Equations aux dérivées partielles / Partial differential equations

Solutions d'équations elliptiques semilinéaires dans $\mathbb{R}^N$ ayant des courbes de niveau de forme conique

François HAMEL et Régis MONNEAU

Résumé. Cette Note traite des propriétés qualitatives et des questions d'existence et d'unicité des solutions (c, u) de l'équation $\Delta u - c\partial_y u + f(u) = 0$ dans $\mathbb{R}^N$, qui modélise une flamme de bec Bunsen. Les fonctions u sont telles que leurs courbes de niveau ont la forme de cônes d'angle fixé α par rapport à la direction verticale vers le bas $-Oy$. Nous définissons plusieurs cadres d'études relatifs à ces conditions à l'infini. Les résultats obtenus reposent sur différentes formes de méthodes de glissement et, suivant les idées de Berestycki, Caffarelli, Nirenberg et Vega, sur des principes de comparaison dans $\mathbb{R}^N$.

Solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with conical-shaped level sets

Abstract. This Note deals with qualitative properties and with the questions of the existence and of the uniqueness of the solutions (c, u) of the equation $\Delta u - c\partial_y u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^N$, which arises in models of Bunsen burner flames. The functions u are such that their level sets are conical-shaped with a fixed aperture α with respect to the direction $-Oy$. We emphasize this problem under several types of asymptotic "conical" conditions. The results are based on various kinds of sliding methods, and following the ideas of Berestycki, Caffarelli, Nirenberg and Vega, on comparison principles in $\mathbb{R}^N$.

Abridged English Version. For any angle $\alpha \in (0, \pi)$, we study the solutions (c, u) of the following semilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$

$$\Delta u - c\partial_y u + f(u) = 0,\ 0 \le u \le 1 \ \text{ in } \mathbb{R}^N = \{x = (x', y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}\} \tag{1}$$

under the condition that $u \simeq 1$ (resp. $u \simeq 0$) far away above (resp. below) a graph which has asymptotic directions of angle α with respect to the vector $(0, \cdots, 0, -1)$. There are several ways to state these conditions. More precisely we examine the following two limiting conditions:

- weak limiting conditions

$$\forall\ 0 \le \delta < \pi - \alpha,\ \liminf_{|x|\to+\infty,\ x\in\mathcal{C}^+(0,\delta)} u(x) = 1 \text{ and } \forall\ 0 \le \delta < \alpha,\ \limsup_{|x|\to+\infty,\ x\in\mathcal{C}^-(0,\delta)} u(x) = 0, \tag{2}$$

where $\mathcal{C}^\pm(y_0, \beta) = \{x = (0, y_0) + \rho\nu,\ |\nu| = 1,\ \rho \in \mathbb{R}^+,\ \ \pm\,\nu_N \ge \cos\beta\}$

- strong limiting conditions: there exists a lipschitz-continuous function $\phi(x')$ such that

$$\lim_{y_0\to+\infty} \inf_{\Omega^+(y_0)} u = 1, \quad \lim_{y_0\to-\infty} \sup_{\Omega^-(y_0)} u = 0 \tag{3}$$

where $\Omega^+(y_0) = \{y > y_0 + \phi(x')\}$, $\Omega^-(y_0) = I\!R^N \backslash \overline{\Omega^+(y_0)}$ and $\lim_{|x'|\to+\infty} (\nabla\phi(x') + \frac{x'}{|x'|}\cot\alpha) = 0$. In particular condition (3) is stronger than (2).

The function f is given and is of ignition temperature type: $\exists\theta \in (0,1)$, $f \equiv 0$ on $[0,\theta]\cup\{1\}$, $f > 0$ on $(\theta, 1)$ and $f'(1) < 0$. The reaction-diffusion equation (1) arises in models of conical-shaped Bunsen flames. In the one-dimensional case, this problem is reduced to

$$\begin{cases} u_0'' - c_0 u_0' + f(u_0) = 0 & \text{in } I\!R \\ u_0(-\infty) = 0, \ u_0(+\infty) = 1 \end{cases}$$

and there exists a unique pair (c_0, u_0) solution, up to translation for u_0 (see [1], [5], [10]).

