Table des matières

1 Introduction

Ce travail est tirée entièrement de l'article [17]. Cet article m'a été proposé par M. Régis MONNEAU (CERMICS-ENPC).

Dans ce mémoire, on analyse la relaxation des solutions faibles pour le système des lois de conservation suivant

$$\begin{cases} \rho_t + m_x \\ \mu_t + (\dfrac{m^2}{\rho} + p(\rho))_x = \dfrac{1}{\tau}(Q(\rho) - m) \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) \\ \mu(0,x) = m_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\tau > 0$; $p(\rho) = h\rho^\gamma$, $1 < \gamma < 3, h = \frac{\theta^2}{2}$ et $Q(\rho) = a\rho(1-\rho), a > 0.$ et la condition initial $\rho_0(x), m_0(x)$ sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Nous voulons prouver que ce système se détend, en tant que $\tau \to 0$, à la loi de conservation scalaire

$$\rho_t + Q(\rho)_x = 0 \tag{1.2}$$

Ce type de modèles a été introduit par Whitham dans [16] afin d'étudier l'écoulement du trafic sur les autoroutes. Un moyen plus simple de décrire ce phénomène est donné par la loi de conservation scalaire

$$\rho_t + (\rho \upsilon)_x = 0, \tag{1.3}$$

où la vitesse de découlement υ est positive, croissante fonction de la densité ρ, nommée :

$$\upsilon = V(\rho); V(\rho) > 0; V'(\rho) < 0. \tag{1.4}$$

Le système (1,1) peut être obtenu en remplaçant la relation (1,4) avec la relation suivante :

$$\upsilon_t + \upsilon\upsilon_x = -\frac{1}{\tau}\left\{\upsilon - V(\rho) + \tau p'(\rho)\frac{\rho_x}{\rho}\right\}, \tag{1.5}$$

qui prend en compte les réactions des pilotes à des changements sur la route (il ya une sorte de diffusion d'informations le long de la route). De plus, on suppose qu'ils aient un temps de réponse τ non nul. Il est possible de prouver l'existence globale pour les solutions classiques du système (1,3) (1,6) (voir [14]), avec une formulation légèrement différente equation,soit :

$$\upsilon_t + \upsilon\upsilon_x = -\frac{1}{\tau}\left\{\upsilon - V(\rho) + \nu\frac{\rho_x}{\rho}\right\}; \tau, \quad \nu > 0. \tag{1.6}$$

Les phénomènes de relaxation sont importantes, car elles se posent dans des nombreuses situations physiques comme les théories de la cinétique, la réaction chimique des flux et dans la théorie des ondes linéaires et non linéaires.La première approche de ce problème a été fait par Whitham dans son livre [16]. Plus tard, il y a eu plusieurs études rigoureuses sur le sujet, comme dans les papiers de Liu [10] et Chen, Levermore et Liu [1]. Dans la section 2, nous aurons l'estimations fondamental $L^{\infty}(\mathbb{R})$ en utilisant la géométrie spéciale de la représentation graphique de ; $Q(\rho)$ et la théorie de la domaine invariante ,Ensuite, nous dérivons une estimation de l'énergie qui a mis en évidence la nature dissipative de la relaxation et qui donne le taux de convergence vers l'équilibre quand $\tau \to 0$ .Cette estimation est obtenue en vertu de certaines restrictions, mathématiques, lorsque les conditions d'entropie sont donnés par la disparition de viscosité artificielle (le genre de rapprochement avec la compensation compacité cadre), alors que l'existence d'aucune restriction si l'on utilise la plus raisonnable (à partir de la point de vue de la physique) en voie de disparition Navier Stokes viscosité.En tant que sous l'effet de ces estimations, nous obtenons l'existence de la solutions faible de l'entropie pour la modèle hydrodynamique pleine, pour toute $\tau > 0$ fixée. Dans la section 3 nous permettra de prouver la convergence, en tant que $\tau \to 0$, de la solutions faible de l'entropie de (1,1) à la de la solutions faible de l'équation scalaire. (1,2). La méthode utilisée dans cette section est lié à [1]. La résultat de convergence est obtenu loin de vide. La section 4 suivante est consacrée à l'étude de la validité des conditions d'entropie vers la relaxation de la loi de conservation (1,2).Bien que le flux $Q(\rho)$ est une fonction concave, l'absence de la limite maximale de principe pour le système de rapprochement, il est difficile de montrer le type Oleinik de l'inégalité entropique.Ainsi, nous montrons l'inégalités entropique de type Kruz kov . Ce résultat est obtenu par une analyse minutieuse de la régularisation des prolongations de la Kruz kov-type entropies pour l'Equation (1,2) vers l'entropies du système initial (1,1).La principale difficulté qui est nécessaire pour surmonter consiste à trouver un domaine autour de la courbe d'équilibre, indépendante de κ , où les entropies η_κ sont simultanément strictement convexe et vérifier η^{κ}_{mm} . Afin d'accomplir cette tâche, nous allons profiter de quelques résultats sur l'équation linéaire hyperbolique de l'entropie, qui sont exposés dans l'annexe A.La dernière section est consacrée à l'unicité de la solutions faible de l'entropie de l'équation (1,2). Il est bien connu (voir [8, 6, 15]) que, à cette fin, les conditions d'entropie doit être complétée par la L^1 continuité de la semigroupe en t = 0. La principale difficultée est due à la formation d'une première couche qui génère une production d'entropie. On prouve le caractère unique lorsque les premières données sont en équilibre.voiçi les valeurs propres associées au système hyperbolique (1.1)

$$\lambda_1(\rho, m) = \frac{m}{\rho} - \theta\rho^{\theta}$$

et

$$\lambda_2(\rho, m) = \frac{m}{\rho} + \theta\rho^{\theta}$$

et voiçi les invariantes de Riemmann

$$\omega_1 = \frac{m}{\rho} + \int_0^{\rho} \frac{\sqrt{p'(s)}}{s} ds = \frac{m}{\rho} + \rho^{\theta}.$$

et

$$\omega_2 = \frac{m}{\rho} - \int_0^\rho \frac{\sqrt{p'(s)}}{s} ds = \frac{m}{\rho} - \rho^\theta.$$

Notez que le système n'est pas strictement hyperbolique car les valeurs propres peuvent être égales. Par conséquent,on a besoin de la condition de stabilité suivante :

$$\lambda_1(\rho, Q(\rho)) < Q'(\rho) < \lambda_2(\rho, Q(\rho))$$

et dans notre cas :

$$\text{(SC)} \quad -\theta\rho^{\frac{\gamma-3}{2}} < a < \theta\rho^{\frac{\gamma-3}{2}}, \quad 0 < \rho \leq 1$$

2 ESTIMATIONS A PRIORI ET EXISTENCE

Dans cette section, nous étudions le problème de l'existence de la solution du système (2,2) pour $\tau > 0$ fixe, sous la condition de stabilité (1,7). En particulier, nous allons prouver le théorème suivant :

theoreme 2.1 *Soit* $(\rho_0, m_0) \in \Sigma$ *tel que :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^*(\rho_0(x), m_0(x))dx < +\infty$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\eta}(\rho_0(x), m_0(x))dx < +\infty$$

et soit $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$ *la solution de (2.3) avec* (ρ_0, m_0) *est la condition initial.Enfin, nous supposerons qu'on a la condition de stabilité (1,7). Alors : on obtient (on terme de sous suite)* $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon) \to (\rho, m)$ *fortement dans* L^p_{loc} *pour tout* $p < +\infty$ *quand* $\varepsilon \to 0$*, où* (ρ, m) *est une solution de (2.2) avec* $(\rho_0(x), m_0(x))$ *est la condition initial, et qui vérifie l'inégualité d'entropie suivante :*

$$\eta(\rho, m)_t + q(\rho, m)_x \leq \frac{1}{\tau}\eta_m(\rho, m)(Q(\rho) - m) \qquad dans\ \mathcal{D}' \tag{2.1}$$

pour toute entropie convexe η *avec flux* q

La preuve de ce théorème est reportée à la fin de la section. Nous commençons par recueillir des estimations préliminaires.
voiçi le système :

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = 0 \\ m_t + \left(\dfrac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right)_x = \dfrac{1}{\tau}(Q(\rho) - m), \end{cases} \tag{2.2}$$

et le système parabolique suivante, est l'estimation viscosité artificielle de (2.2) :

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon_t + m^\varepsilon_x = \varepsilon\rho^\varepsilon_{xx} \\ m^\varepsilon_t + \left(\dfrac{(m^\varepsilon)^2}{\rho^\varepsilon} + p(\rho^\varepsilon)\right)_x = \dfrac{1}{\tau}(Q(\rho^\varepsilon) - m^\varepsilon) + \varepsilon m^\varepsilon_x x. \end{cases} \tag{2.3}$$

