Existence et propriétés qualitatives de fronts coniques bistables en dimension 2 d'espace

Existence and qualitative properties of of bistable conical fronts in two space dimensions

Francois Hamel [a] Régis Monneau [b] Jean-Michel Roquejoffre [c]

[a] *UMR CNRS 6632 (LATP), Université Aix-Marseille III, Avenue Escadrille Normandie-Niemen, F-13397 Marseille Cedex 20, France*

[b] *CERMICS-ENPC, 6-8 avenue B. Pascal, Cité Descartes, F-77455 Marne-La-Vallée Cedex 2, France*

[c] *UMR CNRS 5640 (MIP) et IUF, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbone, F-31062 Toulouse Cedex 4, France*

Abstract

Conical-shaped travelling wave solutions of a bistable reaction-diffusion equations posed in the plane are shown to exist. The velocity of the wave solutions is strictly larger than the planar wave velocity, and their level sets are asymptotic to lines whose angle is computed in terms of their velocity. Qualitative properties, such as monotonicity, symmetry, and exponential convergence of the slopes of the level lines, are given. *To cite this article: F. Hamel, R. Monneau, J.-M. Roquejoffre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2004).*

Résumé

On donne dans cette note des résultats d'existence d'ondes progressives à lignes de niveaux coniques pour une équation de réaction-diffusion à non-linéarité bistable. Les solutions trouvées ici ont une vitesse plus grande que l'onde monodimensionnelle. Leurs lignes de niveaux sont asymptotes à des droites, dont l'angle avec la verticale se calcule en fonction de la vitesse des ondes. Des propriétés qualitatives : monotonie, symétrie, convergence exponentielle des pentes des lignes de niveau, sont discutées. *Pour citer cet article : F. Hamel, R. Monneau, J.-M. Roquejoffre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2004).*

Email addresses: `francois.hamel@univ.u-3mrs.fr` (Francois Hamel), `monneau@cermics.enpc.fr` (Régis Monneau), `roque@mip.ups-tlse.fr` (Jean-Michel Roquejoffre).

Abridged English version

Consider $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a smooth function such that
(H1) there is θ in $(0,1)$ such that

$$\begin{cases} f(0) = f(\theta) = f(1) = 0, \ f < 0 \text{ on } (0,\theta) \cup (1,+\infty), \ f > 0 \text{ on } (-\infty, 0) \cup (\theta, 1), \\ f'(0) < 0, \ f'(1) < 1, \ f'(\theta) > 0. \end{cases}$$

The function f is then said to be "bistable".

(H2) The integral $\int_0^1 f$ is positive.

Under the assumptions (H1) et (H2), there is [6] a unique $c_0 > 0$ such that the equation

$$U'' - c_0 U' + f(U) = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}, \quad U(-\infty) = 0, \ U(+\infty) = 1. \tag{1}$$

has solutions. The solutions to (1) are unique up to translations.

We are interested in the following problem:

$$\begin{aligned} &\Delta u - c\partial_y u + f(u) = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^2 \\ &\limsup_{A \to +\infty, \ y \geq A - |x|\cot\alpha} |u(x,y) - 1| = 0, \qquad \limsup_{A \to -\infty, \ y \leq A - |x|\cot\alpha} |u(x,y)| = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

The function $(t,x,y) \mapsto u(x+ct, y)$ is a travelling wave solution of the reaction-diffusion equation

$$u_t - \Delta u = f(u), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Such a study has two motivations. On the one hand (2), with an "ignition temperature type " source term - i.e. the function f vanishes on $]0, \theta[$ instead of being negative - is a relevant model for Bunsen burner flames; detailed studies have been carried out by the first two authors in [8], [9]. See also the references therein. The problem under consideration here is a natural equivalent of these papers, and presents additional difficulties due to the lack of positivity of the nonlinearity.

On the other hand, (2) can be interpreted in terms of geometrical movements [4], [5]: the solutions of (2) indeed converge, under a suitable scaling, to solutions of eikonal equations. Also, our problem has close connections to some questions around a conjecture of De Giorgi [1], [3], [7].