For (1), (2), (3), the only known result has been proved by Bonnet and the first author [7]: if $N = 2$ and $\alpha \le \pi/2$, then there exists a solution (c, u^*) of (1)-(2) and the speed c is necessarily given by the formula $c = c_0/\sin\alpha$. This result is completed by the following theorems, whose proofs are detailed in [9].

Theorem 1 *If $N \ge 2$ and $\alpha > \pi/2$, there is no solution (c, u) either of (1)-(2) or of (1),(3).*

Remark 1 *Physically speaking, theorem 1 means that you cannot have a flame pointing downwards if the flow of gas goes upwards.*

Theorem 2 *If $N = 2$ and $\alpha \le \pi/2$, then (c, u^*) (the solution of (1)-(2) constructed in [7]) is also a solution of (1),(3) where ϕ can be any level curve ϕ_λ of u^* defined by $\{y = \phi_\lambda(x')\} = \{u^*(x', y) = \lambda\}$, for any $\lambda \in (0,1)$.*

Theorem 3 *Let $N \ge 2$, $\alpha \le \pi/2$ and (c, u) be a solution of (1),(3). Then $c = c_0/\sin\alpha$ and $\partial_\tau u \ge 0$ for any nonzero direction $\tau \in \mathcal{C}^+(0, \alpha)$. As a consequence, if $\alpha = \pi/2$, then $(c, u) = (c_0, u_0)$ is the unique solution of (1),(3), up to translation for u.*

Consider now the problem (1),(3) for which we require that there exist a function ϕ such that $\sup |\phi(x') + |x'|\cot\alpha| < \infty$, that is to say that u satisfies:

$$\lim_{y_0\to+\infty} \inf_{\mathcal{C}^+(y_0,\pi-\alpha)} u = 1, \qquad \lim_{y_0\to-\infty} \sup_{\mathcal{C}^-(y_0,\alpha)} u = 0 \tag{4}$$

Theorem 4 *i) (nonexistence) If $N \ge 3$ and $\alpha \ne \pi/2$, or if $N = 2$ and $\alpha > \pi/2$, then there is no solution (c, u) of (1),(4).*
ii) (uniqueness) If $N = 2$ and $\alpha \le \pi/2$, then the solutions (c, u) of (1),(4) are unique and u is equal to u^* (where u^* is the solution of (1)-(2) constructed in [7]), up to translation in (x', y). Furthermore, $(c_0/\sin\alpha, u^*)$ is a solution of (1),(4) if $\lim_{x'\to\pm\infty} u^*(x', -|x'|\cot\alpha) > 0$.
iii) (existence) Lastly, if $N = 2$ and for any angle $\alpha < \pi/2$, there exist functions f for which $(c_0/\sin\alpha, u^*)$ is a solution of (1),(4).

Open problem 1: If $N \ge 3$ and $\alpha < \frac{\pi}{2}$, does there exist any solutions of (1) with the limiting conditions (2) or (3)?

We also prove that if there exists a solution of (1),(4), then there is uniqueness for the problem (1),(3). But we have:
Open problem 2: Is there uniqueness for the problem (1)-(2)?

Most proofs resort to sliding methods like those of Berestycki, Nirenberg [6], to comparisons with suitable sub- or supersolutions or to the device of moving domains rotating around a fixed point. We also make a constant use of the following comparison principle (this theorem is based on results of Berestycki, Caffarelli, Nirenberg [2], [3], [4] and Vega [11]):