Lemme 2.2 *soit* $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$ *une solution du système (2.3), avec la condition initiale* $(\rho_0(x), m_0(x))$*. Si* ρ_0 *et* m_0 *sont dans* $L^\infty(\mathbb{R})$ *et si la condition (SC) est vérifiée alors* $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$ *est uniformement bornée dans* L^∞*par rapport à* ε *et* τ*.*

Preuve :
On sait que pour certaines constantes ω_{10} et ω_{20}, chaque région Σ de la forme

$$\Sigma = \{(\rho, m)/\omega_1 \leq \omega_{10}\ et\ \omega_2 \geq \omega_{20}\} \tag{2.4}$$

est un domaine invariant pour le systhème parabolique

$$\begin{cases} \rho_t^\varepsilon + m_x^\varepsilon = \varepsilon \rho_x^\varepsilon x \\ m_t^\varepsilon + \left(\dfrac{(m^\varepsilon)^2}{\rho^\varepsilon} + p(\rho^\varepsilon) \right)_x = \varepsilon m_{xx}^\varepsilon. \end{cases}$$

où ω_1 et ω_2 désignent les invariantes de Riemann pour le système (2.2). On peut choisir ω_{10} et ω_{20} tel que/

$$\omega_1 = \omega_{10} \quad et \quad \omega_1 = \omega_{10}. \tag{2.5}$$

Puis, après la transformation suivante :

$$\begin{cases} R(y,s) = \rho(\tau y, \tau s) \\ M(y,s) = m(\tau y, \tau s) \end{cases}$$

Et le système (2.2) est transformé au système suivant :

$$\begin{cases} R_s + M_y = 0 \\ M_s + \left(\dfrac{M^2}{R} + p(\rho) \right)_y = Q(R) - M, \end{cases}$$

Et le temps de relaxation a été éliminée.
Voiçi le rapprochement par la viscosité artificielle du système çi dessus :

$$\begin{cases} R_s^\varepsilon + M_y^\varepsilon = \varepsilon R_{yy}^\varepsilon \\ M_s^\varepsilon + \left(\dfrac{(M^\varepsilon)^2}{R^\varepsilon} - p(R^\varepsilon) \right)_y = Q(R^\varepsilon) - M^\varepsilon + \varepsilon M_{yy}^\varepsilon. \end{cases} \tag{2.6}$$

Comme nous l'avons dit précédemment, le système homogène associé à (2.6) a une région invariant Σ
D'autre part d'après le choix particulier pour les constantes dans (2.5), la courbe $M = Q(R)$, $\omega_1(R,M) = \omega_{10}$ et $\omega_2(R,M) = \omega_{20}$ se coupent aux points $(0,0)$ et $(1,0)$. Soient $M = M_1(R)$ et $M = M_2(R)$ respectivement les formes explicites de $\omega_1(R,M) = \omega_{10}$ et $\omega_2(R,M) = \omega_{20}$,et la condition de stabilité (SC) nous donne :

$$M_2'(0) < Q'(0) < M_1'(0), \tag{2.7}$$

et

$$M_1'(1) < Q'(1) < M_2'(1), \tag{2.8}$$

Et puisque les courbes de $M = M_1(R)$ et $M = Q(R)$ sont convexes et celle de $M = M_2(R)$ est concave alors la courbe $M = Q(R)$ se trouve entre les deux autres courbes.
D'autre part le champs vecteur $(0, Q(R) - M)$ montre que puisque $(\rho_0, m_0) \in \Sigma$ alors $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon) \in \Sigma$ et finalement il est borné dans L^∞ uniformement par rapport à ε et τ.

Le résultat suivant fournit l'existence d'une entropie qui est strictement convexe, proche de l'équilibre et la courbe qui permet d'établir des estimations de l'énergie nécessaire pour contrôler le taux de convergence sur le processus de relaxation.

Proposition 2.3 *Considéron*

$$\overline{\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{m - Q(\rho)^2}{\rho}\right)^2 + g(\rho),$$

avec $g"(\rho) = \theta^2\rho^{\gamma-3} - a^2$ *; et supposons qu'on a la condition de stabilité (SC),alors* $\overline{\eta}$ *est entropie positive de classe* C^2 *qui satisfait*

$$D^2\overline{\eta}(\rho, m) \geq 0$$

pour tout (ρ, m) *tel que*

$$a\rho - \theta^2\rho^{\frac{\gamma+1}{2}} \leq m \leq a\rho - \theta^2\rho^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Preuve :
L'équation de l'entropie du système (2,2) après le changement de variables $(\rho, u = \frac{m}{\rho})$est donnée par :

$$\eta(\rho, u)_{\rho\rho} = \theta^2\rho^{\gamma-3}\eta(\rho, u)_{uu}. \tag{2.9}$$

et à l'aide du changement $u = a(1 - \rho) + z$. on obtient :

$$\eta(\rho, z)_{\rho\rho} + 2a\eta(\rho, z)_{\rho z} = A(\rho)\eta(\rho, z)_{zz}, \tag{2.10}$$

avec $A(\rho) = \theta^2\rho^{\gamma-3} - a^2 > 0$ d'après (SC).
L'Equation (2,10) admet une solution convexe par rapport aux variables (ρ, z) et prendre la forme :

$$\eta(\rho, z) = f(z) + g(\rho).$$

Et dans notre cas :

$$\overline{\eta}(\rho, z) = \frac{1}{2}z^2 + g(\rho).$$

avec $g(\rho)$ peut être choisir tel qu'elle soit positive. maintenant on a :

$$\mathrm{Tr}D^2\overline{\eta}(\rho, m) = \overline{\eta}_{\rho\rho} + \overline{\eta}_{mm} = \theta^2\rho^{\gamma-3} + 3\frac{m^2}{\rho^4} - 2\frac{ma}{\rho^3} + \frac{1}{\rho^2} = \theta^2\rho^{\gamma-3} + 2\frac{m^2}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{m}{\rho} - a\right)^2 + \frac{1 - a^2}{\rho^2} \geq 0,$$

et

$$\det D^2(\rho, m) = \overline{\eta}_{\rho\rho}\overline{\eta}_{mm} - \overline{\eta}_{\rho m}^2 = \frac{1}{\rho^6}\left(\theta^2\rho^{\gamma+1} - (m - a\rho)^2\right) \geq 0.$$

ssi

$$a\rho - \theta\rho^{\frac{\gamma+1}{2}} \leq m \leq a\rho + \theta\rho^{\frac{\gamma+1}{2}}. \tag{2.11}$$

notant

$$K_0 = \left\{(\rho, m)/D^2\overline{\eta}(\rho, m) \geq 0\right\}. \tag{2.12}$$

Lemme 2.4 *Soit* $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$ *une solution du système parabolique (2.3) avec la condition initial* $(\rho_0, m_0) \in \Sigma$ *qui vérifie :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\eta}(\rho_0(x), m_0(x))dx < +\infty.$$

Supposons de plus que $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon) \in K_0$ et qu'on a la condition (SC) alors

$$\left\| \frac{Q(\rho^\varepsilon) - m^\varepsilon}{\rho^\varepsilon \sqrt{\tau}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,T])} \leq C, \tag{2.13}$$

où $C > 0$ et est indépendente de ε ,τ et T.

Preuve :
notant par $D^2\overline{\eta}[\rho_x, m_x]$la forme quadratique en (ρ_x, m_x) associée à la matrice hessienne $D^2\overline{\eta}(\rho, m)$.
on a :

$$\overline{\eta}_t + \overline{q}_x = \varepsilon\overline{\eta}_\rho \rho xx + \varepsilon\overline{\eta}_m m_{xx} + \frac{1}{\tau}\overline{\eta}_m(Q(\rho) - m) = \varepsilon\overline{\eta}_{xx} - \varepsilon D^2\overline{\eta}[\rho_x, m_x] + \frac{1}{\tau}\overline{\eta}_m(Q(\rho) - m), \tag{2.14}$$

en intégrant en x et t on obtient :

$$0 \leq \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(m - Q(\rho))^2}{\rho^2\tau} dxdt \leq$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\eta}(\rho(x,T), m(x,T))dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\eta}(\rho_0(x), m_0(x))dx \leq$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\eta}(\rho_0(x), m_0(x))dx \leq C.$$

Remarque 2.5

$$\left\| \frac{Q(\rho^\varepsilon) - m^\varepsilon}{\rho^\varepsilon \sqrt{\tau}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,T])} \leq C \Rightarrow$$

$$\left\| \frac{Q(\rho^\varepsilon) - m^\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,T])} = O(1),$$

uniformement par rapport à ε, τ et T.
par conséquence nous avons prouvé que $Q(\rho^\varepsilon) - m^\varepsilon \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R} \times [0,T])$ quant $\tau \to 0$ avec un taux de $\sqrt{\tau}$.

Maintenant, nous voulons examiner une autre approximation du système (2.2) : le rapprochement physique de viscosité, le système suivant (uni-dimensionnel système de Navier Stokes) :

$$\begin{cases} \rho_t^\varepsilon + m_x^\varepsilon = 0 \\ m_t^\varepsilon + \left(\dfrac{(m^\varepsilon)^2}{\rho^\varepsilon} + p(\rho^\varepsilon) \right)_x = \dfrac{1}{\tau}(Q(\rho^\varepsilon) - m^\varepsilon) + \varepsilon(\dfrac{m^\varepsilon}{\rho^\varepsilon})_{xx}. \end{cases} \tag{2.15}$$

En particulier, nous montrons que le résultat du lemme (2.4) peut être obtenu sans l'hypothèse $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon) \in K_0$. en effet soit (ρ_0, m_0) comme dans le lemme (2.4) et soit $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$une solution de (2.15) avec la condition initial (ρ_0, m_0). dans ce cas $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$ vérifie l'inégalité d'entropie suivante :

$$\eta(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_t + q(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_x \leq \varepsilon(\nabla\eta(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)B(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)(\rho_x^\varepsilon, m_x^\varepsilon))_x + \frac{1}{\tau}\eta_m(\rho_x^\varepsilon, m_x^\varepsilon)(Q(\rho^\varepsilon) - m^\varepsilon), \tag{2.16}$$

pour tout η tel que :

$$D^2\eta(\rho,m)B(\rho,m) \geq 0, \tag{2.17}$$

où

$$B(\rho,m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{m}{\rho^2} & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}.$$

vérifiant maintenant (2.17) pour l'entropie $\overline{\eta}$,

$$\mathrm{Tr}(D^2\overline{\eta}(\rho,m)B(\rho,m)) = \frac{1}{\rho^3}\left(\frac{2m^2}{\rho} - \frac{am}{\rho} + 1\right) = \frac{1}{\rho^3}\left[\left(\frac{m}{\rho} - \frac{a}{2}\right) + 1 - \frac{a^2}{4}\right] + \frac{m^2}{\rho^5} \geq 0, \tag{2.18}$$

d'autre part, pour tout matrice 2×2, $M(\rho,m)$ on a :

$$\det(M(\rho,m)B(\rho,m)) = 0 \tag{2.19}$$

en particulier $\det(D^2\overline{\eta}(\rho,m)B(\rho,m)) = 0$ et alors $\overline{\eta}$ vérifie (2.17).
Ainsi, l'inégalité (2.16) est vrai pour tout (ρ,m) sans l'hypothèse $(\rho,m) \in K_0$.

Lemme 2.6 *Soit (ρ_0,m_0)comme dans le lemme (2.4) et soit $(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)$ une solution de (2,15) avec la condition initial (ρ_0,m_0). supposons de plus que $0 \leq \rho^\varepsilon, m^\varepsilon \in L^\infty$ uniformement par rapport à ε et τ et qu'on a la condition de stabilité (1.7).Alors*

$$\left\| \frac{Q(\rho^\varepsilon) - m^\varepsilon}{\rho^\varepsilon\sqrt{\tau}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,T])} \leq C, \tag{2.20}$$

où $C \geq 0$ est indépendente de ε, τ, et T.

Considérons maintenant $(\eta^*(\rho,m), q^*(\rho,m))$ l'entropie mécanique et son flux, de la risthème (2.2),où

$$\eta^*(\rho,m) = \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho} + \frac{h}{\gamma-1}\rho^\gamma = \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho} + \sigma(\rho).$$

Lemme 2.7 *Soit (ρ_0,m_0)comme dans le lemme (2.4) tel que :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^*(\rho_0(x), m_0(x))dx < +\infty$$

et soit $(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)$ une solution de (2.3) avec la condition initial (ρ_0,μ_0) et supposons de plus qu'on a la condition de stabilité (SC). Alors pour tout $\tau > 0$ fixée et pour n'importe qu'elle fonction $\Phi \in C_0^\infty$ tel que $\Phi(x) \geq 0$ on a :

$$\varepsilon \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) D^2\eta^*[\rho_x^\varepsilon, m_x^\varepsilon]dxdt \leq C, \tag{2.21}$$

où la constante C est positive dépent seulement de T, ε et la condition initial et ne dépent pas de $0 < \varepsilon \leq 1$.

Preuve :
Multiplier le système (2.3) par $\Phi(x)$ on obtient :

$$(\Phi(x)\eta^*)_t+(\Phi(x)q^*)_x=\varepsilon(\Phi(x)\eta^*_x))_x-\varepsilon\Phi(x)D^2\eta^*[\rho_x,m_x]+\Phi'(x)q^*-(\varepsilon\Phi'(x)\eta^*)_x+\varepsilon\Phi"(x)\eta^*. \tag{2.22}$$

Intégrer alors (2.2) par rapport à x et t, et d'après la convexité et la positivité de η^* et que $\Phi(x)\geq 0$ et le fait que les solution sont dans L^∞ on a :

$$\begin{aligned}0\leq \varepsilon\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)D^2\eta^*[\rho_x,m_x]dxdt\\ \leq\int_{-infty}^{+infty}\Phi(x)\eta^*(\rho(0,x),m(0,x))dx\\ +\int_0^T\int_{-infty}^{+infty}\Phi'(x)q^*dxdt\\ +\varepsilon\int_0^T\int_{-infty}^{+infty}\Phi"(x)\eta^*dxdt\\ +\frac{1}{\tau}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\frac{m}{\rho}(Q(\rho)-m)dxdt\leq C,\end{aligned} \tag{2.23}$$

où $C>0$ est indépendente de $\varepsilon\leq 1$ mais dépend de τ et de T.
L'estimation (2.21) fournit un version local de l'estimation d'énergie , soit K un compact de $\mathbb{R}$ et soit $\Phi\in C_0^\infty$tel que $\Phi(x)\geq 0$ et $\Phi(x)=1$ pour $x\in K$ on obtient :

$$\varepsilon\int_0^T\int_K D^2\eta^*[\rho_x,m_x]dxdt\leq\varepsilon\int_0^T\int-\infty^{+infty}\Phi(x)D^2\eta^*[\rho_x,m_x]dxdt\leq C, \tag{2.24}$$

où $C\geq 0$

Remarque 2.8 *C'est possible de démontrer la version globale de l'estimation (2 ;21)dans le cas des solution $(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)$ de l'équation (2.3) qui appartient à l'ensemble K_0 défini dans (2.12), en utilisant l'estimation (2.13) :*

$$\left\|\frac{Q(\rho)-m}{\rho\sqrt{\tau}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,T])}\leq C.$$

Comme d'habitude, on a :

$$\eta^*_t+q^*_x=\varepsilon\eta^*_{xx}-\varepsilon D^2\eta^*[\rho_x,m_x]+\frac{1}{\tau}\eta^*_m(Q(\rho)-m), \tag{2.25}$$

par intégration par rapport à x et t on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\eta^*(\rho(T,x),m(T,x))dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\eta^*(\rho(0,x),m(0,x))dx\\ &\leq\frac{1}{\tau}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m}{\rho}(Q(\rho)-m)dxdt\\ &\leq\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m^2}{\rho}dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(Q(\rho)-m)^2}{\rho}dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &=O(1)\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m^2}{\rho}dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Soit :

$$F(T) = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^*(\rho, m) dx dt,$$

on otbient alors :

$$F'(T) = \frac{O(1)}{\sqrt{\tau}} (1 + F(T)^{\frac{1}{2}}).$$

et alors :

$$1 + F(T) = \frac{O(1)}{\sqrt{\tau}}.$$

Maintenant on peut prouver le théorème principale de la section (Th (2.1)).
Preuve :
Maintenant nous sommes en mesure d'appliquer la méthode de compacité par compensation pour démontrer la convergence forte de la suite d'approximation $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$. En effet :

$$\frac{1}{\tau} \eta_m^*(\rho, m)(Q(\rho) - m) \in L^\infty,$$

pour tout $\tau > 0$ fixé ,
Alors (2.24) nous permet de conclure que :

$$\eta(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_t + q(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_x \in \text{comp} H_{loc}^{-1},$$

pour toute entropie faible positive η et son flux q, où (2.9) est vérifiée, $\eta(0, u) = 0$ et $\eta_\rho(0, u) = 0$ par la méthode de "compensated compactness" nous avons la forte convergence $\rho^\varepsilon \to \rho$ et $m^\varepsilon \to m$ dans L_{loc}^p pour tout $p < +\infty$ Ainsi, par les mêmes arguments utilisés dans [3, 5, 9], on obtient le résultat d'existence établie au Theorème (2.1).

3 LA LIMITE DE RELAXATION ZÉRO

Dans cette section, nous voulons étudier le comportement du système (2.2) quand le paramètre positif τ tend vers zéro. En particulier, nous sommes intéressés à l'étude de la limite de la fonction $\rho(x,t)$ et de montrer qu'il est une solution faible de la loi de conservation suivante :

$$\rho_t + Q(\rho)_x = 0. \tag{3.1}$$

Pour faire ça, nous limitons les solutions (ρ, m) de (2,2) par celle qui vérifie la condition suivante :

$$\text{(K)} \quad (\rho, m) \in \overline{K} \subset\subset K_0, \quad \text{pour tout } \overline{K} \text{ fixée.}$$

En raison de l'estimation (2.13) obtenus dans la section 2, nous avons le lemme suivante :

Lemme 3.1 *Soit (ρ_0, m_0)comme dans le théorème (1.2) et soit (ρ, m) une solution d'entropie pour le système (2.2) avec la condition initial (ρ_0, m_0), et supposons de plus qu'on a la condition de stabilité (SC) et la condition (K). Alors :*

$$\left\| \frac{Q(\rho) - m}{\rho} \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,T])} = O(1)\sqrt{\tau}. \tag{3.2}$$

Les resultats de convergences obtenues dans cette section est proche des resultats dans [1] mais dans notre cas on a pas la resultat de la petitesse.

Remarque 3.2 *Soit $\rho_0(x)$, $m_0(x)$ dans L^∞ tel que $\rho_0(x) \geq \widehat{\rho}_0 > 0$ et $\rho_0(x)$, $m_0(x)$ approche de l'état $\overline{\rho}$, $\overline{m}$ à l'infini et considérons les foctions $g(\rho)$ et $\sigma(\rho)$ figurant dans la définition de $\overline{\eta}$ et η^*. Et on suppose de plus que :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\eta}(\rho_0(x), m_0(x))dx < +\infty$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^*(\rho_0(x), m_0(x))dx < +\infty,$$

En soustrayant la partie linéaire de g et σ de $\overline{\rho}$. Nous notons que la modification des fonctions sera encore une entropie, car la perturbations linéaire n'affectent pas l'équation de l'entropie et, en raison de la convexité de g et ρ ils seront toujours positives.

theoreme 3.3 *Soit '(ρ^τ, m^τ), une solution d'entropie de (2.2) avec la condition initial $(\rho_0, m_0) \in \Sigma$ tel que $\rho_0 \geq \widehat{\rho}_0$ et tel que :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\eta}(\rho_0(x), m_0(x))dx < +\infty$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^*(\rho_0(x), m_0(x))dx < +\infty,$$

et supposons de plus que (ρ_0, m_0) approche de l'état costante $(\overline{\rho}, \overline{m})$ à l'infinie et que $\rho^\tau \geq \widehat{\rho}_0$ et qu'on a la condition de stabilité (SC) et la condition (K). Alors on peut *extraite une sous suite $\rho^\tau \to \rho$ fortement quand $\tau \to 0$ dans L^p_{loc} pour tout $p < +\infty$. En outre la fonction limite $\rho(x,t)$ parait comme solution faible de la loi deconservation :*

$$\begin{cases} \rho_t + Q(\rho)_x = 0 \\ \rho(x,0) = \rho_0(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

Preuve :
Pour atteindre notre but, il suffit de montrer (voir, par exemple, [2]) que :

$$\rho_t + Q(\rho)_x \in \mathrm{comp} H^{-1}_{loc}$$

et que :

$$Q(\rho)_t + \left(\int_0^\rho (Q'(s))^2 ds \right)_x \in \mathrm{comp} H^{-1}_{loc}.$$

Soit $\psi(\rho)$ le flux d'entropie associée à l'entropie $g(\rho)$ de la relaxation de la loi de conservation (3.3). nous avons :

$$\begin{aligned} g(\rho)_t + \psi(\rho)_x &\leq \overline{\eta}(\rho, Q(\rho))_t - \overline{\eta}(\rho, m)_t \\ &+ \overline{q}(\rho, Q(\rho))_x - \overline{q}(\rho, m)_x \\ &+ \frac{1}{\tau}(\overline{\eta}_m(\rho, m) - \overline{\eta}_m(\rho, Q(\rho)))(Q(\rho) - m) \\ &= I_1^\tau + I_2^\tau + I_3^\tau, \end{aligned}$$

où $\overline{q}(\rho, m)$ est le flux associées à l'entropie $\overline{\eta}(\rho, m)$ de la système (2.2). En utilisant l'estimation de l'énérgie (3.2) dans L^∞, on a :

$$\begin{aligned} \|I_1^\tau\|_{H^{-1}_{loc}} &= \sup_{\Phi \in H^1_0, \|\Phi\|_{H^1_0} \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\rho (\overline{\eta}(\rho, Q(\rho)) - \overline{\eta}(\rho, m))_t \Phi dx dt \right| \\ &= O(1) \left\| \frac{Q(\rho) - m}{\rho} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{Q(\rho) - m}{\rho} \right\|_{L^2} \|\Phi_t\|_{L^2} = O(1)\sqrt{\tau} \end{aligned}$$

et de même

$$\|I_2^\tau\|_{H^{-1}_{loc}} = O(1)\sqrt{\tau}.$$

En outre à partir de (3.2) on a :

$$\|I_3^\tau\|_{L^1} = O(1),$$

alors I_3^τ est relativement compact dans H^{-1}_{loc} parle lemme de Murat[12]. Par conséquence nous pouvons conclure que :

$$g(\rho)_t + \psi(\rho)_x \in \mathrm{comp} H^{-1}_{loc}.$$

Soit $\phi(\rho)$ une fonction dans C_0^∞ tel que $\phi(\rho) = Q(\rho)$ pour $\rho \in [\widehat{\rho}, 1]$. Alors il existe une entropie $\tilde{\eta}(\rho, m)$ de classe C^∞ pour le système (2.2) tel que :

$$\begin{cases} \tilde{\eta}(\rho, 0) = \phi(\rho) \\ \tilde{\eta}_z(\rho, 0) = 0 \end{cases}$$

(voir l'appendixe)
Soit $\widehat{\eta}(\rho, m) = \overline{\eta}(\rho, m) - \mu\tilde{\eta}(\rho, m)$. Ainsi par la condition (K), il s'ensuit que pour un constante $\mu \neq 0$ suffisement petit, $\widehat{\eta}(\rho, m)$ reste strictement convexe.
En outre $\widehat{\eta}(\rho, Q(\rho)) = \overline{\eta}_m(\rho, m) = 0$.
En répétant l'argument précédent, on obtient :

$$(g(\rho) - \mu Q(\rho))_t + \left(\psi(\rho) - \mu \int_0^\rho (Q'(s))^2 ds\right)_x \in \mathrm{comp}H^{-1}_{loc}.$$

Par conséquence il s'ensuit :

$$Q(\rho)_t + \left(\int_0^\rho (Q'(s))^2 ds\right)_x \in \mathrm{comp}H^{-1}_{loc}.$$

Nous pouvons montrer que :

$$\rho_t + Q(\rho)_x = (Q(\rho) - m)_x \in \mathrm{comp}H^{-1}_{loc}$$

d'une façon similaire.
Nous passons maintenant à l'étude d'une autre nature de solutions d'entropie faible pour le système (2.2), les solutions données par les limites de la physique de l'approximation de viscosité . Si nous supposons que ces solutions existent, il est possible de faire une preuve d'une convergence globale quand $\tau \to 0$. En effet, à partir du Lemme (2.6), il s'ensuit que, dans ce cas, l'estimation de l'énergie (3.2) est valable sans l'hypothèse (K). Par conséquent, le résultat de convergence peut être prouvée pour toutes les solutions $\rho, m \in L^\infty avec 0 < \widehat{\rho} \leq \rho$.

theoreme 3.4 *Soit* (ρ_0, m_0) *comme dans le théorème (3.3) et soit* (ρ^τ, m^τ) *une solution faible de (2.2), donnée par la limite quand* $\varepsilon \to o$ *de la solution du système (2.15), avec la condition initial* (ρ_0, m_0). *Supposant que* ρ^τ, m^τ *est bornée dans* L^∞ *uniformement par rapport à* τ *et* $\rho^\tau \geq \rho > 0$. *Supposons finalement qu'on a la condition de stabilité (SC). Alors on peut extraire -si possible- une sous suite,*$\rho \to \rho$ *quand* $\tau \to 0$ *fortement dans* L^p_{loc}, *pour tout* $p < +\infty$. *En outre la fonction limite* $\rho(x,t)$ *parait comme une solution faible de la relaxation de la loi de conservation :*

$$\begin{cases} \rho_t + Q(\rho)_x = 0 \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x). \end{cases}$$

Preuve
Comme dans le théorème (3.3), nous montrerons que :

$$\rho_t + Q(\rho)_x \in \mathrm{comp}H^{-1}_{loc},$$

et

$$Q(\rho)_t + \left(\int_0^\rho (Q'(s))^2 ds\right)_x \in \mathrm{comp}H^{-1}_{loc}.$$

Puisque l'estimation de l'énergie (3.2) est vrai pour toute solution (ρ, m), puis en procédant comme dans la preuve du théorème précédent, on obtient :

$$g(\rho)_t + \psi(\rho)_x \in \mathrm{comp}H^{-1}_{loc}.$$

Soit $\tilde{\eta}$ l'entropie considérée avant et soit $\widehat{\eta}(\rho, m) = \overline{\eta}(\rho, m) - \mu\tilde{\eta}(\rho, m)$. Des relations (2.18) et (2.19) dans la section 2, il en résulte que pour tout constate $\mu \neq 0$ suffisament petite, ne dépend pas que de $\widehat{\rho}$ et de la solution bornée dans L^∞,

$$mboxTr(D^2\widehat{\eta}(\rho, m)B(\rho, m)) \geq 0.$$

Par conséquence :

$$D^2(\widehat{\eta}(\rho, m)B(\rho, m)) \geq 0.$$

Par conséquent, en répétant les arguments précédents à l'entropie $\widehat{\eta}$, on a :

$$(g(\rho) - \mu Q(\rho))_t + \left(\psi(\rho) - \mu \int_0^\rho (Q'(s))^2 ds\right)_x \in \text{comp}H^{-1}_{loc}.$$

La dernière partie de la preuve en est que, tout comme le Théorème (3.3) et il sera supprimé.

4 CONDITION D'ENTROPIE

Dans cette section, nous voulons prouver la validité de la type Kruz-kov des conditions d'entropie pour la solution $\rho(x,t)$ à l'égard de la relaxation de la loi de conservation (3.1). L'inégalité de l'entropie de la loi de conservation scalaire sera obtenue par l'extension du plan (ρ, m) à un paramètre de la famille deKruz kov type d'entropies. Par conséquent, nous sommes tenus d'étendre les types d'entropies Kruz kov de manière à préserver à la fois la convexité et les propriétés dissipatives. Le fait non triviale dans cette procédure d'extension est de trouver un domaine de la prolongation des entropies, de manière uniforme à l'égard de k. En outre, puisque la limite de relaxation est donnée en termes de norme L^p, $p < +\infty$, nous devons exiger que nos solutions sont confinés dans un tel domaine, uniformement par rapport à τ. On résout la première difficulté en utilisant les résultats de l'annexe, mais nous sommes obligés de supposer que nos solutions se tenir loin de la dépression. Alors que cette dernière difficulté peut être résolue que dans le cas où l'on dispose d'estimations $\mathcal{BV}$, qui n'est pas le cas de notre cadre. Dans le document [1], les auteurs ne pas enquêter sur ce problème. La définition suivante est utile dans ce qui suit.

Definition 4.1 *Soit ϕ^K,$K \in [a,b]$ une suite des fonctions C_0^∞ et soit η^K l'entropie du système (2.2) qui vérifie :*

$$\begin{cases} \eta^K(\rho, Q(\rho)) = \phi^K(\rho) \\ \eta^K_m(\rho, Q(\rho)) = 0. \end{cases}$$

On dit qu'une suite (ρ, m) des solutions exactes (ou approximatifs) de (2.2) est ϕ^K-stable si $(\rho, m) \in \Omega$, où Ω est un voisinage fermé (avec un intérieur non vide) de la courbe d'équilibre $\{(\rho, m)/m = Q(\rho)\}$ où $\eta^K(\rho, m)$ est strictement convexe et vérifie $\eta^K_{mm}(\rho, m) > 0$ pour tout $K \in [a,b]$. (Cette définition est bien posée à la lumière des résultats de l'annexe.)

theoreme 4.2 *Soit $\phi^K(\rho)$ une C_0^∞ approximation de l'entropie de Kruz-kov $|\rho - K|$(voir l'annexe). Soit (ρ^τ, m^τ) une suite ϕ^K-stable de solutions d'entropies de (2.2) avec la condition initial (ρ_0, m_0). supposons de plus que $(\rho_0, m_0) \in \Sigma$ et $\rho^\tau \geq \widehat{\rho} > 0$ et qu'on a la condition (K). Finalement supposons que (ρ_0, m_0) vérifie :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\eta}(\rho_0(x), m_0(x))dx < +\infty$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^*(\rho_0(x), m_0(x))dx < +\infty.$$

En outre supposons que (ρ_0, m_0) s'approche de la cas constante $(\overline{\rho}, \overline{m})$ à l'infinie et qu'on a la condition de stabilitée (SC). Alors la fonction limite $\rho(x,t)$ vérifie :

$$\phi^K(\rho)_t + \psi^K(\rho)_x \leq 0 \qquad dans\ D', \tag{4.1}$$

pour tout $K \in [\widehat{\rho}, 1]$, où $\psi^K(\rho) = \int_0^\rho (\phi^K(s))' Q'(s) ds$.

Preuve
D'après les résultats de l'annexe, il s'ensuit qu'il existe une entropie $\eta^K(\rho, m)$ de classe C^∞ (avec le flux $q^K(\rho, m)$) pour le système (2.2) a été fourni par l'équation (2,10) avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \eta^K(\rho, 0) = \phi^K(\rho) \\ \eta^K(\rho, 0) = 0. \end{cases}$$

En outre, il existe un voisinage fermé (avec un intérieur non vide) $A_{\widehat{\rho}}$ de la courbe $\{(\rho, m)/m = Q(\rho)\}$ dans laquelle toute $\eta^K(\rho, m)$ est strictement convexe et vérifie $\eta^K_{mm}(\rho, m) > 0$. Pour $K \in [\widehat{\rho}, 1]$ et $(\rho, m) \in A_{\widehat{\rho}}$, on a :

$$\begin{aligned} \phi^K(\rho^\tau)_t + \psi^K(\rho^\tau)_x \leq \; & \eta^K(\rho^\tau, Q(\rho^\tau))_t - \eta^K(\rho^\eta, m\eta)_t + q^K(\rho^\tau, Q(\rho^\tau))_x - q^K(\rho^\tau, m^\tau)_x \\ & + \frac{1}{\tau}(\eta^K_m(\rho^\tau, m^\tau) - \eta^K_m(\rho^\tau, Q(\rho^\tau)))(Q(\rho^\tau) - m^\tau) \\ & = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Comme auparavant, par la condition (K) et les L^∞ bornée, I_1 et I_2 tend vers zéro dans H^{-1}_{loc} et :

$$I_3 = -\frac{1}{\tau}\eta^K_{mm}(\rho^\tau, \overline{m}^\tau)(Q(\rho^\tau) - m^\tau)^2 \leq 0$$

qui conclut la preuve.
Il est possible de montrer un résultat similaire à la solution ρ de (3.3) obtenu par la limite, quand $\tau \to 0$, de la solution faible (ρ^τ, m^τ) de (2.2) qui réponde à la viscosité nulle de la condition d'entropie de Navier Stokes (voir la section 3,Théorème (3.4)). Pour appliquer l'inégalité de l'entropie, dans ce cas, nous n'avons pas besoin de la convexité de l'entropies η^K, mais ce que l'on appelle B-convexité (voir (2.17)). Par (2,18) et (2,19), le point est de contrôler, d'une manière uniforme sur k, la quantité :

$$mboxTr(D^2\eta^K(\rho, m)B(\rho, m)).$$

Il peut être fait en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans l'annexe (cf. proposition (A.3)). Par conséquent, il existe un voisinage fermé (avec un intérieur non vide) $O_{\widehat{\rho}}$, dépend de $\widehat{\rho}$, et ne dépent pas de k, où η^k vérifie $\eta^K_{mm}(\rho, m) > 0$ et :

$$D^2\eta^K(\rho, m)B(\rho, m) \geq 0.$$

Par conséquent, on a le théorème suivant :

theoreme 4.3 *Soit $\phi^K(\rho)$ et (ρ_0, m_0) comme dans le théorème (4.2) et soit (ρ^τ, m^τ) est un solution faible du système (2.2) obtenue par la limite quand $\varepsilon \to 0$ de la solution de la système de viscosité physique (2.15). Supposons ρ^τ, m^τ sont bornée dans L^∞ uniformement par rapport à τ, $\rho^\tau \geq \widehat{\rho} > 0$ et $(\rho^\tau, m^\tau) \in O_{\widehat{\rho}}$. Finalement supposons qu'on a la condition de stabilité (SC). Alors la fonction limite $\rho(x, t)$ vérifie :*

$$\phi^K(\rho)_t + \psi^K(\rho)_x \leq 0 \qquad dans D',$$

pour tout $K \in [\widehat{\rho}, 1]$, où $\psi^K(\rho) = \int_0^\rho (\phi^K(s))' Q'(s) ds$.

Ce théorème montre en particulier que le processus de relaxation fournit toujours le même type de conditions d'entropie pour la limite de la solution, à la fois si l'on part de l'entropie standard des solutions de (2.2) (données, par exemple, par le rapprochement de viscosité artificielle), et si on commence à partir de solutions de (2.2) donnée par le rapprochement physique de viscosité (le système de Navier Stokes), différentes solutions qui vérifient les conditions d'entropie.

5 UNICITÉ

Cette section est consacrée à l'étude de l'unicité de la limite de la fonction $\rho(x,t)$. À cette fin, nous supposons qu'on a l'hypothèse suivante :
(E) la fonction limite $\rho(x,t)$ vérifie :

$$|\rho - K|_t + F^K(\rho)_x \le 0 \qquad dans\ D'$$

pour tout $K \in [\widehat{\rho}, 1]$, où $F^K(\rho) = \int_0^\rho \operatorname{sign}(s-K)Q'(s)ds$. Il est bien connu (voir, par exemple [8]) que les conditions d'entropie de Kruz-kov (E) ne sont pas suffisants pour établir l'unicité de la solution. En effet, nous avons besoin de compléter un généralisée L^1_{loc} semi groupe de la continuité en t = 0. Le lien entre ce type de propriété de la continuité et le caractère unique semi groupe a été analysée très clairement dans les documents de Kruz kov [8], DiPerna [6] et Szepessy [15]. En tout cas, le point essentiel est de montrer une sorte de contraction des biens dans un espace métrique (par exemple, certains L^p espace). Bien sûr, cela est naturel, une fois la même propriété vaut pour le rapprochement des problèmes (par exemple, c'est le cas avec la disparition de viscosité), mais il est tout à fait non négligeable quand le problème est le rapprochement très rigides, comme dans le cas du modèle de relaxation à l'examen .
L'essentiel des difficultés dans l'analyse de la relaxation est de limiter la formation d'une première couche, à moins que l'on suppose une condition de compatibilité sur les données initiales. Cette couche est en général créés depuis $m_0(x)$ est différent de $Q(\rho_0(x))$. Ce phénomène génère une production donnée par l'entropie :

$$J_0 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)(\eta(\rho_0(x), Q(\rho_0(x))) - \eta(\rho_0(x), m_0(x)))dx,$$

qui est positif pour toute fonction de test $\Phi \ge 0$ et pour toute entropie convexe η, tel que $\eta_m(\rho, Q(\rho)) = 0$.
À savoir, si on note par μ la limite faible dans $L_1([0,T]\times\mathbb{R})$ quand ε, $\tau \to 0$ de la suite :

$$\left\{\varepsilon D^2\eta[\rho_x, m_x] + \frac{1}{\tau}\eta_m(\rho, m)(m - Q(\rho))\right\},$$

Il suffit de montrer que :

$$J_0 - \frac{1}{T}\int_0^T \langle \mu, \chi_{[0,T]}\Phi(x)\rangle dt = o(1)$$

quand $T \to 0$. Dans notre cas, nous prouver le résultat d'unicité dans le cadre de la condition de compatibilité $m_0 = Q(\rho_0)$, si aucune couche initiale apparait.

Lemme 5.1 *Soit $\phi(\rho)$ une fonction C_0^∞ égale à $|\rho - \overline{\rho}|$ dans $[\widehat{\rho}, 1]$ et soit (ρ_0, m_0) comme dans le théorème (4.2). Soit (ρ^τ, m^τ) une suite de solution d'entropie de (2.2) avec la condition initial (ρ_0, m_0) tel que $\rho^\tau \ge \widehat{\rho} > 0$ et supposons qu'on a la condition (K). En outre, supposons $(\rho_0 - \overline{\rho}) \in L^1$ et $m_0 = Q(\rho_0)$ et supposons que la solution ρ^τ du système (2.2) est la limite quand ε tend vers zéro, vers la solution $\rho^{\varepsilon,\tau}$ du système (2.3). Finallement, supposons qu'on a la condition de stabilité (SC) et que la suite $(\rho^{\varepsilon,\tau}, m^{\varepsilon,\tau})$*

est ρ-stable (à savoir, que nous prenons $\phi^K \equiv \phi$ Dans la définition (4.1). Ensuite, pour toute fonction teste positive $\Phi(x)$, il suit :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)|\rho(x,t) - \overline{\rho}|^2 dxdt \\
&\qquad \leq \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)|\rho_0(x) - \overline{\rho}|^2 dxdt + O(1)T^2,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

uniformement par rapport à ε, τ.

Preuve

Il suffit de prouver la relation (5.1) avec $\phi(\rho)$ Au lieu de $|\rho - \overline{\rho}|^2$. Soit $\phi(x)$ une fonction de teste positive et soit $(\eta(\rho, m), q(\rho, m))$ le paire de l'entropie et de son flux avec les données initiales :

$$\begin{cases} \eta(\rho, Q(\rho)) = \phi(\rho) \\ \eta_m(\rho, Q(\rho)) = 0. \end{cases}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\eta(\rho(x,t), m(x,t))dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\eta(\rho_0(x), m_0(x))dx \\
&= \frac{1}{\tau}\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\eta_m(\rho(x,s), m(x,s))(Q(\rho(x,s)) - m(x,s))dxds \\
&- \varepsilon \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)D^2\eta[\rho_x, m_x]dxds \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'(x)q(\rho(x,s), m(x,s))dxds \\
&+ \varepsilon \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi''(x)\eta(\rho(x,t), m(x,t))dxds \\
&\leq \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'(x)q(\rho(x,t), m(x,s))dxds \\
&+ \varepsilon \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi''(x)\eta(\rho(x,t), m(x,t))dxds.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Par conséquent, en laissant $\varepsilon \to 0$ dans (5.2) et en intégrant sur $[0, T]$ on a :

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\eta(\rho(x,t), m(x,t))dxdt - \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\eta(\rho_0(x), m_0(x))dxdt \leq C\|q\|_{L^\infty}T^2.$$

Par conséquent, en tant que $\tau \to 0$, à partir de l'estimation de l'énergie (3.2) et de la relation $m_0 = Q(\rho_0)$, il s'ensuit :

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\phi(\rho(x,t))dxdt - \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\phi(\rho_0(x))dxdt \leq C\|q\|_{L^\infty}T^2. \tag{5.3}$$

Remarque 5.2 *De la relation (5.1) nous avons également :*

$$\int_0^T \int_K |\rho(x,t) - \overline{\rho}|^2 dxdt \leq \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho_0(x) - \overline{\rho}|^2 dxdt + O(1)T^2, \tag{5.4}$$

pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$. En effet, soit$0 \leq \Phi(x) \leq 1$ *une fonction* C_0^∞ *telle que* $\Phi \equiv 1$ *dans K. Alors (5.1) les inégalités de rendements :*

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_K |\rho(x,t) - \overline{\rho}|^2 dxdt &\leq \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)|\rho(x,t) - \overline{\rho}|^2 dxdt \\ &\leq \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)|\rho_0(x) - \overline{\rho}|^2 dxdt + O(1)T^2 \\ &\leq \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho_0(x) - \overline{\rho}|^2 dxdt + O(1)T^2.\end{aligned}$$

Avec l'aide de (5,4), nous pouvons montrer la généralisation L^1-continuité de $\rho(x,t)$ quand $\tau \to 0$, ce qui est le dernier des biens nécessaires pour établir l'unicité de la solution de (3.3).

theoreme 5.3 *Supposons qu'on a la même hypothèse du Lemme (5.1). Ensuite, nous avons :*

$$\lim_{T\to 0} \frac{1}{T} \int_0^T \int_K |\rho(x,t)\rho_0(x)| dxdt = 0, \tag{5.5}$$

pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$. En particulier, si on a la condition (E), $\rho(x,t)$ est l'unique solution de l'entropie (plus grande ou égale que $\widehat{\rho}$) de (3.1) avec $\rho_0(x)$ comme condition initiale.

Preuve
Pour prouver la relation (5.5) on procède comme dans [15]. Soit $d(\rho) = |\rho - \overline{\rho}|^2$ et soit $D(\rho, \rho_0) = d(\rho) - d(\rho_0) - d'(\rho_0)(\rho - \rho_0) = (\rho - \rho_0)^2$. Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, l'inégalité des rendements de Schwarz :

$$\begin{aligned}\int_K |\rho - \rho_0| dx &\leq C_K \left(\int_K (\rho - \rho_0)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_K \left(\int_K D(\rho, \rho_0) dx \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ainsi, à partir de l'inégalité de Jensen, il s'ensuit que :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_K |\rho - \rho_0| dxdt \leq C_K \left(\frac{1}{T} \int_0^T \int_K D(\rho, \rho^0) dxdt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.6}$$

Maintenant, soit f_n une approximation C_0^∞ dans L^1 de $d'(\rho_0)$. De (5.4) on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_K D(\rho,\rho_0)dxdt &\leq \int_0^T \int_K f_n(\rho_0-\rho)dxdt \\
&+ \mathcal{T}(\|\rho\|_{L^\infty} + \|\rho_0\|_{L^\infty})\|d'(\rho_0) - f_n\|_{L^1} \\
&+ \int_0^T \int_K |\rho - \overline{\rho}|^2 dxdt \\
&- \int_0^T \int_K |\rho_0 - \overline{\rho}|^2 dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_K f_n(\rho_0-\rho)dxdt \\
&+ T(\|\rho\|_{L^\infty} + \|\rho_0\|_{L^\infty})\|d'(\rho_0) - f_n\|_{L^1} \\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}-K} |\rho_0 - \overline{}|^2 dxdt + CT^2.
\end{aligned}$$

Soit $\{K_i\}$ une collection des compacts tel que $K_i \subset K_{i+1}$ pour tout i, $K \subset K_1$ et $\cup_{i=1}^\infty K_i = \mathbb{R}$. Maintenant, si nous répéter l'argument précédent pour tous les Ki, et puisque :

$$\int_0^T \int_K D(\rho,\rho_0)dxdt \leq \int_0^T \int_{K_i} D(\rho,\rho_0)dxdt,$$

nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T \int_K D(\rho,\rho_0)dxdt &\leq \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\rho_0,\rho)dxdt \\
&+ (\|\rho\|_\infty + \|\rho_0\|_\infty)\|d'(\rho_0) - f_n\|_{L^1} \\
&+ CT.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Ainsi, à partir de (5.6) et (5.7), il s'ensuit que (5.5) est prouvé si :

$$\lim_{T\to 0^+} \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\rho_0-\rho)dxdt = 0. \tag{5.8}$$

Soit $(\rho^{\varepsilon,\tau}, m^{\varepsilon,\tau})$ une solution du système (2.3). Maintenant,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)(\rho_0 - \rho^{\varepsilon,\tau})dxdt \\
&= -\frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \rho_s^{\varepsilon,\tau} f_n(x) dsdxdt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t (m_x^{\varepsilon,\tau} - \varepsilon\rho_{xx}^{\varepsilon,\tau}) f_n(x) dsdxdt \\
&= -\frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t (m^{\varepsilon,\tau} f_n'(x) + \varepsilon\rho^{\varepsilon,\tau} f_n''(x)) dsdxdt \\
&\leq C_n T.
\end{aligned}$$

Enfin, à partir de ce dernier rapport on a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\rho_0-\rho)dxdt = \lim_{\varepsilon,\tau\to 0^+} \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\rho_0-\rho^{\varepsilon,\tau})dxdt \le C_nT,$$

ce qui prouve (5.8).

6 ANNEXE : L'ÉQUATION DE L'ENTROPIE

Dans cette annexe, nous voulons étudier certaines propriétés de l'équation linéaire hyperbolique :

$$\eta(\rho, z)_{\rho\rho} + 2a\eta(\rho, z)_{\rho z} = A(\rho)\eta(\rho, z)_{zz} \tag{6.1}$$

qui fournit des fonctions de l'entropie du système :

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = 0 \\ m_t + (\dfrac{m^2}{\rho} + p(\rho))_x = \dfrac{1}{\tau}(Q(\rho) - m). \end{cases} \tag{6.2}$$

Permettez-nous de remplacer la fonction $A(\xi)$ par la fonction $\tilde{A}(\xi)$ avec les propriétés suivantes :

1. $\tilde{A}(\xi)$ est $C^\infty(\mathbb{R})$ et $D^K\tilde{A}$ est bornée pour tout $K \geq 0$
2. $\tilde{A}(\xi)$ est constante pour tout $\xi \leq \frac{\rho}{2}$
3. $\tilde{A}(\xi) \geq> 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$
4. $\tilde{A}(\xi) = A(\xi)$ pour tout $\xi \in [\rho, 1]$
5. $\tilde{A}(\xi) = \tilde{A}(-\xi)$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, soit $\phi^K(\rho) \in D\mathbb{R}$ une régularisation de l'entropie de Kruz-kov $|\rho - K|$, strictement convexe sur une intervalle fixée $[h_1, h_2]$, pour toute constante $h_1 < 0, h_2 > 0$. Désignons par $\eta^K(\rho, z)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \eta_{\rho\rho} + 2a\eta_{\rho z} = \tilde{A}(\rho)\eta_{zz} \\ \eta(\rho, 0) = \phi(\rho) \\ \eta_z(\rho, 0) = 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Puisque $\tilde{A}(\rho) = A(\rho)$ pour tout $\rho \in [\widehat{\rho}, 1]$, alors $\eta^K(\rho, m)$ apporte une solution à (6.1) dans $[\widehat{\rho}, 1] \times \mathbb{R}$. Il s'agit donc d'une entropie du système (6.2).

Lemme 6.1 *Supposons qu'on a la condition de stabilité :*

$$-\theta\rho^{\frac{\gamma-3}{2}} < a < \theta\rho^{\frac{\gamma-3}{2}}, \quad 0 < \rho \leq 1. \tag{6.4}$$

Alors pour tout $K \in [\widehat{\rho}, 1], s \geq 0, Z > 0$, on a :

$$\|\eta^K(\rho, z)\|_{H^s(\mathbb{R},[0,Z])} \leq C_s, \tag{6.5}$$

où C_s dépend seulement de Z et de la condition initial.

Preuve
Multipliant la première équation du système (6.3) par η_Z et puis, après l'intégration par rapport à ρ on a :

$$\frac{d}{dz}\mathcal{E}_0(z) = 0$$

où on a :
$$\mathcal{E}_0(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \{\tilde{A}(\rho)|D_z\eta(\rho,z)|^2 + |D_\rho\eta(\rho,z)|^2\}d\rho.$$
Depuis l'équation de l'entropie est indépendant de z, alors il commute avec D_z^j et, comme auparavant, les énergies :
$$\mathcal{E}_j(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \{\tilde{A}(\rho)|D_z^{j+1}\eta(\rho,z)|^2 + |D_z^j D_\rho\eta(\rho,z)|^2\}d\rho$$
sont conservées pendant toute $j \geq 0$. Maintenant, puisque les données initiales sont de class C^∞ à support compacts, on a $\mathcal{E}_j(z) = \mathcal{E}_j(0) < +\infty$. Cette relation, ainsi que la positivité de A, l'offre a priori des limites pour certains produits dérivés be η^K, nommées $D_z^{j+1}\eta^K$ et $D_z^j D_\rho \eta^K$. Nous prouvons, a priori, des estimations pour les autres produits dérivés à l'aide de l'équation et sa forme différenciée à l'égard de ρ.
Par exemple, $\eta_{\rho\rho} = \tilde{A}(\rho)\eta_{zz} - 2a\eta_{z\rho}$ et $\eta_{\rho\rho} \in L^2$ résulte de $\eta_{\rho z} \in L^2, \eta_{zz} \in L^2$ et $\tilde{A}(\rho) \in L^\infty$. Nous omettons les détails des autres calculs.
Le résultat suivant nous permet d'obtenir une propriété de continuité des solutions $\eta^K(\rho,z)$ en ce qui concerne le paramètre k à toutes les normes de Sobolev $\|.\|_{H^s(\mathbb{R},[0,Z])}$. Cette propriété est nécessaire d'avoir un voisinage fermé fixé(avec un intérieur non vide) de la courbe $\{m = Q(\rho)\}$, dans lequel toutes ces fonctions sont convexes et satisfaire $\eta^K_{mm}(\rho,m) > 0$ indépendante de k.

Proposition 6.2 *Supposons qu'on a la condition de stabilité (6.4). Ensuite, il existe des constantes C_S, ne dépendant que de Z et les données initiales, de telle sorte que pour tout k, k_0 on a :*
$$\|\eta^K(\rho,z) - \eta^{K+K_0}(\rho,z)\|_{H^s(\mathbb{R},[0,Z])} \leq C_s|K_0|, \tag{6.6}$$
pour tout s.

Preuve
De la linéarité de la première équation de (6.3), il s'ensuit que : $\psi^K(\rho,z) = \eta^K(\rho,z) - \eta^{K+K_0}(\rho,z)$ vérifie :
$$\begin{cases} \psi^K_{\rho\rho} + 2a\psi^K_{\rho z} = \tilde{A}(\rho)\psi^K_{zz} \\ \psi^K(\rho,0) = \phi^K(\rho) - \phi^{K+K_0}(\rho) = \phi^K(\rho) - \phi^K(\rho - K_0) \\ \psi^K_z(\rho,0) = 0. \end{cases}$$
Par conséquent, en utilisant la conservation de l'énergie, nous avons :
$$\mathcal{E}_j(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \{\tilde{A}(\rho)|D_z^{j+1}\psi^K(\rho,z)|^2 + |D_z^j D_\rho\psi^K(\rho,z)|^2\}d\rho = \mathcal{E}_j(0).$$
Maintenant, nous devons montrer que $\mathcal{E}_j(0)$ peut être estimée en termes de $|k_0|^2$. En effet, en utilisant (6.3) et de ses formes différencielles, on peut prouver pour tout $j \geq 0$, il existe deux fonctions $A_j \in L^\infty$ et $F_j \in C_0^\infty$, ne dépend que de A, ses dérivés et les

conditions initiales, telles que :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_j(0) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\tilde{A}(\rho)|D_z^{j+1}\psi^K(\rho,0)|^2 + |D_z^j D_\rho \psi^K(\rho,0)|^2\}d\rho\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} A_j(\rho)|F_j(\rho) - F_j(\rho - K_0)|^2 d\rho\\ &\le C_j|K_0|^2.\end{aligned}$$

Comme avant, nous avons également besoin de l'estimation de tous les autres produits dérivés deψ qui peut être obtenu à partir de l'équation, en raison de la bornation de $A(\rho)$ et de ses dérivés.

Proposition 6.3 *Dans le cadre de des hypothèses précédentes, il existe un voisinage fermé (avec un intérieur non vide) $\Omega \subset [\widehat{\rho}, 1] \times \mathbb{R}$ de la courbe $\{(\rho, m)/m = Q(\rho)\}$ telles que $\eta^K(\rho, m)$ est strictement convexe et vérifie $\eta^k_{mm}(\rho, m) > 0$ dans Ω, pour tout $k \in [\widehat{\rho}, 1]$.*

Preuve
La Proposition (6.2) nous donne la continuité des dérivées partielles de $\eta^k(\rho, z)$ uniformement par rapport au paramètre k. Étant donné que les dérivées partielles de $\eta^k(\rho, m)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées partielles de $\eta^k(\rho, z)$ donc aussi les dérivées partielles de $\eta^k(\rho, m)$ dépendent d'une façon continue de k.
Ainsi, en particulier, il est vrai, pour le minimum de sa valeur propre $\lambda^K(\rho, m)$ de la matrice hessienns $D^2\eta^k(\rho, m)$. Par conséquent, en raison du fait que $\lambda^K(\rho, Q(\rho))$ est positive pour $k \in [\widehat{\rho}, 1]$, il existe une constante positive λ^0 ne dépendant que de $\widehat{\rho}$ telle que :

$$\lambda^K(\rho, Q(\rho)) \ge \lambda^0 \quad \text{pour tout } K \in [\widehat{\rho}, 1].$$

Par conséquent, pour tout $K \in [\widehat{\rho}, 1]$. on a :

$$\begin{aligned}\langle v, D^2\eta^K(\rho, m)v\rangle &= \langle v, D^2\eta^K(\rho, Q(\rho))v\rangle + \langle v, \partial_m D^2\eta^K(\rho, \overline{m})(m - Q(\rho))v\rangle\\ &\ge \lambda^0|v|^2 - \langle v, |\partial_m D^2\eta^K(\rho, \overline{m})||m - Q(\rho)|v\rangle,\end{aligned}$$

où $\langle v, D^2\eta^K(\rho, m)v\rangle$ désigne la forme quadratique associée à $D^2\eta^k(\rho, m)$. Maintenant, à partir de Lemma (6.1) il s'ensuit qu'il existe une constante C, tel que :

$$|D^3\eta^K(\rho, m)| \le C \quad \textit{pour tout } (\rho, m) \in [\widehat{\rho}, 1] \times \mathbb{R}, K \in [\widehat{\rho}, 1].$$

Alors pour tout $(\rho, m) \in [\widehat{\rho}, 1] \times \mathbb{R}, K \in [\widehat{\rho}, 1]$, il s'ensuit :

$$\langle v, D^2\eta^K(\rho, m)v\rangle \ge \lambda^0|v|^2 - C\langle v, |m - Q(\rho)|v\rangle.$$

on peut donc conclure :

$$\langle v, D^2\eta^K(\rho, m)v\rangle \ge \frac{\lambda^0}{2}|v|^2,$$

pour tout $(\rho, m) \in [\widehat{\rho}, 1] \times \mathbb{R}, k \in [\rho, 1]$ et $|(m - Q(\rho)| \le \frac{\lambda^0}{2C}$. De même, il existe une constante C positive telle que, pour tout $(\rho, m) \in [\widehat{\rho}, 1] \times \mathbb{R}, k \in [\widehat{\rho}, 1]$ et $|m - Q(\rho)| \le C$, on a $\eta^k_m m(\rho, m) > 0$. Par des arguments de la précédente, il existe une voisinage fermé (avec un intérieur non vide)Ω dans $[\widehat{\rho}, 1] \times \mathbb{R}$ de $\{(\rho, m)/m = Q(\rho)\}$, qui sur dépend seulement de $\widehat{\rho}$ où $\eta^K(\rho, m)$ est strictement convexe et $\eta^k_{mm}(\rho, m) > 0$, pour tout $k \in [\widehat{\rho}, 1]$.

7 CONCLUSIONS

Les difficultés dans le trafic routier sont de plus en plus grandes, en particulier dues au progression sur les routes des nombre d'automobiles. pour cela on a besoin d'un modèle mathématique à résoudre pour le court terme.

Dans ce mémoire nous avons utilisé plusieurs concept de l'analyse des EDP non linéaires, ajouter des termes, passer à la limite.

La notion de "solution de viscosité" apparait comme étant la méthode idéale pour résoudre les équations des lois de conservation qui gouvernent le flux sur les routes. Et dans ce mémoire, on prend un modèle déjà connue avec une certaine condition afin de le rendre strictement hyperbolique, puis on fait deux approximations " viscosité artificielle " et " viscosité physique " qui conduisent au meme resultat de convergence, puis on étudie le cas où le temp de relaxation (temp de réponses du conducteur) tend vers zéro, et on utilise aussi la méthode de "solution d'entropie", et finalement on démontre l'unicité de solution dans des conditions convenables.

RÉFÉRENCES

1. G.-Q. Chen, C. D. Levermore, and T.-P. Liu, Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy, Comm. Pure Appl. Math. 47 (1994), 787-830.
2. G.-Q. Chen and Y. Lu, The study on application way of the compensated compactness theory, Chin. Sci. Bull. 34 (1989), 15-19.
3. G. Q. Chen, X. Ding, and P. Luo, Convergence of the Law-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics I-II, Acta Math. Sci. 5 (1985), 415-472.
4. K. N. Chueh, C. C. Conley, and J. A. Smoller, Positively invariant regions for systems of non-linear diffusion equations, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 372-411.
5. R. J. DiPerna, Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics, Comm. Math. Phys. 91 (1983), 1-30.
6. R. J. DiPerna, Measure-valued solutions to conservation laws, Arch. Rational Mech. Anal. 88 (1985), 223-270.
7. S. Jin and Z.Xin, The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions, Comm. Pure Appl. Math. 48 (1995), 235-276.
8. S. Kruz-kov, First order quasi-linear equations with several space variables, Mat. Sb. 123 (1970), 228-255.
9. P. L. Lions, B. Perthame, and P. E. Souganidis, Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems or isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates, Comm. Pure Appl. Math. 49 (1996), 599.
10. T.-P. Liu, Hyperbolic conservation laws with relaxation, Comm. Math. Phys. 108 (1987), 153-175.
11. P. Marcati, Relaxation and singular convergence for quasilinear hyperbolic systems, in “First Italian-Spain Meeting on Nonlinear Analisis” (L. Boccardo, M. A. Herrero, and A. Tesei, Eds.), pp. 140-148, Quaderno IAC-CNR, Rome, 1989.
12. F. Murat, L’injection du cône positif de H^{-1} dans $W^{-1,q}$ est compacte pour tout $q < 2$, Math. Pure Appl. 60 (1981), 309-322.
13. R. Natalini, Convergence to equilibrium for the relaxation approximation of conservation laws, Comm. Pure Appl. Math. 49 (1996), 795-823.
14. S. Schochet, The instant-response limit in Whitham’s nonlinear traffic-flow model : Uniform well-posedness and global existence, Asymptotic Anal. 1 (1988), 263-282.
15. A. Szepessy, Anexistence result for scalar conservation laws using measure valued solu- tions, Comm. Partial Differential Equations 14 (1989), 1329-1350.
16. G. B. Whitham, “Linear and Nonlinear Waves,” Wiley, New York, 1974.
17. C. Lattanzio, and P. Marcati, ”The Zero Relaxation Limit for the Hydrodynamic Whitham Traffic Flow Model”, Journal of differential equations 141, 150-178 (1997) article no. DE973311