** A l'aide de (8) et pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, nous prouvons l'*estimation a priori*

$$\exists M > 0, \quad \forall |F| < R_0, \quad (u \in K_M^\epsilon \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^\epsilon(u) = F) \Longrightarrow \left(u \in K^\epsilon_{\frac{M}{2}}\right) \tag{9}$$

**Etape 5:** Conclusion. Grâce à (8), le linéarisé est inversible tant que $u \in K_M^\varepsilon$. Or la solution $u$ ne peut sortir de $K_M^\varepsilon$, car $u \in K_{M/2}^\varepsilon$ par (9). Nous concluons *a posteriori*, que le théorème d'inversion locale classique s'applique à l'étape 2 uniformément en $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, pour toutes les fonctions $F$ vérifiant $|F| < R_0$. De plus l'inégalité (8) implique l'unicité de la solution $u$ sur $K_M^\varepsilon$.

## III. QUELQUES RESULTATS INTERMEDIAIRES

De façon plus précise, pour appliquer notre méthode d'inversion singulière, nous prouvons les deux résultats intermédiaires suivants où on note

$$K_M^\varepsilon(F) = \left\{u \in H^3(\Omega), \quad |\nabla^\varepsilon(u - v)|_{H^2(\Omega)} \leq \varepsilon M\right\}$$

où $v = u^0 + \varepsilon^2 u^2[u^0]$ pour $u^0$ solution de $\mathcal{A}^0(u^0) = F$ avec $|F|_{H^4} < R_0$.

**Proposition 1 (Coercivité)**
*Il existe $\varepsilon_0' = \varepsilon_0'(M, R_0) > 0$ et $c > 0$ tels que pour tout $|F|_{H^4} < R_0$, si $u \in K_M^\varepsilon(F)$ avec $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, alors*

$$\forall w \in H^1(\Omega), \quad (D_u\mathcal{A}^\epsilon(u) \cdot w, w) \quad \geq \quad c|\nabla^\varepsilon w|^2_{L^2(\Omega)}$$

Pour obtenir cette estimation, une borne $L^\infty$ sur $\nabla u$ est nécessaire dans notre approche, c'est la raison pour laquelle nous travaillons avec $u \in H^3(\Omega)$. Par ailleurs notre estimation a priori est la suivante

**Proposition 2 (Estimation a priori)**
*Il existe $M > 0$ et $\varepsilon_0 < \varepsilon_0'(M, R_0)$ tels que si $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ alors pour tout $|F|_{H^4} < R_0$:*

$$(\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F \quad et \quad u \in K_M^\varepsilon(F)) \Longrightarrow \left(u \in K^\varepsilon_{\frac{M}{2}}(F)\right)$$

**REMERCIEMENTS**
Je remercie P.G. Ciarlet, F. Murat et A. Raoult pour les discussions stimulantes que nous avons eues ensemble.

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

[1] P.G. Ciarlet, *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis.*, R.M.A. **14**, Masson and Springer-Verlag, Paris and Heidelberg, (1990).

[2] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol I: Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam.

[3] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol II: Theory of Plates*, North-Holland, Amsterdam, (1997).

[4] D. Coutand, *Analyse mathématique de modèles de plaques et de coques en élasticité non linéaire*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, (2000).

[5] P. Destuynder, *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, (1980).

[6] P. Fife, *Nonlinear deflection of thin elastic plates under tension*, Comm. Pure Appl. Math., **14**, (1961), 81-112.

[7] D. Fox, A. Raoult, J.C. Simo, *Modèles asymptotiques invariants pour les structures minces élastiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, **t. 315**, Série I, p. 235-240, (1992).

[8] D. Fox, A. Raoult, J.C. Simo, *A justification of Nonlinear Properly Invariant Plate Theories*, Arch. Rational Mech. Anal. **124** (1993), 157-199.

[9] G. Friesecke, R.D. James, S. Müller, *Rigourous derivation of nonlinear plate theory and geometric rigidity*, preprint.

[10] F. John, *Estimates for the Derivatives of the Stress in a Thin Shell and Interior Shell Equations*, Comm. Pure Appl. Math. **18**, 235-267, (1965).

[11] F. John, *Refined Interior Equations For Thin Elastic Shells*, Comm. Pure Appl. Math. **24**, 583-615, (1971).

[12] F. John, *Estimates for the error in the equations of non-linear plate theory*, New York Univ., Courant Inst. Math. Sci. , Res. Rep. IMM-NYU **308**, (1963).

[13] F. John, *Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type*, Comm. Pure Appl. Math. **13**, (1960), 239-296.

[14] H. Le Dret, A. Raoult, *The nonlinear membrane model as a variational limit of nonlinear three-dimensional elsticity*, J. Math. Pures Appl. **73**, 549-578, (1995).

[15] A. Mielke, *Saint-Venant's Problem and Semi-Inverse Solutions in Nonlinear Elasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. **102 (3)**, 205-229 (1988).

[16] J.-C. Paumier, *Analyse de certains problèmes non linéaires: modèles de plaques et de coques*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, (1985).

[17] J.-C. Paumier, *Existence theorems for nonlinear elastic plates with periodic boundary conditions*, J. Elasticity **23**, (1990), 233-252.

*R. M. : CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*