Theorem 5 *(Comparison principle) Let $\overline{u}$ and $\underline{u}$ be respectively super- and subsolutions of*

$$\begin{cases} a_{ij}(x')\partial_{ij}\overline{u} + b_i(x')\partial_i\overline{u} + f(x',\overline{u}) \geq 0, \ a \leq \overline{u} \leq b \ \text{in } I\!R^N, \ \lim\limits_{y_0\to+\infty} \inf\limits_{\Omega^+(y_0)} \overline{u} = b \in I\!R \\ a_{ij}(x')\partial_{ij}\underline{u} + b_i(x')\partial_i\underline{u} + f(x',\underline{u}) \geq 0, \ a \leq \underline{u} \leq b \ \text{in } I\!R^N, \ \lim\limits_{y_0\to-\infty} \sup\limits_{\Omega^-(y_0)} \underline{u} = a \in I\!R \end{cases}$$

where a_{ij}, b_i and f satisfy standard ellipticity and regularity assumptions. Besides, f is assumed to be nonincreasing in u in a neighbourhood of $u = a$ and $u = b$ (uniformly in x').
i) Then, there exists $t \in I\!R$ such that: $\forall s \geq t$, $\overline{u}^s = \overline{u}(\cdot, \cdot + s) \geq \underline{u}$ in $I\!R^N$. Let t^* be the smallest of such t's. If $t^* > -\infty$, then $\inf\limits_{\{y=y_0+\phi(x')\}} (\overline{u}^{t^*} - \underline{u}) = 0$ for any $y_0 \in I\!R$.
ii) Besides, if u satisfies both requirements of $\overline{u}$ and $\underline{u}$ (u is a solution), then $\partial_y u > 0$ in $I\!R^N$.

I. CADRES D'ETUDES ET PRINCIPAUX RESULTATS. Nous étudions le problème aux valeurs propres non linéaire suivant posé dans $I\!R^N$: pour tout angle $\alpha \in]0, \pi[$, il s'agit de trouver une vitesse $c \in I\!R$ et une fonction $u \in C^2(I\!R^N)$ telles que

$$\Delta u - c\partial_y u + f(u) = 0, \ 0 \leq u \leq 1 \ \text{ dans } I\!R^N = \{x = (x', y) \in I\!R^{N-1} \times I\!R\} \qquad (5)$$

satisfaisant $u \simeq 1$ (resp. $u \simeq 0$) loin au-dessus (resp. au-dessous) d'un graphe ayant des directions asymptotiques d'angle α par rapport à la verticale vers le bas. Il y a plusieurs manières d'écrire ces conditions. Plus précicément, nous examinons les deux conditions aux limites suivantes :

- conditions faibles

$$\forall\ 0 \leq \delta < \pi - \alpha, \ \liminf_{|x|\to+\infty, \ x\in\mathcal{C}^+(0,\delta)} u(x) = 1 \text{ et } \forall\ 0 \leq \delta < \alpha, \ \limsup_{|x|\to+\infty, \ x\in\mathcal{C}^-(0,\delta)} u(x) = 0, \qquad (6)$$

où $\mathcal{C}^\pm(y_0, \beta)$ désignent les cônes de sommet $(0, y_0)$ et d'angle β par rapport à la verticale vers le haut ou vers le bas: $\mathcal{C}^\pm(y_0, \beta) = \{x = (0, y_0) + \rho\nu, \ |\nu| = 1, \ \rho \in I\!R^+, \ \pm\, \nu_N \geq \cos\beta\}$

- conditions fortes: il existe une fonction ϕ lipschitzienne sur $I\!R^{N-1}$ telle que

$$\lim_{y_0\to+\infty} \inf_{\Omega^+(y_0)} u = 1, \quad \lim_{y_0\to-\infty} \sup_{\Omega^-(y_0)} u = 0 \qquad (7)$$

où $\Omega^+(y_0) = \{y > y_0 + \phi(x')\}$, $\Omega^-(y_0) = I\!R^N \backslash \overline{\Omega^+(y_0)}$ et $\lim\limits_{|x'|\to+\infty} (\nabla\phi(x') + \dfrac{x'}{|x'|} \cot\alpha) = 0$. En particulier la condition (7) est clairement plus forte que (6).

La fonction f est donnée, lipschitzienne et est de type température d'ignition : $\exists\theta \in]0, 1[$ tel que $f = 0$ sur $[0, \theta] \cup \{1\}$, $f > 0$ sur $]\theta, 1[$ et $f'(1) < 0$. Ce problème de réaction-diffusion modélise les flammes prémelangées équidiffusives de becs Bunsen et u représente la température normalisée. Dans la pratique, le problème équivalent est de trouver l'angle α de la flamme, la vitesse c de sortie des gaz étant donnée (cf [8], [12]).