Theorem 0.1 *Under assumptions (H1)-(H2), there is a solution (c,u) to (2). Further, $c = c_0/\sin\alpha$, $0 < u < 1$ and u is unique up to shift in the (x,y) variables. Moreover, the following qualitative properties are satisfied.*
(i). There is $x_\pm^\infty \in \mathbb{R}$ such that, for every sequence $x_n \to \pm\infty$ we have: $u(x + x_n, y - |x_n|\cot\alpha) \to U(\pm x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_\pm^\infty)$ in $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$.
(ii). There exists $x_0 \in \mathbb{R}$ such that $u(x + x_0, y)$ is symmetric around the y axis. Assuming (without loss of generality) that $x_0 = 0$ we furthermore have: $\partial_x u \geq 0$ in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
(iii). For any unit vector $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ such that $\tau_y < -\cos\alpha$ we have: $\partial_\tau u < 0$ in $\mathbb{R}^2$.
(iv). For all $\lambda \in]0,1[$ the level line $\{u = \lambda\}$ is a smooth graph $\{(x, \phi_\lambda(x)), \ x \in \mathbb{R}\}$, with $\|\phi'_\lambda\|_\infty = \cot\alpha$. Moreover there is $\omega > 0$ such that $\phi'_\lambda(x) = -\cot\alpha + O(e^{-\omega x})$ as $x \to +\infty$.

Problem (2) appears for the first time in Fife [6], where an existence result is proved for angles α close to $\frac{\pi}{2}$ - i.e. almost planar fronts. At this level of generality, the existence part of Theorem 0.1 is already a new result.

Theorem 0.2 *Let u be a bounded solution of*

$$\Delta u - c\partial_y u + f(u) = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Assume that there exists a Lipschitz function $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$\begin{cases} \liminf\limits_{A\to+\infty,\ y\geq A+\phi(x)} u(x,y) > \theta, \\ \limsup\limits_{A\to-\infty,\ y\leq A+\phi(x)} u(x,y) < \theta. \end{cases} \tag{4}$$

Then $c \geq c_0$. Furthermore, up to shift in (x,y) variables, either u is a planar front $U(\pm x\cos\alpha + y\sin\alpha)$ with $\alpha = \arcsin(c_0/c) \in (0, \pi/2]$, or u is the unique solution of (2).

Theorem 0.1 is proved by a sub/super-solution method, the difficult part being to devise a conical-shaped super-solution. Properties (i) to (iii) are proved by different sliding or moving plane methods, the crucial parts being here the initialization, and the key result being the fact that the solution is nonincreasing in any unit direction of the lower cone of angle α. The exponential convegence of the level lines comes from a centre manifold type argument. Theorem 0.2 results from a close examination of the level lines of the solutions under consideration when $|(x,y)|$ goes to $+\infty$.

1. Introduction, principaux résultats

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière vérifiant les hypothèses suivantes :
(H1) il existe θ dans $(0,1)$ tel que

$$\begin{cases} f(0) = f(\theta) = f(1) = 0,\ f < 0 \text{ sur } (0,\theta)\cup(1,+\infty),\ f > 0 \text{ sur } (-\infty,0)\cup(\theta,1), \\ f'(0) < 0,\ f'(1) < 1,\ f'(\theta) > 0. \end{cases}$$

On dit alors que la fonction f est "bistable", en réference à la stabilité de 0 et 1 pour l'équation différentielle ordinaire $\dot{u} = f(u)$.

(H2) L'intégrale $\int_0^1 f$ est strictement positive.

Sous les hypothèses (H1) et (H2), on sait [6] qu'il existe un unique $c_0 > 0$ tel que l'équation

$$U'' - c_0 U' + f(U) = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}, \quad U(-\infty) = 0,\ U(+\infty) = 1. \tag{5}$$

ait des solutions. De plus celles-ci sont uniques à translations près.