Dans le cas monodimensionnel, le problème se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{r} u_0'' - c_0 u_0' + f(u_0) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \\ u_0(-\infty) = 0, \ u_0(+\infty) = 1 \end{array} \right. \tag{8}$$

Il est bien connu qu'il existe un unique couple (c_0, u_0) solution, u_0 étant strictement croissante et unique à translation près (cf [1], [5], [10]).

Le but de cette Note est de donner différents résultats d'existence, d'unicité ou des propriétés qualitatives pour les solutions (c, u) de l'équation (5) posée dans $\mathbb{R}^N$ avec les conditions asymptotiques (6) ou (7). Les difficultés pour traiter ce problème multidimensionnel viennent d'une part du caractère non borné de $\mathbb{R}^N$ et d'autre part des conditions aux limites quand $|x| \to +\infty$, en particulier du fait que le comportement de u est complètement indéterminé dans les directions d'angle α par rapport à la verticale vers le bas.

Le seul résultat connu pour l'équation (5) avec les conditions (6) ou (7) a été prouvé par Bonnet et le premier auteur [7] : en dimension $N = 2$, pour tout angle $\alpha \in]0, \pi/2]$, il existe une solution (c, u^*) de (5)-(6). De plus la vitesse c est unique et vaut $c = c_0 / \sin \alpha$. Cette dernière formule est naturelle et signifie que la vitesse d'onde plane c_0 est la projection de la vitesse verticale c sur les directions $(\pm \cos \alpha, -\sin \alpha)$. De nombreux problèmes restaient ouverts, notamment le cas $\alpha > \pi/2$, le cas des dimensions supérieures ou encore le cas des conditions (7). Les démonstrations des différents résultats suivants sont détaillées dans [9].

Théorème 1 *Si $N \geq 2$ et $\alpha > \pi/2$, il n'y a pas de solution de (5)-(6) ni a fortiori de (5),(7).*

Remarque 1 *Physiquement le théorème 1 signifie qu'il ne peut exister de flamme pointant vers le bas si le flux de gaz se propage vers le haut.*

Théorème 2 *Si $N = 2$ et $\alpha \leq \pi/2$, alors la solution (c, u^*) (la solution de (5)-(6) construite dans [7]) vérifie le problème (5),(7) en prenant pour fonction ϕ l'une quelconque des courbes de niveau ϕ_λ de u^* définies par $\{y = \phi_\lambda(x')\} = \{u^*(x', y) = \lambda\}$, pour tout $\lambda \in (0, 1)$.*

Théorème 3 *Si $N \geq 2$ et $\alpha \leq \pi/2$, alors toute solution (c, u) de (5),(7) est telle que $c = c_0 / \sin \alpha$ et u est croissante dans toutes les directions du cône $\mathcal{C}^+(0, \alpha)$. En conséquence, si $\alpha = \pi/2$, $(c, u) = (c_0, u_0)$ est l'unique solution de (5),(7), à translation près pour u.*

Enfin, nous définissons une condition aux limites plus forte que les deux précédentes : nous étudions les solutions (c, u) de (5),(7) pour lesquelles il existe une fonction ϕ qui satisfait en outre $\sup |\phi(x') + |x'| \cot \alpha| < \infty$. Cette condition équivaut à la condition aux limites suivante

$$\lim_{y_0 \to +\infty} \inf_{\mathcal{C}^+(y_0, \pi - \alpha)} u = 1, \qquad \lim_{y_0 \to -\infty} \sup_{\mathcal{C}^-(y_0, \alpha)} u = 0 \tag{9}$$

Théorème 4 *i) (non existence) Si $N \geq 3$ et $\alpha \neq \pi/2$ ou si $N = 2$ et $\alpha > \pi/2$, alors le problème (5),(9) n'a pas de solution.*
ii) (unicité) Si $N = 2$ et $\alpha \leq \pi/2$, alors les solutions (c, u) de (5),(9) sont uniques et u est

égale à la solution u^* (la solution de (5)-(6) construite dans [7]) à translation près dans les variables (x', y). Les courbes de niveau de u ont alors des asymptotes dans les deux directions $(\pm \sin\alpha, -\cos\alpha)$. Par ailleurs, $(c_0/\sin\alpha, u^*)$ vérifie (9) dès que $\lim_{x'\to\pm\infty} u^*(x', -|x'|\cot\alpha) > 0$.
iii) (existence) De plus, pour tout $\alpha \in]0, \pi/2[$, il existe des fonctions f telles que $(c_0/\sin\alpha, u^*)$ est solution de (5),(9).

Problème ouvert 1 : Si $N \geq 3$ et $\alpha < \pi/2$, existe-t-il des solutions de (5) avec les conditions aux limites (6) ou (7)?

Nous prouvons aussi que s'il existe une solution au problème (5),(9), alors il y a unicité des solutions de (5),(7). Cependant nous avons :
Problème ouvert 2 : Y-a-t-il unicité des solutions du problème (5)-(6)?

II. PRINCIPE DE COMPARAISON. La plupart des démonstrations reposent sur des méthodes de glissement basées elles-mêmes sur le principe du maximum (*cf* [6]), sur des méthodes de déplacement de domaines par rotation autour d'un point fixe et également sur le principe de comparaison suivant (ce théorème utilise certains résultats de Berestycki, Caffarelli, Nirenberg [2], [3], [4] et Vega [11]).

Théorème 5 (Principe de comparaison) *Soit $\overline{u}$ et $\underline{u}$ des sur- et sous-solutions de*

$$\begin{cases} a_{ij}(x')\partial_{ij}\overline{u} + b_i(x')\partial_i\overline{u} + f(x', \overline{u}) \leq 0, \ a \leq \overline{u} \leq b \ \text{dans } I\!R^N, \ \lim_{y_0\to+\infty} \inf_{\Omega^+(y_0)} \overline{u} = b \in I\!R \\ a_{ij}(x')\partial_{ij}\underline{u} + b_i(x')\partial_i\underline{u} + f(x', \underline{u}) \geq 0, \ a \leq \underline{u} \leq b \ \text{dans } I\!R^N, \ \lim_{y_0\to-\infty} \sup_{\Omega^-(y_0)} \underline{u} = a \in I\!R \end{cases}$$

où $f(x', u)$ est décroissante par rapport à u sur $[a, a']$ et sur $[b', b]$ (uniformément en x') avec a', b' tels que $a < a' < b' < b$. De plus a_{ij}, b_i, f vérifient les hypothèses de régularité suivantes : on suppose qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que $\sum_{1\leq i,j\leq N} a_{ij}(x')\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$; on suppose aussi qu'il existe $\delta \in (0, 1)$ et une constante $C_0 > 0$ tels que $|a_{ij}|_{C^{0,\delta}(I\!R^{N-1})}$, $|b_i|_{C^{0,\delta}(I\!R^{N-1})} \leq C_0$; enfin, f est bornée sur $I\!R^{N-1} \times [a, b]$ et vérifie $|f(\tilde{x}', \tilde{u}) - f(x', u)| \leq C_0(|\tilde{x}' - x'|^\delta + |\tilde{u} - u|)$.
i) Alors, il existe $t \in I\!R$ tel que : $\forall s \geq t$, $\overline{u}^s = \overline{u}(\cdot, \cdot + s) \geq \underline{u}$ dans $I\!R^N$. Soit t^* le plus petit des tels t. Si $t^* \neq -\infty$, alors $\inf_{\{y=y_0+\phi(x')\}} (\overline{u}^{t^*} - \underline{u}) = 0$ pour tout $y_0 \in I\!R$.
ii) De plus, si u satisfait à la fois les hypothèses de $\overline{u}$ et $\underline{u}$ (i.e. u est solution), alors $\partial_y u > 0$ dans $I\!R^N$.