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{gathered} \Delta u - c\partial_y u + f(u) = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ \limsup_{A\to+\infty,\ y\geq A-|x|\cot\alpha} |u(x,y)-1| = 0, \qquad \limsup_{A\to-\infty,\ y\leq A-|x|\cot\alpha} |u(x,y)| = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

La fonction $(t,x,y) \mapsto u(x+ct, y)$ est une solution d'onde progressive de l'équation de réaction-diffusion suivante :

$$u_t - \Delta u = f(u), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

La motivation de notre étude est double. D'une part, le problème (6), avec un terme non linéaire dit "à température d'ignition " - i.e. la fonction f est nulle sur $]0,\theta[$ au lieu d'y être négative est un modèle pertinent de flamme de bec Bunsen ; des études très détaillées de ce problème ont été réalisées par les deux premiers auteurs ; voir [8], [9] et les références bibliographiques de ces articles. Le problème considéré ici en est un pendant naturel, et l'absence de positivité du terme de réaction introduit des difficultés supplémentaires nécessitant des arguments nouveaux.

D'autre part, (6) peut s'interpréter en termes de mouvements géométriques [4], [5] : sous l'effet d'un changement d'échelle, les solutions convergent en effet vers des solutions d'équations eikonales. Enfin, le problème a des liens profonds avec des questions liées à une conjecture de de Giorgi [1], [3], [7].

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses (H1) et (H2), il existe une solution* (c, u) *de (6). De plus,* $c = c_0/\sin\alpha$, $0 < u < 1$ *et* u *est unique à translation près en* (x, y)*. Les propriétés qualitatives suivantes sont de plus satisfaites.*

(i). Il existe $x_\pm^\infty \in \mathbb{R}$ *et une solution* U *de (5) tel que, pour toute suite* $x_n \to \pm\infty$ *on a :* $u(x + x_n, y - |x_n|\cot\alpha) \to U(\pm x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_\pm^\infty)$ *dans* $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

(ii). Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $u(x+x_0, y)$ *soit symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. En supposant (sans perte de généralité) que* $x_0 = 0$ *on a de plus :* $\partial_x u \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

(iii). Pour tout vecteur unité $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ *tel que* $\tau_y < -\cos\alpha$ *on a :* $\partial_\tau u < 0$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

(iv). Pour tout $\lambda \in]0, 1[$ *la ligne de niveau* λ *de* u *est un graphe régulier* $\{(x, \phi_\lambda(x)),\ x \in \mathbb{R}\}$*, avec* $\|\phi'_\lambda\|_\infty = \cot\alpha$*. De plus il existe* $\omega > 0$ *tel que* $\phi'_\lambda(x) = -\cot\alpha + O(e^{-\omega x})$ *quand* $x \to +\infty$.

L'existence d'ondes coniques pour (6) apparaît pour la première fois dans Fife [6], où le problème est résolu pour des angles α proches de $\dfrac{\pi}{2}$ - i.e. des fronts presque plans. A ce niveau de généralité, le théorème 1.1 est un résultat nouveau. Les hypothèses (H1) et (H2) sont fondamentales : si (H1) n'est pas vérifiée (cas de croisements multiples par exemple) l'existence de fronts plans connectant 0 à 1 n'est pas garantie. Si $c_0 = 0$ - i.e. (H2) n'est pas vérifiée - il est connu que, dans certains cas - par exemple f symétrique autour de θ - que (6) n'a pas de solution pour $\alpha < \pi/2$. Voir [1], [3], [7].

Une des conséquences du théorème ci-dessus est que les lignes de niveau de u sont asymptotiquement coniques. La convergence exponentielle est caractéristique de la dimension 2 d'espace ; elle est fausse en dimension > 2.

Le résultat suivant concerne l'unicité des fronts coniques.

Théorème 1.2 *Soit* u *une solution bornée de*

$$\Delta u - c\partial_y u + f(u) = 0 \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{7}$$

Supposons l'existence d'une fonction lipschitzienne $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\begin{cases} \liminf\limits_{A \to +\infty,\ y \geq A + \phi(x)} u(x, y) > \theta, \\ \limsup\limits_{A \to -\infty,\ y \leq A + \phi(x)} u(x, y) < \theta. \end{cases} \tag{8}$$

Alors $c \geq c_0$*. De plus, aux translations de* $\mathbb{R}^2$ *près, ou bien* u *est un front plan* $U(\pm x\cos\alpha + y\sin\alpha)$ *avec* $\alpha = \arcsin(c_0/c) \in]0, \pi/2]$*, ou bien* u *est l'unique solution de (6).*

2. Existence de fronts : sur/sous solutions

Une sous-solution de (6), satisfaisant les conditions aux limites de (6), est donnée par $\underline{\phi}(x, y) = \sup(U(y\sin\alpha + x\cos\alpha), U(y\sin\alpha - x\cos\alpha))$. Considérons d'autre part la solution du problème à frontière libre suivant, d'inconnue (c, ψ, Ω) - voir [9] pour l'existence et la régularité d'une telle solution :

$$\begin{cases} \Delta\psi - c\partial_y\psi = 0 \ \text{ dans } \Omega := \{\psi < 1\} = \{y < \varphi(x)\}, \qquad 0 < \psi \leq 1 \ \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n} = c_0 \ \text{ sur } \Gamma := \partial\Omega \ (n \text{ est la dérivée normale extérieure à } \Omega \text{ sur } \partial\Gamma) \end{cases} \tag{9}$$

avec les conditions aux limites de (6) (on a de plus : $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x) + |x| \cot\alpha| < +\infty$).
Théorème 2.1 *Notant dist la fonction distance euclidienne, on pose*

$$\overline{\phi}(x,y) = U(c_0^{-1}\mathrm{Log}(\psi(x,y))) \ \ \textit{dans } \Omega = \{\psi < 1\}\,, \qquad \overline{\phi}(x,y) = U(\textit{dist}((x,y),\Omega)) \ \ \textit{dans } \mathbb{R}^2\backslash\Omega.$$

Alors $\overline{\psi}$ est une sur-solution de viscosité de (6).
Cette sur-solution a déjà été utilisée dans [10] pour montrer l'existence de fronts coniques avec non-linéarité de type "combustion". Il est surprenant de constater la bonne adaptation de cette méthode au cas étudié. La solution ψ de (9) est donc utile dans des applications dépassant le cadre des problèmes de type "combustion".

3. Propriétés qualitatives

Pour le problème avec les conditions (6), les propriétés de symétrie et de monotonie se démontrent par des arguments de glissement de domaines ou d'hyperplans mobiles [2] ; le point délicat est ici la phase d'initialisation dans la mesure où l'on raisonne dans des domaines infinis.

Comme $\partial_y u > 0$, chaque ligne de niveau de u pour la valeur λ s'écrit sous forme de graphes $\{(x, \phi_\lambda(x))\}$. La monotonie de u, dans les directions du sous-cône inférieur d'angle α par rapport à la verticale dirigée par $(0,-1)$, implique la borne sur la norme Lipschitz de ϕ_λ ainsi que l'identité

$$\liminf_{x\to\pm\infty} \phi'_\lambda(x) = \mp\cot\alpha. \tag{10}$$

La régularité de u donne alors une régularité C^2 uniforme sur les ϕ_λ. Par ailleurs, les arguments de glissement, associés aux conditions (6), donnent l'existence de réels $x^\infty_\pm$ tels que $u(x+x_n, y-|x_n|\cot\alpha) \to U(\pm x\cos\alpha + y\sin\alpha + x^\infty_\pm)$ dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour toute suite $x_n \to \pm\infty$. Il s'en déduit que $\phi'_\lambda(x) \to \mp\cot\alpha$ quand $x \to \pm\infty$, pour tout $\lambda \in]0,1[$.

La convergence exponentielle de $\phi'_\lambda(x)$ vers $\mp\cot\alpha$ quand $x \to \pm\infty$ s'obtient alors par un calcul de type variété centrale [13].

Considérons maintenant le problème (7) avec les conditions (8). Les hypothèses du Théorème 1.2 permettent de montrer d'abord que u est croissante en y et tend vers 0 et 1 loin au-dessous et au-dessus du graphe de ϕ. Si u n'est pas un front plan, l'hypothèse (7), la comparaison de u avec les solutions déjà construites du Théorème 1.1, et l'examen soigneux des lignes de niveau de u quand (x,y) tend vers $+\infty$ permettent alors de montrer que $c \geq c_0$ et que u est alors l'unique (à translation près) solution de (6).

4. Deuxième preuve de l'existence pour le problème (6)

Une deuxième preuve de l'existence de solutions de (6), par continuation sur le paramètre α, peut également être donnée. Plus précisément, le cas $\alpha = \pi/2$ n'est rien d'autre que le problème monodimensionnel. Pour α proche de $\pi/2$, on peut soit invoquer [6] ou [12], soit un argument de variété centrale [13]. Soit α_{min} le plus petit des $\alpha_* < \pi/2$ pour lesquels (6) admet une solution pour tout $\alpha > \alpha_*$. Par passage à la limite - à une sous-suite près - on obtient une solution u de (7) vérifiant les hypothèses du Théorème 1.2 et telle que, à translation près, u soit paire en x. On montre alors que, avec les notations précédentes,

$\phi'_\lambda(x) \to \mp \cot\alpha$ quand $x \to \pm\infty$, et que cette convergence est de plus exponentielle. Ainsi, u vérifie (6). La propriété de convergence exponentielle des lignes de niveau permet alors d'invoquer le

Théorème 4.1 *([10]) Pour $r > 0$, soit X_r l'espace des fonctions $v(x, y)$ uniformément continues et bornées telles que $e^{r|(x,y)|}v(x, y)$ soit bornée uniformément continue. L'opérateur linéarisé $L = -\Delta + c\partial_y - f'(u)$ est un isomorphisme de son domaine vers X_r.*

On conclut à l'aide du théorème des fonctions implicites.

Les preuves détaillées, ainsi que des résultats d'existence de solutions à symétrique cylindrique en dimension supérieure à 3, sont donnés dans un article en cours de rédaction [11].

Références

[1] L. Ambrosio, X. Cabré *Entire solutions of semilinear elliptic equations in* $\mathbf{R}^3$ *and a conjecture of De Giorgi*; J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), pp. 725–739

[2] H. Berestycki, L. Nirenberg, *Travelling fronts in cylinders*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lin. **9** (1992), pp. 497–572.

[3] H. Berestycki, L.A. Caffarelli, L. Nirenberg, *Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains*, Dedicated to Ennio De Giorgi. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **25** (1998), pp. 69–94.

[4] G. Barles, H.M. Soner, P.E Souganidis *Front propagation and phase field theory*, SIAM J. Control Optim. **31** (1993), pp. 439–469.

[5] L.C. Evans, J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature I*, J. Differential Geom. **33** (1991), pp. 635–681, II. Trans. Amer. Math. Soc. **330** (1992), pp. 321–332, III. J. Geom. Anal. **2** (1992), pp. 121–150.

[6] P.C. Fife, *Dynamics of internal layers and diffusive interfaces*, CBMS-NSF Regional Conference, Series in Applied Mathematics **53**, 1988.

[7] N. Ghoussoub, C. Gui, *On De Giorgi's conjecture in dimensions 4 and 5*, Ann. of Math. **157** (2003), pp. 313–334.

[8] F. Hamel, R. Monneau, *Solutions of semilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with conical-shaped level sets*, Comm. Part. Diff. Eq. **25** (2000), pp. 769–819.

[9] F. Hamel, R. Monneau, *Existence and uniqueness for a free boundary problem arising in combustion theory*, Interfaces Free Boundaries **4** (2002), pp. 167–210.

[10] F. Hamel, R. Monneau, J.-M. Roquejoffre, *Stability of travelling waves in a model for conical flames in two space dimensions*; à paraître à Ann. Sci. ENS ; Prépublication en ligne http ://eapq.ujf-grenoble.fr/.

[11] F. Hamel, R. Monneau, J.-M. Roquejoffre, *Existence of conical-shaped waves in reaction-diffusion equations*, en préparation.

[12] M. Haragus, A. Scheel, *Corner defects in almost planar interface propagation*, preprint.

[13] A. Mielke, *Reduction of quasilinear elliptic equations in cylindrical domains with applications*, Math. Methods Appl. Sci. **10** (1988), pp. 51–66.