III. PREUVES. *Schéma de la preuve du théorème 3.* Soit u une solution de (5),(7) pour une certaine fonction $\phi(x')$. D'après le théorème 5 ii), u est croissante en y. Par rotation du repère, la propriété de croissance de u dans la direction $e_N = (0, \cdots, 0, 1)$ est aussi vraie dans toute direction $\tau \in (\mathcal{C}^+(0, \alpha))^0$.

Montrons maintenant l'unicité de la vitesse c. Soit $u_k(x', y) = u(x' + x'_k, y + \phi(x'_k))$ et $\phi_k(x') = \phi(x' + x'_k) - \phi(x'_k)$ où $x'_k = (k, 0, \cdots, 0) \in I\!R^{N-1}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut passer à la limite $k \to +\infty$, $u_k \to u_\infty$, $\phi_k \to \phi_\infty$, où u_∞ vérifie (5) et (7) avec ϕ_∞ à la place de ϕ. Des propriétés de ϕ, on déduit que $\{y > y_0 + \phi_\infty(x')\}$ est le demi-espace $\{y > y_0 - x'_1 \cot\alpha\}$. D'après les résultats du paragraphe précédent, u est croissante dans toute direction pointant dans ce demi-espace et u ne dépend donc que d'une seule coordonnée $Y = y\sin\alpha + x'_1\cos\alpha$. La fonction $u = u(Y)$ est alors solution de l'équation différentielle ordinaire $u'' - c \sin\alpha \; u' + f(u) = 0$ sur $I\!R$ avec $u(-\infty) = 0$, $u(+\infty) = 1$. De l'unicité de la solution (c_0, u_0) de (8), on a : $c \sin\alpha = c_0$.

Schéma de la preuve du théorème 4 i). Le résultat de non-existence de solutions (c, u) de (5),(9) en dimension $N \geq 3$ pour des angles $\alpha < \pi/2$ (le cas $\alpha > \pi/2$ découle du théorème 1) résulte de la comparaison de l'éventuelle solution u avec une sous-solution stricte du type $\underline{u}(x', y) = u_0((y - \phi(x')) \sin\alpha)$ où $\phi(x') = \phi(|x'|)$ est telle que sup $(\phi(x') + |x'| \cot\alpha) = +\infty$.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Aronson D.G., Weinberger H.F., Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation, In: Part. Diff. Eq. and related topics, Lectures Notes in Math., Vol. 446, Springer, New York, 1975, pp 5-49.

[2] Berestycki H., Caffarelli L., Nirenberg L., Symmetry for elliptic equations in a half space, Boundary value problems for partial differential equations and applications, In: RMA Res. Notes Appl. Math. 29, Masson, Paris, 1993, pp 27-42.

[3] Berestycki H., Caffarelli L., Nirenberg L., Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipschitz domains, preprint.

[4] Berestycki H., Caffarelli L., Nirenberg L., Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains, preprint.

[5] Berestycki H., Nicolaenko B., Scheurer B., Traveling waves solutions to combustion models and their singular limits, SIAM J. Math. Anal. 16, 6 (1985), 1207-1242.

[6] Berestycki H., Nirenberg L., On the method of moving planes and the sliding method, Bol. da Soc. Braseleira de Matematica 22 (1991), 1-37.

[7] Bonnet A., Hamel F., Existence of a non planar solutions of a simple model of premixed Bunsen flames, preprint Labo. Ana. Num. Paris VI, France, 1997.

[8] Buckmaster J.D., Ludford G.S.S., Lectures on Mathematical Combustion, CBMS-NSF Conf. Series in Applied Math., 43, SIAM, 1983.

[9] Hamel F., Monneau R., Solutions of semi-linear elliptic equations in $I\!R^N$ with conical-shaped level sets, preprint CERMICS, France, 1998.

[10] Kanel' Ya.I., The stationary solution of the set of equation in the theory of combustion, Dokl. Phys. Chem. 149 (1963), 241-243.

[11] Vega J.M., On the uniqueness of multidimensional travelling fronts of some semilinear equations, J. Math. Anal. Appl. 177 (1993), 481-490.

[12] Williams F., Combustion Theory, Addison-Wesley, Reading MA, 1983.

F. H. : CNRS - Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI et *M.I.T.*
R. M. : CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées