

UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité

Mathématiques Appliquées

présentée par

Régis MONNEAU

Sujet :

**Contribution à l'étude de problèmes à frontières libres et
d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires.
Applications en combustion et élasticité.**

Soutenue le 1er juillet 2002 devant le jury composé de

J. Ball
A. Bamberger
H. Berestycki
A. Bonnet
H. Brezis
L. Caffarelli
H. Matano
F. Murat
B. Perthame

Rapporteurs :

L. Caffarelli
G. Sivashinsky
J. Spruck

à May, Daniel et Alexandre

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à H. Berestycki, qui m'a orienté et soutenu dans mes recherches. Il m'a mis en relation avec ses collaborateurs et amis, et cela a été pour moi une source de motivation et d'enthousiasme irremplaçable. Enfin ses qualités d'écoute, sa générosité et ses conseils toujours judicieux, qu'ils aient été scientifiques ou humains, m'ont été d'une aide très précieuse.

Je manifeste ma très grande reconnaissance à A. Bonnet qui a guidé mes premiers pas dans la recherche et qui a su rester à mon écoute jusqu'à maintenant. Il m'a toujours impressionné par son intuition exceptionnelle et sa facilité à faire des remarques pertinentes sur tout sujet. Enfin je le remercie tout simplement pour son amitié. J'ai beaucoup appris à ses côtés.

Mes remerciements s'adressent également à M.M. L. Caffarelli, J. Spruck et G. Sivashinsky qui ont généreusement accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire d'habilitation.

MM. J. Ball, A. Bamberger, H. Berestycki, A. Bonnet, H. Brezis, L. Caffarelli, F. Murat, H. Matano et B. Perthame me font le grand honneur de faire partie de ce jury. Je leur en suis très reconnaissant.

Je salue X. Blanc, S.J. Chapman, P. Felmer, F. Legoll, J.-M. Roquejoffre et A. Sili avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler.

J'adresse mon amitié à J. Dolbeault, F. Hamel, et F. Murat avec qui j'ai noué des collaborations très fructueuses et qui, je le souhaite, se poursuivront.

D. Jerison m'a accueilli au M.I.T. durant mon post-doctorat. Je garde un souvenir inoubliable de cette expérience et le remercie de son amitié.

Je suis très reconnaissant à J.-M. Morel de m'avoir accueilli au Ceremade durant mon DEA.

Je voudrais aussi remercier X. Cabré, J. Ball, G. Friesecke, J.F. Rodrigues, H. van Duijn pour les échanges que nous avons pu avoir au cours de diverses invitations.

Je tiens à remercier E. Séré qui m'a récemment donné l'occasion d'enseigner dans l'Ecole doctorale de Dauphine.

Je voudrais aussi remercier F. Bethuel, P.G. Ciarlet, G. David, P. Gérard, R. Kohn, V. Maz'ya, S. Müller pour les discussions toujours riches et lumineuses que nous avons eues.

Je voudrais témoigner ici de ma reconnaissance envers le Corps des Ponts et Chaussées qui a permis et favorisé mes recherches. Ma pensée va tout spécialement à tous les membres du Cermics qui par leur travail et la bonne ambiance qu'ils créent, œuvrent au développement de ce laboratoire.

Enfin, d'autres personnes ont joué un rôle quelquefois anodin en apparence, quelquefois crucial dans l'aboutissement de ce travail. Qu'elles se reconnaissent ici et me pardonnent de ne pas les avoir citées.

Table des matières

1	Introduction	9
2	Etude de quelques problèmes à frontières libres	12
2.1	Une nouvelle formule de monotonie pour le problème de l'obstacle et son application à une conjecture de Schaeffer. [18, 14]	15
2.2	Transfert de régularité du bord fixe vers le bord libre : une approche à la Caffarelli [30]	18
2.3	Perturbation de la frontière libre grâce à la théorie de Nash-Moser [2]	20
2.4	Sur la convexité de l'ensemble de coïncidence du problème de l'obstacle : le point de vue des équations complètement non linéaires [11, 12]	23
2.5	Conditions suffisantes pour l'absence de zone de mélange entre deux fluides dans un milieu poreux [19]	27
2.6	Perspectives	30
2.7	Bibliographie complémentaire	30
3	Modèles de flammes de bec Bunsen et propriétés qualitatives d'équations elliptiques non linéaires	32
3.1	Propriétés qualitatives des formes de flammes en dimension quelconque [6, 7, 9]	32
3.2	Existence, unicité et stabilité des flammes de bec Bunsen en dimension 2 [30]	36
3.3	Classification des solutions d'un problème de type Serrin intervenant dans un modèle de flamme à haute énergie d'activation [8]	37
3.4	Propriété de symétrie et de non-symétrie mono-dimensionnelle pour les solutions d'équations elliptiques semi-linéaires [10]	38
3.5	Vers la construction d'un contre-exemple à une conjecture de De Giorgi en grande dimension ? [25, 32]	40
3.6	Un théorème de type Liouville pour les équations elliptiques isotropes homogènes complètement non linéaires [27]	46
3.7	Solutions localement à symétrie radiale pour certains opérateurs non uniformément elliptiques [31]	48
3.8	Perspectives	51
3.9	Bibliographie complémentaire	51
4	Quelques questions d'élasticité linéaire et non linéaire revisitées	53
4.1	Estimations elliptiques uniformes pour un modèle de plaque infinie en élasticité linéaire [22]	53
4.2	Estimations elliptiques intérieures pour un modèle de plaque finie en élasticité linéaire [26]	57
4.3	Estimations d'erreur pour une plaque tridimensionnelle de faible épaisseur [22, 26]	60

4.4	Sur la régularité asymptotique des déplacements d'une poutre dans la limite des faibles épaisseurs [23]	64
4.5	Estimation d'erreur pour un modèle de cylindre asymptotiquement mince [29]	67
4.6	Justification du modèle de plaque non linéaire de Kirchhoff-Love comme application d'une nouvelle méthode d'inversion singulière [20, 16]	70
4.7	Quelques remarques sur l'inversibilité asymptotique du linéarisé de l'élasticité non linéaire [24]	78
4.8	Perspectives	81
4.9	Bibliographie complémentaire	82
5	Applications en supraconductivité, chimie quantique et dynamique moléculaire	84
5.1	Etude d'un modèle tridimensionnel de supraconducteurs pour une valeur infinie du paramètre de Ginzburg-Landau [5]	86
5.2	Sur la convergence des minimiseurs locaux de l'énergie de Ginzburg-Landau dans la limite des hautes valeurs du paramètre de Ginzburg-Landau [3, 4]	87
5.3	Sur la décroissance exponentielle du champ électrique dans les métaux décrits par le modèle de Thomas-Fermi-von Weizsäcker [13]	88
5.4	Une méthode de construction d'algorithmes réversibles conservant la mesure et son application en Dynamique Moléculaire [21]	90
5.5	Perspectives	93
5.6	Bibliographie complémentaire	94

1 Introduction

Ce mémoire d'habilitation à diriger les recherches rassemble mes travaux effectués aux cours de la période 1995-2002. Ces travaux sont regroupés en quatre parties thématiques distinctes : les problèmes à frontières libres, les équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires et leurs applications en combustion, quelques problèmes d'élasticité linéaire et non linéaire, et en quatrième partie divers problèmes inclassables dans les trois premières parties.

Il va sans dire que mon travail a été très largement influencé par mes deux directeurs de thèse Henri Berestycki et Alexis Bonnet, et je mesure la chance que j'ai de travailler à leur côté.

Mes travaux sont présentés de façon détaillée dans chaque partie. Auparavant, je brosse très brièvement un tableau des points principaux abordés dans chaque partie.

La première partie présente quelques problèmes à frontières libres essentiellement centrés sur le problème de l'obstacle. Nous adoptons l'approche développée par Caffarelli qui consiste à étudier la régularité de la frontière libre associée à une solution faible du problème. Plus précisément, nous étudions la régularité du bord d'un ouvert ω contenu dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pour lequel on suppose l'existence d'une fonction scalaire u vérifiant

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1 \quad \text{sur} \quad \Omega \setminus \bar{\omega} \\ u &= 0 = \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{sur} \quad \partial\omega \end{aligned}$$

Le caractère surdéterminé imposé par les conditions de Dirichlet et de Neumann sur la frontière libre $\partial\omega$ implique une certaine régularité de cette frontière qu'il est question d'étudier. Nous prouvons, entre autres, une nouvelle formule de monotonie qui permet d'étudier en détail les singularités éventuelles de la frontière libre.

La seconde partie porte sur l'étude des propriétés qualitatives d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires et de leurs applications en combustion. Il s'agit, pour la plupart des cas considérés, d'étudier les solutions d'équations de la forme

$$\Delta u + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(u) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n$$

L'outil principal est la méthode de déplacements de domaines développée par Berestycki et Nirenberg. Avec François Hamel, nous avons en particulier trouvé un cadre général d'étude des solutions posées sur l'espace entier pour certains problèmes de combustion. Cette approche nous a permis de commencer une classification des formes possibles de flammes de bec Bunsen.

Parallèlement je me suis intéressé à des propriétés de symétrie des solutions. Au centre de ces questions se trouve en particulier une conjecture de De Giorgi sur la symétrie uni-dimensionnelle des solutions d'équations elliptiques isotropes homogènes posées sur

l'espace entier (ici $b_i = 0$). Avec David Jerison nous relierons l'existence d'un contre-exemple en dimension n à l'existence d'une solution plus simple avec de nombreuses symétries en dimension $n - 1$, qui reste encore à construire. Par ailleurs, avec Jean Dolbeault nous avons obtenu un résultat de symétrie uni-dimensionnelle pour les solutions d'équations elliptiques complètement non linéaires sur \mathbb{R}^2 , dont la courbure des lignes de niveau n'est pas trop grande.

La troisième partie présente des questions d'analyse asymptotique en élasticité linéaire et non linéaire. Nous étudions principalement une plaque $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ de faible épaisseur 2ε , où ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Après changement d'échelle, l'épaisseur $(-\varepsilon, \varepsilon)$ est envoyée sur l'intervalle $I = (-1, 1)$, et le problème se ramène à l'étude des solutions $u = (u_1, u_2, u_3)$ du système linéaire elliptique d'ordre 2 suivant

$$L_\varepsilon u = f \quad \text{sur} \quad \Omega = \omega \times I \quad (1.1)$$

avec les conditions aux bords d'ordre 1 sur les faces supérieures et inférieures de la plaque

$$B_\varepsilon u = g \quad \text{sur} \quad \Omega = \omega \times \partial I \quad (1.2)$$

L'approche classique consiste à approximer la solution tridimensionnelle u par un déplacement de Kirchhoff-Love $U^0(\zeta^0)$ essentiellement bidimensionnel et indépendant de ε . Notre nouvelle approche consiste à remplacer ce déplacement de Kirchhoff-Love par un déplacement bidimensionnel plus complet $U^\varepsilon(\zeta^\varepsilon)$ qui dépend de ε . De plus ζ^ε satisfait une équation bidimensionnelle qui dépend de ε et qui se réduit aux équations de Kirchhoff-Love pour $\varepsilon = 0$. Ce nouveau modèle réduit, que nous baptisons modèle de Kirchhoff-Love d'ordre supérieur, permet ici d'obtenir des estimations d'erreurs optimales dans des espaces fonctionnels de meilleure régularité, et permettra de traiter sans effort supplémentaire des problèmes plus généraux, par exemple non linéaires. Notre approche nous invite à revisiter de ce nouveau point de vue de nombreux problèmes déjà étudiés dans la littérature. A des fins pédagogiques, nous avons trouvé intéressant de détailler notre approche ainsi que le modèle de Kirchhoff-Love d'ordre supérieur dans les sections 4.1, 4.2, 4.3.

Dans cette troisième partie nous présentons par ailleurs une nouvelle méthode d'inversion singulière que nous appliquons pour donner une estimation d'erreur et justifier ainsi le modèle de plaque non linéaire de Kirchhoff-Love.

Enfin dans un travail avec François Murat et Ali Sili, nous donnons des estimations d'erreurs pour un cylindre de faible épaisseur en élasticité linéaire inhomogène et anisotrope.

La quatrième partie présente d'autres cas d'études qui ne rentrent pas dans le découpage thématique précédent. Il s'agit de trois applications, l'une concernant l'étude des solutions de Meissner pour le modèle de Ginzburg-Landau en supraconductivité, l'autre étudiant le modèle de Thomas-Fermi-von Weizsäcker décrivant un demi-cristal sous champ électrique, et enfin le dernier cas d'étude où nous proposons un algorithme

pour des équations différentielles ordinaires avec une application en dynamique moléculaire.

Le lecteur se posera à juste titre la question de la cohérence des quatre parties distinctes brièvement présentées ci-dessus. Il trouvera la réponse à la lecture du mémoire en remarquant que le fil conducteur de ma démarche a été l'approfondissement des méthodes d'analyse des équations aux dérivées partielles elliptiques, et ce en étudiant des problèmes appliqués variés.

Enfin un mot sur la présentation matérielle du mémoire. Nous avons vu que le mémoire est constitué de quatre parties. Chaque partie est composée de sections présentant des travaux différents. Ces sections sont essentiellement indépendantes entre elles. Pour faciliter la lecture chaque section est précédée d'un résumé de son contenu. Par ailleurs chaque partie se termine par des compléments bibliographiques.

La bibliographie générale à la fin du mémoire suit l'ordre des quatre parties thématiques. La bibliographie correspondant à une partie est elle-même classée par ordre alphabétique. Une même référence, éventuellement utilisée dans plusieurs parties du mémoire, n'apparaît néanmoins que dans une seule partie de la bibliographie générale.

2 Etude de quelques problèmes à frontières libres

Dans cette partie nous présentons l'étude de plusieurs problèmes à frontières libres. Les quatre premières sections concernent le problème de l'obstacle, et la cinquième section traite d'une interface entre deux fluides. Dans la sixième section nous avons regroupé quelques notes bibliographiques. Nous renvoyons à l'ouvrage de Friedman [109] pour de nombreux exemples de problèmes à frontières libres et leur traitement mathématique. Nous commençons par donner une brève introduction au problème de l'obstacle, avant de donner ensuite une présentation détaillée de nos résultats. Nous renvoyons à Monneau [14] pour un petit panorama sur le problème de l'obstacle.

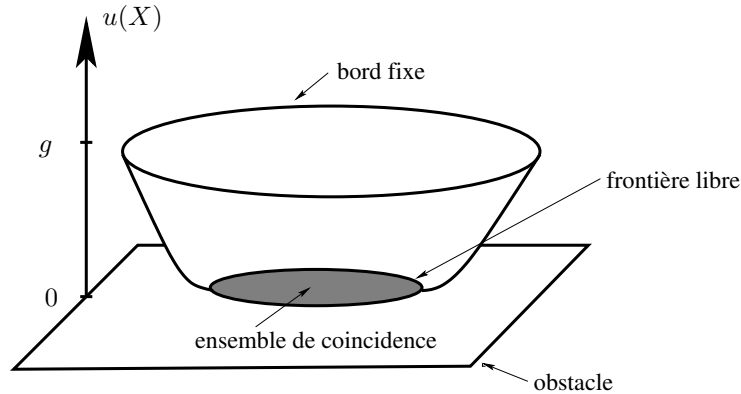


FIG. 1 – Le graphe d'une solution au problème de l'obstacle

Le problème de l'obstacle

Dans sa forme la plus simple le problème de l'obstacle consiste, étant donné un ouvert borné régulier Ω de \mathbb{R}^n , à minimiser l'énergie

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2u \quad (2.1)$$

sur l'ensemble des fonctions u appartenant au cône convexe K défini par

$$K = \{u \in H^1(\Omega), \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad u \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$$

Ici la donnée au bord est pour simplifier une constante $g > 0$ et l'obstacle est le niveau $u = 0$. La condition d'appartenance à K force la solution à être au dessus de l'obstacle, c'est-à-dire à ne prendre que des valeurs positives ou nulles. Il est bien connu que la solution de ce problème de minimisation existe et est unique (cf. l'ouvrage de Kinderlehrer et Stampacchia [142] et celui de Rodrigues [172]). L'ensemble de coïncidence est défini par

$$\{u = 0\}$$

et la frontière libre est le bord $\partial\{u = 0\}$ de cet ensemble de coïncidence. Nous avons représenté sur la figure 1 le graphe d'une solution au problème de l'obstacle. Depuis les

travaux de Frehse [108] et Brézis Kinderlehrer [66] il est connu que la solution u a la régularité $C^{1,1}(\overline{\Omega})$. Ainsi cette solution satisfait en particulier les conditions suivantes sur Ω

$$\begin{cases} u \geq 0 & \text{et} & |D^2u|_{L^\infty} \leq M \\ \Delta u = 1 & \text{dans} & \{u > 0\} \end{cases} \quad (2.2)$$

où M est une constante provenant de la borne $C^{1,1}$ sur u .

La théorie de Caffarelli de la régularité de la frontière libre pour le problème de l'obstacle

Etant donnée une solution u de (2.2) et un point X_0 de la frontière libre $\partial\{u=0\}$, Caffarelli a introduit dans [71, 72], pour le problème de l'obstacle, la notion de blow-up défini par la suite de fonctions indéxées par ε :

$$u^\varepsilon(X) = \frac{u(X_0 + \varepsilon X)}{\varepsilon^2}$$

qui sont encore solutions de (2.2). Puisque les dérivées secondes de la solution u sont bornées dans L^∞ , celles de u^ε , c'est-à-dire $D^2u^\varepsilon(X) = D^2u(X_0 + \varepsilon X)$ le sont aussi uniformément en ε . Il est ainsi possible d'extraire, via le théorème de Arzela-Ascoli, une sous-suite $u^{\varepsilon'}$ qui converge localement sur les compacts de \mathbb{R}^n vers une solution u^0 de (2.2) sur \mathbb{R}^n . De plus, il est prouvé (cf. Caffarelli [72], Weiss [191]) que u^0 est homogène de degré 2 et que $0 \in \partial\{u^0=0\}$.

Dans [72], Caffarelli a établi un théorème de type Liouville classifiant toutes les solutions de (2.2) sur \mathbb{R}^n qui sont homogènes de degré 2. Ce résultat affirme que seuls deux types de solutions sont possibles telles que $0 \in \partial\{u^0=0\}$ (en notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n) :

$$(R) \quad u^0(X) = \frac{1}{2} (\max(\langle X, \nu \rangle, 0))^2 \text{ où } \nu \text{ désigne un vecteur unitaire de } \mathbb{R}^n.$$

$$(S) \quad u^0(X) = \frac{1}{2} {}^tX \cdot Q \cdot X, \text{ où } Q \text{ est une matrice } n \times n \text{ vérifiant } Q \geq 0 \text{ et } \text{tr } Q = 1.$$

A posteriori, nous verrons que les limites de type (R) sont associées à des blow-up en des points X_0 où la frontière libre $\partial\{u=0\}$ est régulière, alors que les limites de type (S) sont obtenues en des points singuliers de la frontière libre.

Remarquons que les limites obtenues par blow-up dépendent *a priori* de la sous-suite extraite choisie. Il est prouvé dans Caffarelli [72], Weiss [191], qu'en un point X_0 de la frontière libre, les limites de blow-up sont soit toutes de type (R) ou bien toutes de type (S). De plus l'ensemble \mathcal{R} des points X_0 de la frontière libre qui ont une limite de type (R) constitue un ouvert relatif de la frontière libre.

L'analyse qui précède a des conséquences importantes sur la régularité de la frontière libre. Dans le cas des limites de type (R), la partie difficile de la preuve de Caffarelli dans [72] consiste à montrer que $\nu = \nu_{X_0}$ est *a posteriori* indépendant du choix de la

sous-suite. L'unicité du vecteur ν_{X_0} repose fondamentalement sur l'inégalité de Harnack (cf. Caffarelli [75, 76, 77, 74] pour une utilisation similaire de l'inégalité de Harnack, et Giusti [117] pour une application similaire à l'étude des surfaces minimales).

La conséquence de l'existence d'un vecteur ν_{X_0} unique en un point X_0 du sous-ensemble \mathcal{R} de la frontière libre est que l'application :

$$X_0 \longmapsto \nu_{X_0}$$

est continue sur \mathcal{R} , et donc la frontière libre est une hypersurface localement de régularité C^1 sur le sous-ensemble \mathcal{R} . Un résultat de régularité des frontières libres dû à Kinderlehrer et Nirenberg [138] implique alors une régularité supplémentaire de la frontière libre. Dans notre cas d'étude (2.2), la frontière libre est analytique en dehors des singularités. Nous renvoyons aussi à Isakov [123], Kinderlehrer, Nirenberg, Spruck [139, 140, 141] pour des résultats de régularité supplémentaire.

Dans ce qui précède nous avons vu que les limites de blow-up de type (R) ne dépendaient pas du choix de la sous-suite extraite. Ce n'est que très récemment qu'un résultat similaire a été prouvé pour les limites de blow-up de type (S). La preuve de ce résultat est due à Caffarelli [74] et repose sur la formule de monotonie de Alt Caffarelli Friedman [41] qui s'énonce ainsi : si v est une fonction continue sur $B_1(0)$ telle que $\Delta v = 0$ dans $\{v \neq 0\}$, et $v(0) = 0$, alors

$$\Psi(r) := \frac{1}{r^4} \left(\int_{B_r(0) \cap \{v > 0\}} \frac{|\nabla v|^2}{|X|^{n-2}} \right) \left(\int_{B_r(0) \cap \{v < 0\}} \frac{|\nabla v|^2}{|X|^{n-2}} \right) \quad \text{est croissante en } r$$

En choisissant successivement v égale aux différentes composantes du gradient de u , Caffarelli a pu prouver que la matrice $Q = Q_{X_0}$ est indépendante du choix de la sous-suite pour les limites de blow-up de type (S). Signalons que les fonctions u définies sur \mathbb{R}^n tout entier pour lesquelles la fonction $\Psi(r)$ est indépendante de r ont été caractérisées par Beckner, Kenig, Pipher [55]. Cette formule de monotonie a été récemment adaptée à des cas plus généraux que des fonctions harmoniques, par Caffarelli, Kenig, Jerison [79].

L'approche variationnelle de G.S Weiss

Il existe aussi une approche variationnelle de la régularité de la frontière libre pour le problème de l'obstacle, développée récemment par G.S. Weiss [191] qui repose sur une inégalité épipérimétrique (inspirée du travail de Reifenberg [170] sur les surfaces minimales). Dans cette approche l'inégalité de Harnack est virtuellement remplacée par l'inégalité épipérimétrique, elle-même établie essentiellement grâce au théorème de type Liouville démontré par Caffarelli. Cette approche suggère d'ailleurs des extensions aux cas de problèmes de l'obstacle pour des systèmes elliptiques pour lesquels on pourrait montrer un résultat de type Liouville.

L'inégalité épipérimétrique est reliée à la formule de monotonie de Weiss [191] qui s'énonce ainsi pour toute solution u de (2.2) sur Ω : pour tout point $X_0 \in \Omega$ tel que la boule $B_r(X_0)$ est contenue dans Ω on a

$$\Phi(r) := \left(\frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r(X_0)} |\nabla u|^2 + 2u \quad - \quad \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(X_0)} 2u^2 \right) \quad \text{est croissante en } r$$

2.1 Une nouvelle formule de monotonie pour le problème de l'obstacle et son application à une conjecture de Schaeffer. [18, 14]

Résumé

Dans cette section nous présentons une nouvelle formule de monotonie pour les points singuliers de la frontière libre du problème de l'obstacle. Nous énonçons ensuite la conjecture de Schaeffer sur la régularité générique attendue de la frontière libre. Comme application de notre formule de monotonie, nous prouvons la conjecture de Schaeffer en dimension 2. Enfin, nous donnons un résultat géométrique sur le nombre de points singuliers de la frontière libre en dimension 2. Nous prouvons en particulier que les composantes suffisamment petites de l'intérieur de l'ensemble de coïncidence ont au plus 2 points singuliers.

D'une façon générale, les singularités de la frontière libre du problème de l'obstacle sont inévitables et apparaissent dès la dimension 2, comme cela est montré dans Schaeffer [179]. Sur les figures 2 et 3, nous avons représenté d'une part une singularité obtenue par auto-contact tangent de la frontière libre, et d'autre part un cusp.

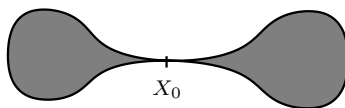


FIG. 2 – Un point de contact tangent

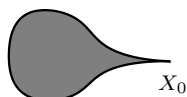


FIG. 3 – Un cusp

Nous prendrons la définition suivante :

Définition 2.1 (Points réguliers, points singuliers)

Un point X_0 est dit point régulier si et seulement si la frontière libre $\partial\{u = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ est localement une hypersurface C^1 au voisinage de X_0 . Le point X_0 est dit singulier s'il n'est pas régulier.

Pour étudier ces points singuliers en toutes dimensions, nous avons établi la nouvelle formule de monotonie suivante

Théorème 2.2 (Formule de monotonie pour les points singuliers)

Soit $v(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X$ où Q est une matrice $n \times n$ symétrique telle que $\text{tr } Q = 1$. Si u est une solution de (2.2), et si l'origine 0 est un point singulier de la frontière libre $\partial \{u = 0\}$, alors

$$\frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} (u - v)^2 \quad \text{est croissante en } r$$

Ce résultat se démontre assez facilement à partir de la formule de monotonie de Weiss. La liberté que l'on a sur le choix des fonctions v implique l'unicité de la limite de tout blow-up en 0 et prouve en particulier que u admet un développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

Corollaire 2.3 (Développement de Taylor en un point singulier)

Si u est une solution de (2.2), et si l'origine 0 est un point singulier de la frontière libre, alors

$$u(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q_0 \cdot X + o(X^2)$$

où Q_0 est une matrice $n \times n$ vérifiant $\text{tr } Q_0 = 1$ et $Q_0 \geq 0$.

Ce résultat a aussi été prouvé récemment par Caffarelli dans [74], mais en utilisant la formule de monotonie de Alt Caffarelli Friedman, appliquée au gradient de u . A contrario, notre formule de monotonie ne nécessite pas de dériver la solution u et permet donc d'étudier les singularités des frontières libres pour des problèmes de l'obstacle associés à des opérateurs plus généraux que l'opérateur de Laplace (cf. Monneau [18]), ce que ne permet pas l'approche de Caffarelli [74].

Nous énonçons maintenant la

Conjecture 2.4 (Schaeffer [177] (1974))

Nous conjecturons que toute solution faible du problème de l'obstacle que l'on obtient variationnellement est génériquement une solution forte, c'est-à-dire que la frontière libre est une variété C^∞ .

Dans le cas particulier de la dimension 2, nous établissons cette conjecture :

Théorème 2.5 (Régularité générique de la frontière libre en dimension 2)

Pour $n = 2$, les minimiseurs u_g de l'énergie (2.1) sur le cône convexe K vérifiant en particulier $u_g = g$ sur le bord $\partial\Omega$ avec $g > 0$ une constante, sont tels que pour presque toute valeur de g , la frontière libre $\partial\{u_g = 0\}$ est une sous-variété analytique de dimension 1.

La conjecture de Schaeffer reste ouverte en dimension $n \geq 3$. En dimension supérieure nous avons seulement le

Théorème 2.6 (Régularité générique en dimension $n \geq 3$)

En dimension $n \geq 3$, les minimiseurs u_g de l'énergie (2.1) sur le cône convexe K sont tels que pour presque toute valeur de g , il existe un ensemble \mathcal{S}_g tel que la frontière libre privée de cet ensemble, c'est-à-dire $\partial\{u_g = 0\} \setminus \mathcal{S}_g$ est une sous-variété analytique de dimension $n - 1$, et la mesure de Hausdorff $(n - 2)$ -dimensionnelle de \mathcal{S}_g est égale à zéro.

Donnons une idée succincte de la preuve des théorèmes 2.5, 2.6 qui se fait en trois étapes.

Etape 1

On prouve tout d'abord que la collection de tous les points singuliers pour toutes les valeurs de $g > 0$, $\mathcal{S} = \bigcup_g \mathcal{S}_g$ est contenue dans une hypersurface C^1 plus un ensemble résiduel de mesure de Hausdorff $(n - 1)$ -dimensionnelle égale à zéro. Les ingrédients de la preuve sont le théorème d'extension de Whitney (cf. Federer [107]), et notre formule de monotonie pour les points singuliers. Cette dernière permet en particulier d'associer un hyperplan tangent en chaque point singulier, avec dépendance continue de cet hyperplan en fonction du point.

Etape 2

On montre que l'ensemble obtenu comme la collection des frontières libres pour $g > 0$:

$$\bigcup_g (\partial\{u_g = 0\}) \times \{g\}$$

est le graphe d'une fonction h Lipschitz sur Ω . Le caractère Lipschitz est prouvé grâce à une méthode de déformation de sous-solutions (inspirée de Caffarelli [76]) du type :

$$v^\varepsilon(X) = \sup_{Y \in B_{\varepsilon\delta}(X)} u_{g-\delta}(Y)$$

dont on montre qu'elles restent sous la solution u_g pour des ε dans une plage de valeurs $(0, \varepsilon_c)$ où ε_c est indépendant de $\delta > 0$ dans la limite des petits δ . Ceci donne exactement le contrôle Lipschitz désiré.

Etape 3

On applique la formule de co-aire à la restriction de la fonction h à l'ensemble de tous les points singuliers \mathcal{S} :

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{H}^{n-2} \left((h|_{\mathcal{S}})^{-1}(g) \right) dg = \int_{\mathcal{S}} |\nabla h|_{\mathcal{S}}| d\mathcal{H}^{n-1}$$

Ici \mathcal{H}^{n-2} est la mesure de Hausdorff $(n - 2)$ -dimensionnelle, et $d\mathcal{H}^{n-1}$ est l'élément de mesure de Hausdorff $(n - 1)$ -dimensionnel. On conclut la preuve en prouvant par une autre méthode que le gradient de $h|_{\mathcal{S}}$ est nul.

En dimension 2, il est possible d'avoir des informations de nature géométrique sur les singularités et ceci pour toute frontière libre (et non plus génériquement seulement). Ainsi Caffarelli et Rivière [82, 83, 81, 84] ont prouvé par des méthodes de fonctions

holomorphes que le bord de toute composante connexe de l'intérieur de l'ensemble de coïncidence a un nombre fini de points singuliers. Citons aussi le travail de Mallet-Paret [157] sur la forme générique des singularités du problème de l'obstacle en dimension 2. Dans Schaeffer [179], on peut lire par ailleurs :

“Dans nos exemples, si $n = 2$, les points exceptionnels se situent tous sur l'axe des réels avec au plus deux points exceptionnels par composantes”.

Cette remarque introduit naturellement notre résultat sur le nombre de points singuliers de la frontière libre en dimension 2 :

Théorème 2.7 (Les petites composantes ont au plus deux points singuliers)

Soit \mathcal{C} une composante connexe de l'intérieur de l'ensemble de coïncidence d'une solution u de (2.2) sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Alors il existe une constante $\rho = \rho(|D^2u|_{L^\infty(\Omega)}, \text{dist}(\mathcal{C}, \partial\Omega)) > 0$ telle que

- i) si $\text{diam}(\mathcal{C}) < \rho$, alors la frontière libre $\partial\mathcal{C}$ est analytique sauf en au plus deux points.*
- ii) si $\text{diam}(\mathcal{C}) \geq \rho$, et $X_1, X_2 \in \partial\mathcal{C}$ sont deux point singuliers, alors $|X_1 - X_2| \geq \frac{\rho}{2}$.*

Ce résultat repose sur la théorie [72] développée par Caffarelli et sur une propriété que nous avons prouvée pour les points singuliers en dimension 2 : si X_0 est un point singulier du bord de la composante \mathcal{C} , alors localement dans une boule $B_r(X_0)$, la composante \mathcal{C} est contenue dans le voisinage tubulaire d'un des rayons de la boule. Le voisinage tubulaire est choisi d'épaisseur $e(r)$, tel que l'épaisseur relative $\frac{e(r)}{r}$ tend vers zéro lorsque r tend vers zéro (cf. Monneau [18]).

Les résultats qui précèdent admettent certaines extensions à des problèmes de l'obstacle correspondant à des opérateurs elliptiques plus généraux que l'opérateur de Laplace, extensions qui sont présentées dans Monneau [18]. Citons enfin les travaux de Blank [58, 59], Ki-ahm Lee [134], pour une théorie de la régularité de la frontière libre pour le problème de l'obstacle complètement non linéaire.

2.2 Transfert de régularité du bord fixe vers le bord libre : une approche à la Caffarelli [30]

Résumé

Dans cette section nous donnons un résultat de type perturbatif, concernant le problème de l'obstacle. Nous prouvons, via la théorie de Caffarelli, que la frontière libre est régulière lorsque celle-ci est suffisamment proche du bord fixe qui lui n'est supposé que de régularité Lipschitz. Nous étendons ce résultat à un problème de l'obstacle non linéaire intervenant dans la modélisation des supraconducteurs, pour lequel nous prouvons aussi un résultat de stabilité par perturbation. Nous donnons enfin une estimation de l'aire de la frontière libre.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n que nous n'allons pas supposer régulier dans cette section. On supposera Ω seulement de régularité Lipschitz et satisfaisant la condition

suivante de sphère extérieure pour un $\delta > 0$ donné : pour tout point X du bord de l'ouvert $\partial\Omega$, il existe une boule B_δ contenue dans le complémentaire de Ω , et tangente en X au bord de l'ouvert $\partial\Omega$.

Nous considérons à nouveau le minimiseur u_g de l'énergie

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2u \tag{2.3}$$

sur l'ensemble de fonctions u appartenant au cône convexe K défini par

$$K = \{u \in H^1(\Omega), \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad u \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$$

où la donnée au bord est une constante $g \geq 0$.

Pour $g = 0$, il est clair que la solution est $u_0 \equiv 0$ et la frontière libre est $\partial\{u_0 = 0\} = \partial\Omega$.

Par perturbation, nous prouvons le résultat suivant

Théorème 2.8 (Transfert de régularité du bord fixe vers le bord libre)

Sous les conditions qui précèdent, il existe $g_0 > 0$ tel que la frontière libre $\partial\{u_g = 0\}$ est analytique pour tout $g \in (0, g_0)$.

Ce résultat ne se montre pas par un théorème des fonctions implicites (voir section 2.3 pour une telle approche en supposant plus de régularité sur $\partial\Omega$). Ici la preuve se fait par l'absurde. En supposant le théorème faux, on déduit l'existence d'une suite de points singuliers $(X_g)_g$ des frontières libres $\partial\{u_g = 0\}$ lorsque g tend vers zéro. En suivant les points X_g par un blow-up adapté

$$u^g(X) = \frac{u_g(X_g + X\sqrt{g})}{g}$$

et en extrayant une sous-suite convenable, nous obtenons une contradiction à la limite $g = 0$, via la théorie de Caffarelli. Pour pouvoir passer à la limite il faut un contrôle sur la solution u_g . Ce contrôle est obtenu via une borne L^∞ sur les dérivées secondes de u_g , uniforme par rapport à g petit. Puisque le bord fixe $\partial\Omega$ n'est pas supposé régulier, cette borne L^∞ est uniquement valable en des points situés à une distance du bord fixe $\partial\Omega$, supérieure ou égale à une constante fois \sqrt{g} . Cette borne L^∞ est obtenue en appliquant judicieusement l'inégalité de Harnack dans l'esprit du travail de Alt et Phillips [43].

Nous considérons maintenant un problème de l'obstacle non linéaire intervenant dans la modélisation des supraconducteurs (cf. Chapman, Rubinstein, Schatzman [93], Serfaty, Sandier [503], section 5). Soit G une fonction C^∞ vérifiant $G'(0) > 0$ et convexe sur $[0, +\infty)$. On considère alors la minimisation de l'énergie

$$\int_{\Omega} G(|\nabla u|^2) + u^2 \tag{2.4}$$

sur le cône convexe $K_{g,h}$ défini par

$$K_{g,h} = \{u \in H^1(\Omega), \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad u \geq h \text{ sur } \Omega\}$$

où $g > h > 0$ sont des constantes. On a alors le

Théorème 2.9 (Transfert de régularité du bord fixe vers le bord libre)

Pour tout $g > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $h \in (g - \eta, g)$, il existe un unique minimiseur de l'énergie (2.4) sur $K_{g,h}$. De plus la frontière libre de ce minimiseur est C^∞ .

Ce résultat est prouvé, pour un problème semblable, de façon formelle dans Chapman, Rubinstein, Schatzman [93] grâce à une analyse asymptotique. Ici nous prouvons rigoureusement ce résultat. Notre preuve est similaire à celle du théorème 2.8 mais beaucoup plus technique. Là encore, l'inégalité de Harnack joue un rôle essentiel.

Pour ce problème de l'obstacle non linéaire, nous prouvons aussi un résultat de stabilité locale :

Théorème 2.10 (Perturbation de la frontière libre, locale en espace)

Soit $h^ \in (0, g)$ et u_{g,h^*} un minimiseur de l'énergie (2.4) sur le convexe K_{g,h^*} tel que la frontière libre $\partial\{u_{g,h^*} = 0\}$ soit C^∞ dans un compact \mathcal{K}^* de Ω . Alors pour tout compact \mathcal{K} strictement inclus dans \mathcal{K}^* , il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout h vérifiant $|h - h^*| < \varepsilon$, la frontière libre $\partial\{u_{g,h} = 0\}$ est aussi C^∞ dans \mathcal{K} .*

Ce résultat repose une fois encore sur la théorie de Caffarelli [72]. Nous renvoyons à Rodrigues [172] pour la littérature sur la stabilité de la frontière libre par perturbation. Nous prouvons enfin une estimation de l'aire de la frontière libre. Ce résultat généralise au cas $\partial\Omega$ Lipschitz, celui de Brézis, Kinderlehrer [66]. La méthode de preuve est une adaptation de Caffarelli [73].

Théorème 2.11 (Estimation de l'aire de la frontière libre)

Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω, g, G telle que pour tout minimiseur $u_{g,h}$ de l'énergie (2.4) sur le convexe $K_{g,h}$ pour $h \in [0, g]$, on a

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\{u_{g,h} = h\}) \leq C$$

2.3 Perturbation de la frontière libre grâce à la théorie de Nash-Moser [2]

Résumé

Dans cette section nous présentons une approche perturbative du problème de l'obstacle. Nous expliquons pourquoi le théorème d'inversion locale classique ne s'applique pas. En revanche nous montrons que le théorème d'inversion locale de Nash-Moser s'applique et donne un résultat de stabilité de la frontière libre par perturbation. Nous adaptons cette approche dans le cas d'une perturbation singulière de la frontière libre.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec A. Bonnet.

Il est possible de voir que le problème de l'obstacle non linéaire associé à l'énergie (2.4) de la section précédente peut se reformuler de la façon suivante dans le cas où la frontière libre est régulière.

Nous cherchons un ouvert borné régulier ω inclus dans l'ouvert borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, et une fonction u définie sur $\overline{\Omega \setminus \omega}$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(G'(|\nabla u|^2)\nabla u) - u = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \overline{\omega} \\ \text{où la fonction } G \text{ est } C^\infty \text{ convexe sur } [0, +\infty) \text{ avec } G'(0) > 0 \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega \\ u = h \text{ sur } \partial\omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\omega \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Ici g, h sont des constantes vérifiant $g > h > 0$. Stricto sensu, nous avons donné dans [2] les preuves dans le cas de la dimension $n = 2$, bien que tous les résultats de cette section s'étendent sans difficultés en dimensions supérieures.

Dans cette section nous supposons le bord fixe $\partial\Omega$ de régularité C^∞ et nous montrons comment on peut obtenir l'existence de solutions régulières (ω, u) du problème à frontière libre (2.5) par perturbation d'une solution initiale (ω^*, u^*) avec une frontière libre $\partial\omega^*$ régulière. Nous allons appliquer le théorème d'inversion locale de Nash-Moser pour lequel nous renvoyons à Hamilton [118], Alinhac, Gérard [35], et aussi pour des compléments Moser [160, 161, 162], Nash [163], Schwartz [182], Sergeraert [183, 184], Zehnder [194].

Précisément pour introduire nos résultats, il est nécessaire de rappeler la :

Définition 2.12 (Application douce)

L'application $\Phi : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$ où M et N sont deux variétés éventuellement à bords, est dite C^0 -douce sur l'ouvert $U \subset C^\infty(M)$, si elle est continue et si elle vérifie l'inégalité douce suivante pour un $\alpha \in (0, 1)$:

$$\exists r \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists C_{k+\alpha} > 0, \quad \forall u \in U : \quad |\Phi(u)|_{k+\alpha} \leq C_{k+\alpha}(1 + |u|_{k+r+\alpha})$$

et Φ est C^∞ -douce si $D^j\Phi$ est C^0 -douce pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Ici $(|\cdot|_{k+\alpha})_{k \geq 0}$ désigne une échelle de normes de Hölder de plus en plus régulières. Le théorème d'inversion locale de Nash-Moser permet d'inverser l'équation $\Phi(u) = f$ au voisinage d'une solution particulière $\Phi(u^*) = f^* \in C^\infty$, si Φ et $(D\Phi)^{-1}$ sont C^∞ -douces au voisinage de $u^* \in C^\infty$. Ainsi on prouve le

Théorème 2.13 (Perturbation globale de la frontière libre)

Si (ω^*, u^*) est une solution particulière de (2.5) pour $h = h^* \in (0, g)$ telle que $\partial\omega^* \in C^\infty$, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout h vérifiant $|h - h^*| < \eta$, le problème (2.5) admet une solution régulière (ω, u) avec une frontière libre $\partial\omega$ de régularité C^∞ . De plus l'application $h \mapsto \partial\omega$ est C^∞ -douce.

La méthode de preuve consiste à scinder le problème (2.5) en deux sous-problèmes.

Sous-problème 1

On suppose la frontière libre $\Gamma = \partial\omega$ donnée a priori et on résoud

$$\begin{cases} \operatorname{div}(G'(|\nabla u|^2)\nabla u) - u = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

Ceci fournit une solution $u(\Gamma)$.

Sous-problème 2

On impose la condition de Dirichlet sur Γ :

$$u(\Gamma)|_{\Gamma} = h$$

ce qui détermine implicitement la frontière libre $\Gamma = \Gamma(h)$ grâce au théorème de Nash-Moser appliqué à $\Phi(\Gamma) := u(\Gamma)|_{\Gamma}$.

Il est nécessaire de recourir au théorème de Nash-Moser, car le théorème d'inversion locale classique dans les espaces de Hölder ne s'applique pas ici. En effet l'application

$$\begin{array}{ccc} \Phi : C^{k+\alpha} & \longrightarrow & C^{k+\alpha} \\ \Gamma & \longmapsto & u(\Gamma)|_{\Gamma} \end{array}$$

est telle que sa différentielle en $\Gamma^* \in C^{k+\alpha}$ arrive dans un espace plus régulier que $C^{k+\alpha}$:

$$D_{\Gamma}\Phi(\Gamma^*) : C^{k+\alpha} \longrightarrow C^{k+1+\alpha}$$

Cela se traduit par une perte de régularité sur l'inverse du linéarisé $(D\Phi)^{-1}$ qui applique alors $C^{k+\alpha}$ dans $C^{k-1+\alpha}$. Cette perte de dérivée d'une unité sur $(D\Phi)^{-1}$ provient du fait que l'on impose sur la frontière libre Γ deux conditions d'ordres différentiels différents (Dirichlet $u = h$ et Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$). En revanche si on considère $\Phi : C^{\infty} \longmapsto C^{\infty}$ alors $D\Phi$ est une bijection de C^{∞} dans C^{∞} , et le théorème d'inversion locale de Nash-Moser s'applique.

Des résultats de stabilité de la frontière libre par perturbation, similaires au théorème 2.13, sont obtenus dans Hamilton [118], Schaeffer [178] pour des problèmes à frontières libres faisant intervenir des opérateurs elliptiques linéaires. Signalons aussi Dervieux [98].

Nous énonçons maintenant un résultat de perturbation singulière de la frontière libre obtenu via le théorème de Nash-Moser

Théorème 2.14 (Perturbation singulière de la frontière libre)

Il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $h \in (g - \eta, g)$, le problème (2.5) admet une solution régulière (ω, u) avec une frontière libre $\Gamma = \partial\omega \in C^{\infty}$. De plus l'application $h \longmapsto \partial\omega$ est C^{∞} -douce.

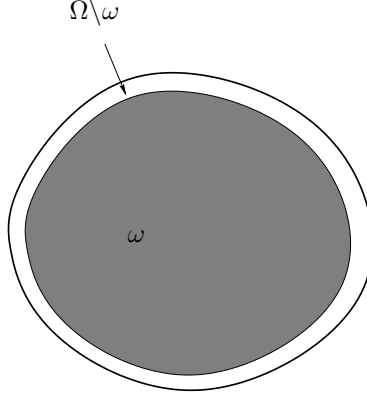


FIG. 4 – Perturbation singulière à partir du cas $\Omega \setminus \omega = \emptyset$

Remarquons que lorsque h tend vers g , le domaine $\Omega \setminus \omega$ sur lequel l'équation elliptique est définie tend vers l'ensemble vide. Le théorème 2.14 est donc un théorème de perturbation analogue au théorème 2.13, mais à partir d'un cas dégénéré où le domaine sur lequel est posée l'équation elliptique a disparu car $\Omega \setminus \omega^* = \emptyset$ pour $h = h^* = g$.

Si ε est l'ordre de grandeur de la distance entre la frontière libre $\partial\omega$ et $\partial\Omega$, alors quand $h \rightarrow g$, on a $\varepsilon \rightarrow 0$, et la difficulté est de pouvoir prouver que $(D\Phi)^{-1}$ est C^∞ -douce jusqu'en $\varepsilon = 0$. Pour cela, dans le cas où Ω est homéomorphe à un disque, on ramène $\Omega \setminus \omega$ par changement de variable à $\mathbf{S}^1 \times (0, 1)$, et ainsi l'équation $D\Phi \cdot w = k$ écrite sur $\mathbf{S}^1 \times (0, 1)$ prend la forme suivante

$$\begin{cases} \varepsilon^2 A_{ss}^2 w_{ss} + 2\varepsilon A_{rs}^2 w_{rs} + A_{rr}^2 w_{rr} + \varepsilon A_s^1 w_s + A_r^1 w_r + A_0 w = k_0(s, r) \\ \partial_r w(s, r = 1) = k_1(s) \\ w(s, r = 0) = k_2(s) \end{cases} \quad (2.6)$$

Remarquons en particulier que l'opérateur sur w dégénère lorsque ε tend vers zéro. On conclut grâce au théorème suivant d'intérêt indépendant :

Théorème 2.15 (Douceur elliptique dans un cas dégénéré)

Soit $w(s, r)$, avec $(s, r) \in \mathbf{S}^1 \times [0, 1]$ une solution de (2.6). Si l'opérateur elliptique vérifie le principe du maximum, alors la solution w est C^∞ -douce des coefficients $A(s, r)$, du second membre $k(s, r)$ et de ε jusqu'en $\varepsilon = 0$.

Signalons que des cas dégénérés ont été étudiés dans Schaeffer [180] et Plotnikov [166] avec des méthodes différentes de la notre.

2.4 Sur la convexité de l'ensemble de coïncidence du problème de l'obstacle : le point de vue des équations complètement non linéaires [11, 12]

Résumé

Dans cette section nous présentons une propriété de convexité de l'ensemble de coïncidence pour un problème de l'obstacle quasilineaire en dimension 2 posé sur un ouvert convexe. Cette propriété résulte de l'application d'un théorème beaucoup plus général que nous établissons pour les solutions analytiques d'équations elliptiques complètement non linéaires en dimension 2. Ce théorème fournit un système d'équations/inéquations différentielles couplées sur le gradient et la courbure des lignes de niveau de la solution. Nous établissons en particulier qu'aux points de maximum de gradient sur une ligne de niveau, la courbure ne peut que décroître avec le niveau.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec J. Dolbeault.

Etant donné un ouvert borné régulier Ω de \mathbb{R}^2 , et étant données deux fonctions convexes F et G , respectivement C^2 et C^1 , et vérifiant $G'(0) > 0$, nous supposons l'existence d'un minimiseur u de l'énergie

$$\int_{\Omega} G(|\nabla u|^2) + F(u) \quad (2.7)$$

sur le cône

$$K = \{u \in H^1(\Omega), \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad u \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$$

où $g > 0$ est une constante. Alors on prouve le

Théorème 2.16 (Convexité de l'ensemble de coïncidence)

Sous les hypothèses précédentes, si Ω est convexe, alors l'ensemble de coïncidence $\{u = 0\}$ du minimiseur est aussi convexe.

Ce théorème a été prouvé dans le cas particulier où G' et F' sont des constantes par Friedman, Phillips [110] en dimension 2 et étendu en toutes dimensions par Kawohl [126]. Le problème extérieur a été étudié par Kawohl [127]. Rappelons que les solutions du problème de l'obstacle vérifient une condition de Neumann homogène sur la frontière libre :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\{u = 0\} \quad (2.8)$$

Des résultats similaires au théorème 2.16 ont été prouvés par Caffarelli, Spruck [250] pour l'opérateur de Laplace avec une condition de Neumann inhomogène $\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda > 0$ avec λ constant sur la frontière libre. Mentionnons aussi deux autres résultats sur les anneaux convexes Caffarelli, Spruck [250], Diaz, Kawohl [101]. Pour les questions générales de convexité nous renvoyons à Kawohl [129]. Signalons au passage les travaux de Gabriel [115], Kawohl [130] sur des questions voisines, un papier récent de Caffarelli, Salazar [85], et les résultats de Henrot, Shahgholian [119, 120, 121].

Nous notons $n = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ la normale unitaire à la ligne de niveau et τ le vecteur unitaire tangent à la ligne de niveau de sorte que (τ, n) forme une base directe. Etant donnée une fonction \mathcal{G} analytique et deux ouverts $\omega \subset\subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous allons considérer les

solutions analytiques de l'équation complètement non linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(D_{nn}u, D_{\tau\tau}u, D_{n\tau}u, |\nabla u|, u) &= 0 \quad \text{dans} \quad \{\nabla u \neq 0\} \cap (\Omega \setminus \bar{\omega}) \\ 0 < u < g \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \bar{\omega} \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec les conditions au bord pour une constante $g > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda(K) \geq 0 \end{array} \right| \quad \text{sur} \quad \partial\omega \tag{2.10}$$

Ici λ est une fonction de la courbure K de la frontière libre $\partial\omega$ (avec la convention que K est positif si ω est convexe).

Nous ferons les hypothèses suivantes

(E) Conditions d'ellipticité :

Définissons $\alpha = (\mathcal{G})'_{D_{nn}u}$, $\beta = (\mathcal{G})'_{D_{\tau\tau}u}$ et $\gamma = (\mathcal{G})'_{D_{n\tau}u}$. On demande que

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad 4\alpha\beta - \gamma^2 \geq 0,$$

(FL) Condition sur la frontière libre :

$\partial\omega$ est analytique et l'application $K \mapsto \lambda(K)$ est analytique, décroissante. De plus si $\lambda(K) \equiv 0$ sur $\partial\omega$, alors on demande que $\mathcal{G}(0, 0, 0, 0, 0) < 0$ et que le champ de vecteur $n = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ soit analytique jusqu'au bord $\partial\omega$.

Par exemple l'hypothèse (E) est en particulier satisfaite pour une équation quasi-linéaire du type

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = f(u, |\nabla u|)$$

ou bien une équation complètement non linéaire du type Monge-Ampère

$$\det(D^2u) = f(u, |\nabla u|)$$

Pour tout niveau $t \in (0, g)$, nous notons Γ^t la courbe de niveau

$$\Gamma^t = \{x \in \Omega, \quad u(x) = t\}$$

Nous notons $m(t)$ le maximum du gradient sur cette courbe de niveau

$$m(t) = \max_{y \in \Gamma^t} |\nabla u(y)|$$

Nous définissons maintenant l'ensemble X^t des points de gradient maximal sur la ligne de niveau

$$X^t = \{x \in \Gamma^t, \quad |\nabla u(x)| = m(t)\}$$

Enfin nous choisissons de définir la courbure $K(t)$ correspondante comme la plus grande courbure de ces points

$$K(t) = \max_{y \in X^t} \left(\frac{D_{\tau\tau} u}{|\nabla u|}(y) \right)$$

On a alors le

Théorème 2.17 (Equation sur le gradient, inéquation sur la courbure)

Sous l'hypothèse (E) et la condition $m(t) > 0$ sur $(0, g)$, soit u une solution analytique de (2.9). Avec les notations précédentes, m et K sont solutions sur $(0, g)$ de

$$\mathcal{G} \left(m \frac{dm}{dt}, mK, 0, m, t \right) = 0$$

$$\frac{dK}{dt} \leq -\frac{K^2}{m}$$

Ici l'inéquation sur la courbure $K(t)$ doit être comprise au sens des distributions $\mathcal{D}'(0, g)$, alors que l'équation sur le gradient $m(t)$ est satisfaite pour presque toute valeur de $t \in (0, g)$.

Le théorème 2.17 se prouve en faisant des développements de Taylor aux points où le gradient est maximal sur les lignes de niveau. Nous utilisons les formules de Frechet (cf. Laurence, Stredulinsky [428] pour une utilisation dans le cas de l'opérateur de Laplace). La partie difficile de notre preuve utilise de façon cruciale la caractérisation des ensembles d'annulation des fonctions analytiques (cf. B. Kaup, L. Kaup [125], P. Dolbeault [102]). L'analyse que nous effectuons des lignes de niveau est inspirée de Dolbeault, Poupaud [103]. Remarquons enfin que dans le cas d'une solution à symétrie radiale, l'inégalité sur la courbure est en fait une égalité. Cela est à mettre en relation avec les méthodes de comparaison développées par Talenti [188].

Nous avons alors le corollaire suivant :

Corollaire 2.18 (Borne supérieure sur le gradient, borne inférieure sur la courbure)

Sous les hypothèses (E)-(FL) et la condition $m(t) > 0$ sur $(0, g]$, si u est une solution analytique (jusqu'au bord fixe $\partial\Omega$) du problème à frontière libre (2.9)-(2.10) (y compris dans le cas $\omega = \emptyset$), alors on a les propriétés suivantes :

- i) Le gradient de u est borné par une constante qui ne dépend que de \mathcal{G} , $|\lambda(K)|_{L^\infty(\partial\omega)}$, g et du minimum de la courbure de $\partial\Omega$.*
- ii) Le minimum de la courbure de $\partial\omega$ est plus grand que le minimum de la courbure de $\partial\Omega$. En particulier, si Ω est convexe, alors chaque composante connexe de ω est aussi convexe.*

Remarquons que nous obtenons au passage une borne inférieure sur la courbure de la frontière libre. Nous devons citer le travail de Schaeffer [181], où sont données, pour le problème de l'obstacle, des bornes inférieures locales sur la courbure de la frontière libre.

2.5 Conditions suffisantes pour l'absence de zone de mélange entre deux fluides dans un milieu poreux [19]

Résumé

Dans cette section nous nous intéressons à un modèle d'écoulement stationnaire de deux fluides non miscibles dans un milieu poreux. Même si physiquement les deux fluides sont supposés non miscibles, la méthode mathématique, disponible à ce jour, pour construire les solutions du modèle ne permet pas d'assurer l'absence de zone de mélange (*mushy region* dans la littérature). Nous donnons un critère suffisant pour assurer l'absence de zone de mélange. Pour établir ce résultat nous devons étendre certains résultats de Caffarelli sur la régularité des frontières libres, de façon à les appliquer à ce modèle.

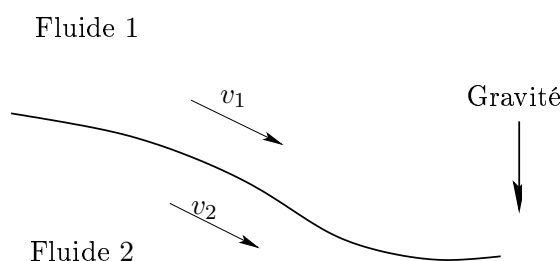


FIG. 5 – L'interface entre deux fluides

Il s'agit d'un travail en collaboration avec A. Bonnet.

Nous commençons par donner une présentation d'un modèle physique d'écoulement de deux fluides dans un milieu poreux, et ce, sans se soucier des difficultés mathématiques. Dans un second temps nous rappellerons une formulation mathématique de ce problème qui garantit l'existence de solutions.

Nous nous intéressons à l'écoulement stationnaire de deux fluides non miscibles dans un domaine Ω de \mathbb{R}^2 . Les coordonnées sont $X = (x, y)$ où x représente l'horizontale et y la verticale. Ces deux fluides repérés par les indices $i = 1, 2$ sont soumis à leur poids et obéissent à la loi de Darcy qui relie la vitesse de chaque fluide v_i à son gradient de pression

$$v_i = -k\nabla(p_i + \rho_i gy)$$

où k est une constante (la constante de perméabilité du milieu poreux), p_i la pression dans le fluide i , ρ_i sa masse volumique supposée constante mais différente pour chacun des fluides, et g la constante de gravité. A l'interface entre les deux fluides, il y a continuité de la pression et de la vitesse normale. Pour finir les fluides sont supposés incompressibles (c'est-à-dire $\text{div } v_i = 0$).

Ce problème est reformulé (cf. Alt, van Duijn [44]) sur la fonction de courant u (fonction scalaire), qui est telle que les lignes de niveau de u représentent les trajectoires des particules du fluide. Ainsi le fluide 1 peut être assimilé à la région $\{u < 0\}$, le fluide 2 à

la région $\{u > 0\}$ et l'interface entre les deux fluides à la ligne de niveau $\{u = 0\}$. Il est montré dans Alt, van Duijn [44] que u satisfait les équations

$$\Delta u = 0 \quad \text{sur} \quad \{u \neq 0\} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u|_+}{\partial n} = \frac{\partial u|_-}{\partial n} - \lambda \langle n, e_x \rangle \quad \text{sur} \quad \{u = 0\} \quad (2.12)$$

où $u|_+$ et $u|_-$ sont respectivement les restrictions de u à $\{u > 0\}$ et $\{u < 0\}$. Ici n désigne la normale unitaire extérieure au fluide $\{u < 0\}$, et $\lambda = (\rho_2 - \rho_1)g > 0$.

Nous passons maintenant au volet mathématique de cette présentation. Il est bien connu que les équations (2.11)-(2.12) ne sont pas attaquables sous cette forme. En particulier étant donné un problème avec des conditions aux limites, on ne sait pas s'il existe des solutions de ces équations. L'approche mathématique consiste à donner une formulation faible des équations (2.11)-(2.12) pour laquelle on a un théorème d'existence. Pour cela on introduit une seconde fonction inconnue γ qui est destinée à être la fonction caractéristique de $\{u > 0\}$ lorsque la frontière libre est régulière. On considère les fonctions $(u, \gamma) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ solutions de

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \gamma \partial_x v = 0, \quad \text{et} \quad \gamma \in H(u) \quad (2.13)$$

où

$$H(u) = \begin{cases} \{1\} & \text{if } u > 0 \\ [0, 1] & \text{if } u = 0 \\ \{0\} & \text{if } u < 0 \end{cases}$$

et

$$u = u_0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \quad (2.14)$$

L'existence de solutions (u, γ) à (2.13)-(2.14) est connue sous certaines conditions sur $\partial\Omega$ et u_0 (cf. Bonnet, Kamin [63], Carrillo [88]). De plus il est montré que u est alors Lipschitz-continue (cf. Alt, van Duijn [44]).

Cependant, sauf dans des cas très particuliers, nous ne savons pas si ces solutions satisfont les équations de départ (2.11)-(2.12). En fait nous ne savons pas si l'ensemble de niveau $\{u = 0\}$ est une courbe régulière, et même pire, nous ne savons pas si sa mesure de Lebesgue est nulle (la mesure usuelle de Lebesgue sur \mathbb{R}^2). Dans Bonnet Monneau [19], nous prouvons le résultat suivant

Théorème 2.19 (Conditions pour une interface de mesure nulle)

Si (u, γ) est une solution de l'équation (2.13) sur Ω et si l'intérieur de l'interface $\{u = 0\}^0$ est vide, alors la mesure de Lebesgue de l'interface $|\{u = 0\}|$ est nulle si et seulement si en tout point X_0 de l'interface, il n'existe pas de boule $B_r(X_0)$ telle que $u \geq 0$ sur $B_r(X_0)$ ou $u \leq 0$ sur $B_r(X_0)$.

Nous ne savons pas s'il existe ou non des solutions $u \geq 0$ sur une boule $B_1(0)$ où l'origine serait sur le bord de l'ensemble $\{u > 0\}$, et telle que l'ensemble $\{u = 0\}$ soit de mesure de Lebesgue strictement positive et d'intérieur vide.

Le théorème 2.19, lorsque les conditions sont remplies pour qu'il s'applique, garantit que la mesure de l'interface $\{u = 0\}$ est nulle. Ainsi dans ce cas (et ce cas-là seulement), les valeurs de γ comprises dans l'intervalle $[0, 1]$ sur l'interface $\{u = 0\}$ pourraient être remplacées par n'importe quelles autres valeurs en particulier comprises aussi dans l'intervalle $[0, 1]$. Nous voyons donc que dans ce cas, notre solution faible (u, γ) se rapproche de l'éventuelle solution du problème de départ, en ce sens qu'elle est complètement caractérisée par les valeurs de u seulement.

Au cours de la preuve du théorème 2.19, nous établissons le résultat intermédiaire suivant qui fournit un cas où l'on peut identifier la solution faible à la solution forte du problème physique initial.

Théorème 2.20 (Analyticité de l'interface)

Considérons une solution faible (u, γ) de (2.13) sur Ω , telle que l'interface $\{u = 0\}$ est de mesure nulle, et sépare Ω en deux composantes connexes seulement. Si l'origine $0 \in \Omega$ est telle que $u(0) = 0$ et $\frac{u(X)}{|X|}$ ne tend pas vers zéro lorsque X tend vers zéro, alors l'interface $\{u = 0\}$ est localement une courbe analytique dans un voisinage de l'origine.

Ce résultat est obtenu via une extension des résultats de Caffarelli. Rappelons que Caffarelli a obtenu dans [75, 76, 77], des résultats fondamentaux de régularité de frontières libres sur lesquelles on suppose que la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial u_{|+}}{\partial n} = G \left(\frac{\partial u_{|-}}{\partial n}, n, X \right) \quad \text{sur } \{u = 0\}$$

où la fonction G est strictement positive. Nous avons généralisé ce résultat sans l'hypothèse de positivité stricte sur la fonction G , ce qui correspond à notre situation :

$$G \left(\frac{\partial u_{|-}}{\partial n}, n, X \right) = \frac{\partial u_{|-}}{\partial n} - \lambda < n, e_x >$$

Pour finir donnons un résultat concernant l'interface $\{u = 0\}$ lorsqu'elle est d'intérieur non vide. On parle alors de zone de mélange. Pour énoncer notre résultat, rappelons la

Définition 2.21 (Convexité dans la direction e_x)

Un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 est convexe dans la direction e_x si est seulement si, pour tout réel $t_0 > 0$, dès que deux points X_0 et $Y_0 = X_0 + t_0 e_x$ appartiennent à Ω , il en est de même de tous les points intermédiaires $X_0 + t e_x$ pour $t \in (0, t_0)$.

Théorème 2.22 (Convexité dans la direction e_x de la zone de mélange)

Soit (u, γ) une solution faible de (2.13) sur Ω telle que l'interface est d'intérieur non vide. Si Ω est convexe dans la direction e_x alors l'intérieur de l'interface $\{u = 0\}^0$ est aussi convexe dans la direction e_x .

Ce résultat se prouve par contradiction, en faisant glisser une sous-solution appropriée sous la solution faible dans un voisinage de l'interface $\{u = 0\}$. Nous renvoyons à Berestycki, Nirenberg [227] pour la méthode de glissement de domaines.

2.6 Perspectives

Au cours de mon étude des problèmes à frontières libres et en particulier du problème de l'obstacle, j'ai pris conscience de l'importance des *formules de monotonie*. Ces dernières permettent d'obtenir des résultats de régularité sur la frontière libre et ainsi de prouver qu'une solution faible est une solution forte sous certaines hypothèses.

Elles jouent aussi un rôle important dans d'autres domaines, comme par exemple pour l'étude d'équations paraboliques non linéaires, ou bien pour les équations quasilineaires variationnelles sur l'espace entier, ...

Il me semble intéressant d'approfondir ces formules de monotonie, et d'en rechercher de nouvelles. Il en existe déjà un certain nombre. Ces dernières pourraient être appliquées au problème de Mumford-Shah, au problème de Stephan, à l'équation de la courbure moyenne, au problème de l'obstacle dépendant du temps, et à bien d'autres situations qui restent encore inexplorées.

Par ailleurs, l'étude des problèmes à frontières libres permet d'aborder avec un regard neuf les questions de régularité pour les solutions de systèmes elliptiques d'équations aux dérivées partielles. Il est sans doute possible d'obtenir une version plus quantitative du contre-exemple de De Giorgi connu pour les systèmes elliptiques en dimensions d'espace $n \geq 3$. Par ailleurs les formules de monotonie devraient permettre de revisiter la théorie de la régularité partielle des solutions en donnant des estimations ponctuelles. Enfin il serait aussi intéressant de regarder le cas des systèmes elliptiques complètement non linéaires.

2.7 Bibliographie complémentaire

Dans ces notes bibliographiques, nous regroupons quelques travaux supplémentaires qui nous semblent intéressants quant à leurs liens avec les problèmes à frontières libres traités ci-dessus et les techniques pour les aborder.

Parmi les premiers travaux sur le problème de l'obstacle, citons entre autres les travaux de Lewy [149, 150, 151], Lewy, Stampacchia [428, 153], Lewy, Zhiyuan [154]; sur les aspects inéquations variationnelles Brezis, Stampacchia [67], Kinderlehrer [135, 136, 137], Kinderlehrer, Stampacchia [143]; Caffarelli, Kinderlehrer [80].

Il existe dans la littérature des problèmes mathématiquement très voisins du problème de l'obstacle, comme ceux de forme de jet d'eau, Alt, Caffarelli, Friedman [39],

Craig, Sternberg [95]; des problèmes élasto-plastiques, Friedman, Pozzi [111]; le problème de la digue, Carrillo [87], Alt [36, 37], Chipot [94], Carillo-Menendez, Chipot [375, 90]; sur les problèmes à deux fluides dans les milieux poreux, Alt, Caffarelli, Friedman [40]; Alt, van Duijn [44, 45, 46, 47], Alt, Gilardi [42], Berestycki, Bonnet, van Duijn [56], Yi, Zhang [192].

Pour les questions de régularité des frontières libres, citons entre autres un panorama de Caffarelli [69] sur les techniques utilisées, et les travaux Caffarelli [70], Alt, Caffarelli [38], Athanasopoulos, Caffarelli [202], Caffarelli, Fabes, Mortola, Salsa [78], Dahlberg [96], Jerison, Kenig [124], Phillips [164, 165], Friedman, Phillips [110], Lin [155], Kenig, Toro [132, 133], Redondo [168, 169], Stojanovic [187], Toro [189, 190], Kenig [131], Littman, Stampacchia, Weinberger [148], Bonorino [64], Baderko [52].

Les résultats de régularité des frontières libres reposent pour une grande part sur la théorie classique de la régularité elliptique, voir par exemple Agmon, Douglis, Nirenberg [346, 347], Gilbarg, Trudinger [404], Ladyshenskaya, Ural'tseva [145], Evans [105], Cabré, Caffarelli [68], Spruck [186]; voir aussi les propriétés de principe du maximum Proter, Weinberger [167], McNabb [156].

Une partie de la théorie de la régularité des frontières libres reprend des idées développées dans le cadre de la théorie des surfaces minimales, voir Giusti [117], Reifenberg [171]; et la théorie de la mesure géométrique Federer [107], Falconer [106], Simon [468].

Ces idées ont d'ailleurs été appliquées à un problème voisin : la fonctionnelle de Mumford-Shah en traitement d'images, De Giorgi [100], Morel [158], Bonnet [62], Barenblatt [53], Knowles [144], Blat, Morel [60], Fonseca [112], Fonseca, Fusco [113], Fonseca, Francfort [114], Acerbi, Fonseca, Fusco [34], Morel, Solimini [159], Chambolle [91], David [97], Leger [147].

Les problèmes d'évolutions font aussi l'objet d'études approfondies. Citons entre autres le problème de Stephan : Rodrigues, Yi [173], Rodrigues, Zaltzman [174, 175], Zaltzman [193]; les évolutions de surfaces, Imanen [122], Barles [54], Bonami, Hilhorst, Logak [61]. Les problèmes de stabilité des frontières libres ont en particulier été étudiés par Brauner, Hulshof, Lunardi [65]. Enfin, récemment une théorie de la régularité des frontières libres pour des problèmes paraboliques a été achevée par Athanasopoulos, Caffarelli, Salsa [49, 50, 51].

3 Modèles de flammes de bec Bunsen et propriétés qualitatives d'équations elliptiques non linéaires

3.1 Propriétés qualitatives des formes de flammes en dimension quelconque [6, 7, 9]

Résumé

Dans cette section nous présentons un modèle multidimensionnel de flammes de bec Bunsen posé sur tout l'espace. Des difficultés mathématiques apparaissent car nous travaillons sur un domaine non borné, et il faut donner un sens aux conditions aux limites à l'infini. Nous montrons qu'il existe un cadre naturel de travail dans lequel le problème est relativement bien posé, et les solutions peuvent être analysées via la méthode de glissement de domaines. Nous donnons alors des propriétés qualitatives des formes possibles de flammes.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec F. Hamel.

Nous étudions un modèle très simplifié de flamme de bec Bunsen. La flamme est représentée par sa température normalisée, notée u , où u prend des valeurs entre zéro (gaz frais) et 1 (gaz chaud après réaction). Le terme de réaction chimique est représenté par une fonction $f(u)$, où f est Lipschitz continue sur $[0, 1]$ et satisfait aux conditions suivantes (cf. Fig. 6)

$$f = 0 \quad \text{sur} \quad [0, \theta] \cup \{1\}, \quad f > 0 \quad \text{sur} \quad (\theta, 1), \quad f'(1) < 0 \quad (3.15)$$

où ici $\theta \in (0, 1)$ représente la température d'ignition en deça de laquelle il n'y a pas de réactions chimiques.

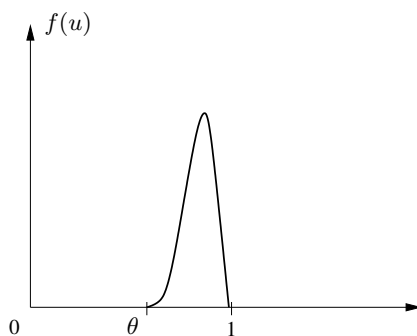


FIG. 6 – Profil de la fonction f

On suppose que la température de la flamme satisfait une équation de la chaleur non linéaire (ce qui peut être justifié en première approximation, dans le cas où le nombre de Lewis est égal à 1, cf. Berestycki, Larrouturnou [221]). Ainsi on a

$$\partial_t u - \Delta u = f(u)$$

On utilise les coordonnées $x = (x', x_n)$ pour repérer un point de l'espace \mathbb{R}^n en notant $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Nous utiliserons la notation x_n pour désigner la coordonnée verticale. Dans la pratique seules les dimensions $n \leq 3$ correspondent aux cas physiques. Nous mènerons cependant notre étude en dimension quelconque $n \geq 1$, en spécifiant lorsque cela sera nécessaire la valeur particulière $n = 2$ pour laquelle notre étude est la plus complète. Physiquement nous observons une flamme stationnaire à la sortie d'un bec Bunsen. Cependant les gaz sont expulsés à une vitesse $c > 0$ vers le haut ($+e_n$), ce qui signifie que dans le repère des gaz, la flamme se propage vers le bas avec la même vitesse c . Nous ne nous intéresserons qu'à des solutions stationnaires, ce qui signifie que la température $u(x', x_n, t)$ évaluée dans le repère des gaz obéit à la relation

$$u(x', x_n, t) = u(x', x_n + ct, 0)$$

Ainsi en notant encore u par abus d'écriture, la température normalisée de la flamme maintenant indépendante du temps, nous avons

$$\Delta u - c \frac{\partial u}{\partial x_n} + f(u) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n$$

Nous allons voir que la forme de la flamme est essentiellement contrôlée par sa zone de gaz frais :

$$\Omega(u) := \{u < \theta\}$$

que nous supposerons représentable par un sous-graphe globalement Lipschitz pour simplifier, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ globalement Lipschitz sur \mathbb{R}^{n-1} de sorte que (cf. Fig. 7)

$$\Omega(u) := \{x_n < \phi(x')\} \tag{3.16}$$

On étudie alors les solutions (c, u) au problème de la flamme de bec Busen composées de la vitesse de la flamme $c \in \mathbb{R}$, et de la température normalisée u sur \mathbb{R}^n solution de

$$\begin{cases} \Delta u - c \frac{\partial u}{\partial x_n} + f(u) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \\ 0 < u < 1 & \text{sur } \mathbb{R}^n \\ \lim_{\text{dist}(x, \Omega(u)) \rightarrow +\infty} u = 1 \\ \lim_{\text{dist}(x, (\mathbb{R}^n \setminus \Omega(u))) \rightarrow +\infty} u = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

où les limites sont uniformes en la distance du point x à la zone de réaction $\partial\Omega(u)$.

Malgré de nombreux travaux, l'étude des solutions d'équations elliptiques semi-linéaires sur les ouverts non bornés reste encore dans son jeune âge. Ce sujet est relativement vierge, et la partie difficile de notre travail a justement été de trouver un cadre adéquat de travail. Nous nous sommes finalement rendu compte que (3.16)-(3.17) est une formulation très maniable, car elle suppose des convergences uniformes vers 1 et 0, et se rapproche par sa géométrie des études effectuées sur des cylindres infinis à section

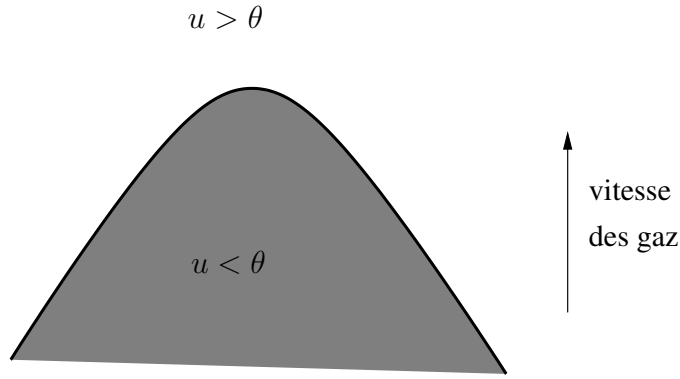


FIG. 7 – Forme de la flamme (zone de gaz frais)

bornée.

Nous nous sommes ainsi essentiellement ramenés à l'application de la méthode de déplacements de domaines (cf. Berestycki, Nirenberg [227]), ici dans les domaines non bornés.

Nous proposons ici une synthèse de nos résultats les plus saillants.

Rappelons tout d'abord le résultat classique suivant (cf. Aronson, Weinberger [207], Berestycki, Nicolaenko, Scheurer [224], Kanel [298], Fife, McLeod [274])

Sous les hypothèses précédentes, il existe une unique solution (c_0, u_0) du problème (3.17) en dimension $n = 1$, telle que $u_0(0) = \theta$.

De façon précise, (c_0, u_0) est solution de

$$\begin{cases} u_0'' - c_0 u_0' + f(u_0) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \\ u_0(-\infty) = 0, \quad u_0(0) = \theta, \quad u_0(+\infty) = 1 \end{cases}$$

De plus il est connu que cette solution vérifie

$$u_0' > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad c_0 > 0$$

Notre premier résultat est le suivant :

Théorème 3.1 (Borne inférieure sur la vitesse de flamme)

Si (c, u) est solution de (3.16)-(3.17) sur \mathbb{R}^n , alors

$$c \geq c_0$$

Nous voyons en particulier qu'il n'y a pas de solutions à vitesses négatives, ce qui est physiquement évident.

Mais ce résultat nous dit plus. Il implique que si la vitesse des gaz $c > 0$ est trop petite, i.e. est inférieure à c_0 , alors il n'y a pas de flamme qui brûle. Ce phénomène est bien connu des physiciens. Il faut que les gaz sortent du brûleur avec une vitesse suffisante,

sans quoi il n'est expérimentalement pas possible d'allumer de flamme.

Nous allons voir que malgré le caractère très simplifié (voir simpliste) de notre modèle, nous retrouvons des résultats physiquement significatifs.

Notre résultat suivant concerne les propriétés de monotonie de la solution :

Théorème 3.2 (Monotonie de la solution)

Si (c, u) est solution de (3.16)-(3.17) sur \mathbb{R}^n , avec $c = \frac{c_0}{\sin \alpha}$ pour $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, alors la fonction u est croissante dans toutes les directions du cône d'axe e_n et de demi-angle au sommet égal à α .

En particulier nous avons le corollaire pour $\alpha = \pi/2$ qui permet d'identifier la solution unidimensionnelle :

Corollaire 3.3 (Caractérisation de la solution unidimensionnelle par sa vitesse)

Si (c, u) est solution de (3.16)-(3.17) sur \mathbb{R}^n , avec $c = c_0$ alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x', x_n) = u_0(x_n + t)$$

Plus généralement, nous avons le

Théorème 3.4 (Condition suffisante pour une solution unidimensionnelle)

Si $\{u < \theta\}$ contient un demi-espace $\{x_n < h\}$, alors $c = c_0$ et il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x', x_n) = u_0(x_n + t)$$

Expérimentalement on constate que les flammes ont la forme de cônes pointant vers le haut. Le théorème 3.4 implique en particulier que la flamme ne peut pointer son extrémité vers le bas (i.e. vers l'intérieur du brûleur), ce qui est cohérent avec l'expérience.

Signalons au passage que nous avons obtenu un résultat similaire au théorème 3.4, mais sous des conditions beaucoup plus faibles, en particulier sans demander des convergences uniformes vers 1 et zéro. Nous renvoyons à Hamel, Monneau [7] pour l'énoncé exact de ce résultat.

Finissons cette section en donnant un résultat d'existence de solutions symétriques en dimension $n = 2$:

Théorème 3.5 (Existence d'une solution symétrique en dimension deux)

Soit $n = 2$. Alors pour tout $\alpha \in (0, \pi/2]$, il existe une solution (c, u) de (3.16)-(3.17) sur \mathbb{R}^2 , telle que $c = \frac{c_0}{\sin \alpha}$ et

$$u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$$

Ce résultat est une conséquence du travail de Bonnet, Hamel [231]. Il est en fait possible de voir que $\{u < \theta\}$ a la forme d'un cône pointant vers le haut et de demi-angle au sommet égal à α .

3.2 Existence, unicité et stabilité des flammes de bec Bunsen en dimension 2 [30]

Résumé

Dans cette section nous reprenons l'étude des flammes de bec bunsen commencée à la section précédente. Dans le cas particulier de la dimension 2 nous établissons un résultat d'existence et d'unicité des solutions, et étudions leur stabilité.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec F. Hamel et J.-M. Roquejoffre.

Nous avons vu à la section précédente qu'il existe en dimension $n = 2$, des solutions symétriques par rapport à la verticale x_2 . Nous prouvons la propriété supplémentaire suivante :

Théorème 3.6 (Bornes asymptotiques pour les solutions symétriques)

Pour $n = 2$, les solutions données par le théorème 3.5 vérifient : Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\{x_2 < -|x_1| \cot \alpha + a\} \subset \{u < \theta\} \subset \{x_2 < -|x_1| \cot \alpha + b\}$$

Ce résultat d'apparence simple est délicat à prouver. En fait certains développements asymptotiques formels à l'infini donnent des indications incorrectes du résultat à prouver. Notre approche est différente. Nous utilisons le fait qu'un analogue du théorème 3.7 est vrai pour un problème à frontière libre associé (cf. théorème 3.9 plus bas). Nous en déduisons alors le théorème 3.7 pour notre problème de départ.

En fait le théorème 3.7 implique facilement que la ligne de niveau $\{u = \theta\}$ a des asymptotes à l'infini. Cette propriété très forte permet alors de prouver facilement le théorème d'unicité suivant

Théorème 3.7 (Unicité des solutions symétriques)

Pour $n = 2$, et $\alpha \in (0, \pi/2]$ donnés, il existe une unique solution (c, u) de (3.16)-(3.17) avec $c = \frac{c_0}{\sin \alpha}$ et

$$u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$$

et $u(0) = \theta$.

Nous avons alors le théorème suivant de classification de toutes les solutions de (3.16)-(3.17) :

Théorème 3.8 (Classification des solutions)

Pour $n = 2$, toute solution (c, u) de (3.16)-(3.17) est caractérisée par un angle $\alpha \in (0, \pi/2]$ tel que $c = \frac{c_0}{\sin \alpha}$. Alors (à translation près), ou bien u est égale à la solution symétrique donnée par le théorème 3.7, ou bien $u(x) = u_0(x \cdot \nu)$ avec $|\nu| = 1$ et $\nu_2 = \cos \alpha$.

L'étude de la stabilité des flammes est actuellement en cours.

3.3 Classification des solutions d'un problème de type Serrin intervenant dans un modèle de flamme à haute énergie d'activation [8]

Résumé

Dans cette section nous étudions un problème à frontière libre (de type Serrin) dont les solutions représentent des flammes courbes à hautes énergies d'activations. Nous prouvons, pour ce problème en dimension 2, l'existence de solutions, et donnons une classification complète des solutions possibles sous les seules conditions que la flamme est simplement connexe et à courbure bornée. Notre approche est basée sur la méthode des déplacements de domaines, alliée à une définition de sur et sous-solutions pour la frontière libre qui est stable par passage à la limite.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec F. Hamel.

Nous considérons maintenant les solutions d'un problème à frontière libre sur \mathbb{R}^2 . Nous notons $x = (x_1, x_2)$ les points de \mathbb{R}^2 . Nous cherchons les solutions (c, u, Ω) où $c \in \mathbb{R}$ est la vitesse, la fonction u , globalement Lipschitz continue sur \mathbb{R}^2 , est la température normalisée de la flamme, et $\Omega = \{u < 1\}$ est un ouvert C^2 à courbure bornée tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u - c \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 1 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \\ 0 < u < 1 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = c_0 > 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega, \\ \lim_{d(x, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega) \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Nous prouvons tout d'abord l'existence d'une solution symétrique :

Théorème 3.9 (Existence d'une solution symétrique)

Pour tout $\alpha \in (0, \pi/2]$, il existe une solution (c, u) de (3.18) telle que $c = \frac{c_0}{\sin \alpha}$, et u vérifie

$$u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$$

De plus cette solution vérifie qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\{x_2 < -|x_1| \cot \alpha + a\} \subset \{u < 1\} \subset \{x_2 < -|x_1| \cot \alpha + b\}$$

Cette propriété asymptotique à l'infini provient d'un calcul semi-explicite sur la solution en intégrant celle-ci suivant la coordonnée x_2 . Ce résultat nous permet d'énoncer le

Théorème 3.10 (Unicité de la solution symétrique)

Pour tout $\alpha \in (0, \pi/2]$, il existe une unique solution (c, u) de (3.18) telle que $c = \frac{c_0}{\sin \alpha}$, $\Omega = \{u < 1\}$ est simplement connexe et à courbure bornée, $u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$ et $u(0) = 1$ avec $u(0, x_2) < 1$ pour $x_2 < 0$.

On a alors le théorème de classification suivant

Théorème 3.11 (Classification des solutions)

Toute solution (c, u) de (3.18) telle que $\Omega = \{u < 1\}$ est simplement connexe et à courbure bornée, est caractérisée par un angle $\alpha \in (0, \pi/2]$ tel que $c = \frac{c_0}{\sin \alpha}$. Alors (à translation près), ou bien u est égale à la solution symétrique donnée par le théorème 3.10, ou bien $u(x) = u_0(x \cdot \nu)$ avec $|\nu| = 1$ et $\nu_2 = \cos \alpha$, où ici $u_0(y) = e^{c_0 y}$ si $y < 1$ et $u_0(y) = 1$ si $y \geq 0$.

Signalons que la classification des solutions où $\Omega = \{u < 1\}$ n'est pas simplement connexe reste une question ouverte.

3.4 Propriété de symétrie et de non-symétrie mono-dimensionnelle pour les solutions d'équations elliptiques semi-linéaires [10]

Résumé

Dans cette section nous étudions les solutions d'équations elliptiques semi-linéaires posées sur tout l'espace, qui convergent uniformément vers leurs limites à l'infini. Pour les opérateurs à coefficients constants, nous obtenons un résultat de symétrie unidimensionnelle. En revanche, nous montrons que ce résultat devient faux lorsqu'on perturbe les coefficients de l'opérateur, même pour des perturbations arbitrairement petites. Enfin signalons que l'on obtient des résultats similaires de symétrie unidimensionnelle pour un problème posé sur le demi-espace.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec H. Berestycki et F. Hamel.

Dans le cas le plus simple nous considérons les solutions bornées d'une équation elliptique semi-linéaire

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \tag{3.19}$$

vérifiant $|u| \leq 1$ et

$$u(x', x_n) \longrightarrow_{x_n \rightarrow \pm\infty} \pm 1 \quad \text{uniformément par rapport à } x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \tag{3.20}$$

Nous supposons f Lipschitz sur $[-1, 1]$, vérifiant $f(\pm 1) = 0$ et telle qu'il existe $\delta > 0$ de sorte que

$$f \text{ est décroissante (au sens large) sur } [-1, -1 + \delta] \text{ et } [1 - \delta, 1] \tag{3.21}$$

Dans le cas de la dimension 1, il est connu que toute solution de (3.19)-(3.20) est unique à translation près, et est strictement croissante (cf. Aronson, Weinberger [207], Berestycki, Nicolaenko, Scheurer [224], Kanel [298], Fife, McLeod [274]).

En dimension $n = 2, 3$ ce résultat a été prouvé par Ghoussoub et Gui [286] en supposant $f \in C^1$, et par une méthode basée sur des propriétés spectrales d'opérateurs de Schrödinger.

Nous avons généralisé ce résultat en dimension n quelconque en employant une méthode de déplacements de domaines (cf. Berestycki, Nirenberg [227]).

Théorème 3.12 (Symétrie unidimensionnelle)

Toute solution u de (3.19)-(3.20) ne dépend que de la coordonnée x_n et est strictement croissante en x_n . De plus, elle est unique à translation près.

Simultanément, ce résultat a été prouvé par des méthodes probabilistes par Barlow, Bass, Gui [211], et par Farina [271, 272] en utilisant une méthode d'hyperplans mobiles. Signalons que ce résultat est relié à une question plus difficile : une conjecture de De Giorgi [262] (cf. section 3.5 pour plus de détails). Signalons aussi une extension de ces résultats par Farina [268, 269] au cas de nonlinéarités discontinues.

Notre méthode de preuve permet de traiter sans difficulté supplémentaire le cas d'un opérateur à coefficient constant plus général que l'opérateur de Laplace, et avec une nonlinéarité monotone en x_n :

$$Lu + g(x_n, u) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \quad (3.22)$$

où

$$Lu = a_{ij}(x)\partial_{ij}u + b_j(x)\partial_ju$$

est tel que

$$\exists c_0, C_0 > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad c_0|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq C_0|\xi|^2$$

et b_j est borné dans L^∞ .

La nonlinéarité $g(x_n, u)$ est supposée continue sur $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ et globalement Lipschitz par rapport à u . De plus elle vérifie $g(\cdot, \pm 1) = 0$ et

$$\begin{cases} g \text{ est croissante par rapport à } x_n \\ \exists \delta > 0 \text{ tel que à } x_n \text{ fixé} \\ g(x_n, u) \text{ est décroissante par rapport à } u \text{ sur } [-1, -1 + \delta] \text{ et } [1 - \delta, 1] \end{cases}$$

Lorsque les coefficients a_{ij}, b_j de l'opérateur sont constants, le théorème 3.12 se généralise en

Théorème 3.13 (Coefficients constants et symétrie)

Si les coefficients a_{ij}, b_j sont constants, toute solution u de (3.22)-(3.20) ne dépend que de la coordonnée x_n et est strictement croissante en x_n . De plus, elle est unique si g dépend réellement de x_n , et seulement unique à translation près si g ne dépend pas de x_n .

Ce théorème ne s'apprécie vraiment qu'au regard du résultat suivant

Théorème 3.14 (Coefficients non constants et perte de symétrie)

En dimension $n \geq 2$, il existe des coefficients constants a_{ij}, b_j et une fonction g indépendante de x_n , telle que et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des coefficients variables $a_{ij}^\varepsilon(x), b_j^\varepsilon(x)$ arbitrairement proches des coefficients constants :

$$|a_{ij}^\varepsilon - a_{ij}|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + |b_j^\varepsilon - b_j|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$$

et tels qu'il existe des solutions u^ε de

$$a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{ij}u^\varepsilon + b_j^\varepsilon(x)\partial_j u^\varepsilon + f(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n$$

satisfaisant (3.20) et telles que u^ε ne dépend pas que de la coordonnée x_n .

Nous voyons donc que la condition de coefficients constants est fondamentale pour avoir un résultat de symétrie. La symétrie peut être brisée par perturbations L^∞ des coefficients même arbitrairement petite. La preuve de ce dernier résultat se fait en construisant un exemple explicite pour lequel pour certains jeux de coefficients $a_{ij}^\varepsilon(x), b_j^\varepsilon(x)$, on obtient en fait une famille continue à un paramètre de solutions non-unidimensionnelles. Pour des résultats similaires de perte de symétrie, nous renvoyons à Alessio, Jeanjean, Montecchiari [198, 199] pour des exemples scalaires issus de la théorie des systèmes hamiltoniens, et à Alama, Bronsard, Gui [197] pour un exemple correspondant à un système d'équations autonomes sur \mathbb{R}^2 .

Pour finir signalons que nos résultats de symétrie uni-dimensionnelle s'adaptent au cas d'équations semi-linéaires posées sur le demi-espace, avec comme il se doit, une non-linéarité monotone et un opérateur elliptique à coefficients constants. Pour les détails nous renvoyons à Berestycki, Hamel, Monneau [10]. En particulier notre résultat généralise un résultat antérieur dû à Clément, Sweers [250] sur le demi-espace. Voir aussi le travail de Berestycki, Caffarelli, Nirenberg [216].

3.5 Vers la construction d'un contre-exemple à une conjecture de De Giorgi en grande dimension ? [25, 32]

Résumé

Pour les solutions d'équations elliptiques semilinéaires, nous mettons en évidence le lien qui existe entre les minimiseurs globaux sur \mathbb{R}^{n-1} et l'existence de solutions monotones non triviales sur \mathbb{R}^n . Nous prouvons que l'existence d'un minimiseur global symétrique sur \mathbb{R}^{n-1} implique l'existence d'une solution monotone non plane sur \mathbb{R}^n qui est minimiseur global. De plus nous prouvons que toute solution monotone sur \mathbb{R}^n est minimiseur global si et seulement si ses limites inférieure et supérieure le sont aussi.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec D. Jerison.

Rappelons en premier lieu la conjecture suivante

Conjecture 3.15 (De Giorgi [262] (1978))

Soit une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ de

$$\Delta u = u^3 - u$$

telle que

$$|u| \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} > 0$$

dans tout l'espace \mathbb{R}^n . Est-il vrai que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{u = \lambda\}$ sont des hyperplans, au moins si $n \leq 8$?

On s'intéresse plus généralement aux solutions bornées d'équations elliptiques semi-linéaires de la forme

$$\Delta u = F'(u) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \quad (3.23)$$

et vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} > 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \quad (3.24)$$

Ici F est $C^{1,1}$ et vérifie

$$\begin{cases} F \geq 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R} \\ F > 0 & \text{sur} \quad (-1, 1) \quad \text{et} \quad F(-1) = F(1) = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Cette condition est évidemment vérifiée pour le choix particulier $F(u) = (1 - u^2)^2/4$ qui correspond à la conjecture de De Giorgi.

Définition 3.16 (Minimiseurs globaux sur \mathbb{R}^n)

Une fonction u est dite *minimiseur global* sur \mathbb{R}^n si pour tout domaine borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + F(v)$$

pour toute fonction $v \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ telle que

$$v = u \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

Nous prouvons

Théorème 3.17 (Minimalité des solutions monotones)

Soit une fonction $F \in C^{1,1}(\mathbb{R})$ et u une solution bornée de (3.23) satisfaisant (3.24). Nous notons $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et introduisons

$$\begin{cases} \bar{u}(x') = \lim_{x_n \rightarrow +\infty} u(x', x_n) \\ \underline{u}(x') = \lim_{x_n \rightarrow -\infty} u(x', x_n) \end{cases} \quad (3.26)$$

Alors u est un *minimiseur global* sur \mathbb{R}^n si et seulement si \bar{u} et \underline{u} sont des *minimiseurs globaux* sur \mathbb{R}^{n-1} .

Ce théorème étend légèrement le résultat suivant

Théorème 3.18 (Alberti, Ambrosio, Cabré [203])

Soit u une fonction entière, bornée, solution de (3.23) et satisfaisant (3.24), et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier. Alors

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + F(v)$$

pour toute fonction $v \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ telle que $v = u$ sur $\partial\Omega$ et

$$\underline{u}(x') \leq v(x', x_n) \leq \overline{u}(x') \quad \text{pour tout } x = (x', x_n) \in \Omega$$

Le Théorème 3.18 a été prouvé dans Alberti, Ambrosio, Cabré [203] en utilisant des résultats de calibrations pour des fonctionnelles scalaires du Calculus des Variations (cf. Dacorogna [253], Dal Maso, Modica [254], Morgan [324, 325]).

Ici notre preuve des théorèmes 3.17 et 3.18 est basée sur la méthode des déplacements de domaines (sliding method, cf. Berestycki, Nirenberg [227]).

Nous prouvons aussi

Théorème 3.19 (Unicité des solutions monotones)

Si u est une solution de (3.23)-(3.24) et u est minimum global sur \mathbb{R}^n alors pour tout ouvert Ω borné et régulier, si v est solution de

$$\begin{cases} \Delta v = F'(v) & \text{sur } \Omega \\ v = u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et vérifie

$$\underline{u}(x') \leq v(x', x_n) \leq \overline{u}(x') \quad \text{pour tout } x = (x', x_n) \in \Omega$$

avec les notations $\underline{u}, \overline{u}$ du théorème 3.17, alors $v = u$ sur Ω .

Nous allons maintenant voir que les solutions que nous considérons présentent des analogies très fortes avec les surfaces minimales.

Analogies Surfaces minimales/EDP elliptiques semi-linéaires

Remarquons tout d'abord que les solutions de (3.23) sont points critiques de l'énergie

$$E(v, \Omega) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + F(v)$$

pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Par ailleurs, de façon à déterminer la forme de l'ensemble de niveau $\{u = 0\}$ à l'infini, il est naturel d'effectuer un blow-down sur cette solution en introduisant pour une suite de rayon $R > 1$ croissants la suite

$$u_R(x) = u(Rx)$$

Ainsi u_R est point critique de la nouvelle énergie

$$E_R(v, \Omega) := \int_{\Omega} \frac{1}{2R} |\nabla v|^2 + RF(v)$$

pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Modica et Mortola [320] ont prouvé que dans la limite $R \rightarrow +\infty$, l'énergie $E_R(\cdot, \Omega)$ Γ -converge vers la fonctionnelle suivante

$$E_{\infty}(u, \Omega) = \begin{cases} c_F \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial E) & \text{si } \exists E \text{ tel que } \begin{cases} u(x) = 1 & p.p. x \in E, \\ u(x) = -1 & p.p. x \in \Omega \setminus E \end{cases} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où c_F est la constante

$$c_F = \int_{-1}^1 \sqrt{2F(s)} ds$$

Si l'interface séparant les régions $\{u_{\infty} = 1\}$ et $\{u_{\infty} = -1\}$ est régulière, alors $c_F^{-1} E_{\infty}(u, \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial E)$ s'identifie justement à l'aire de cette interface comprise dans l'ouvert Ω .

Si maintenant u est une solution de (3.23) qui vérifie (3.24) et que de plus ses limites en $x_n = \pm\infty$ sont $\bar{u} = 1$ et $\underline{u} = -1$, alors nous savons que u est minimiseur global de l'énergie (théorèmes 3.17, 3.18). Ainsi d'après Ambrosio, Cabré [202] (voir aussi Alberti, Ambrosio, Cabré [203]), on peut extraire une sous-suite $(u_{R'})_{R'}$ qui vérifie

$$\begin{cases} u_{R'} \rightarrow u_{\infty} & \text{dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \\ E_{R'}(u_{R'}, \Omega) \rightarrow E_{\infty}(u_{\infty}, \Omega) < +\infty \end{cases}$$

où u_{∞} est un minimiseur de $E_{\infty}(\cdot, \Omega)$ pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. En particulier cela implique que le bord $\partial\{u_{\infty} > 0\}$ est une surface minimale. Ceci s'interprète, en disant qu'à l'infini, la ligne de niveau $\{u = 0\}$ se comporte "essentiellement" comme une surface minimale.

Voir aussi Hutchinson, Tonegawa [295], Luckhaus, Modica [308], Owen, Rubinstein, Sternberg [326], pour des techniques similaires.

N°	Surfaces Minimales (Résultats)	EDP Elliptique Semi-Linéaire (Conjectures)
1	unicité des graphes solutions (avec le graphe $\subset \mathbb{R}^n$)	unicité des solutions x_n -monotones (définies sur les cylindres $\omega \times (a, b) \subset \mathbb{R}^n$)
2	par définition minimise l'énergie	les solutions entières sont des minimiseurs globaux
3	les surfaces minimales dans \mathbb{R}^n sont des hyperplans si $n \leq 7$	les minimiseurs globaux sur \mathbb{R}^n sont plans si $n \leq 7$
4	il existe un ensemble minimal non-graphe dans \mathbb{R}^n pour $n \geq 8$ (cône de Simons)	il existe un minimiseur global non plan sur \mathbb{R}^n pour $n \geq 8$
5	les graphes minimaux dans \mathbb{R}^n sont des hyperplans si $n \leq 8$	les solutions monotones sur \mathbb{R}^n sont planes si $n \leq 8$ (conjecture de De Giorgi)
6	les graphes minimaux non plans existent dans \mathbb{R}^n pour $n \geq 9$	les solutions monotones non planes existent sur \mathbb{R}^n pour $n \geq 9$
7	les graphes Lipschitz dans \mathbb{R}^n sont des hyperplans en toutes dimensions	les solutions monotones sur \mathbb{R}^n avec un ensemble de niveau $u = 0$ Lipschitz sont planes en toutes dimensions
8	les surfaces minimales suffisamment plates dans B_R sont des graphes dans $B_{\frac{R}{2}}$ indépendamment de R	tout ensemble de niveau $u = 0$ suffisamment plat dans B_R , est un graphe dans $B_{\frac{R}{2}}$ indépendamment de R

Dans la table ci-dessus, nous présentons les analogies existantes entre les résultats bien connus sur les surfaces minimales, et les conjectures (dont certaines sont d'ailleurs déjà prouvées) notées (Ck) pour $k = 1, \dots, 8$, que l'on peut naturellement formuler pour les solutions d'équations elliptiques semi-linéaires, dont en particulier la conjecture de De Giorgi 3.15 notée ici $(C5)$.

Pour les références sur les surfaces minimales, nous renvoyons à Bernstein [229], Simon [332, 333], Miranda [313, 440], Fleming [276], Giusti [117], Giaquinta [283].

La conjecture de De Giorgi, notée $(C5)$ dans la table ci-dessus, a été prouvée par Ghoussoub, Gui [286] en dimension $n = 2$ (voir aussi Berestycki, Caffarelli, Nirenberg [213]) et par Ambrosio, Cabré [202] en dimension $n = 3$. Cette conjecture est toujours ouverte en dimensions $n \geq 4$ (voir néanmoins le travail de Ghoussoub, Gui [287] en dimensions $n = 4, 5$). D'autres travaux plus anciens concernent la dimension 2 (Modica, Mortola [321], avec une condition de lignes de niveau uniformément Lipschitz), ou bien donnent des informations de type théorème de Liouville en dimension quelconque (Modica [316], Caffarelli, Garofalo, Segala [246]). Voir aussi Modica [315, 317, 318, 319].

Les conjectures (C1), (C7) sont vraies : (C1) est prouvée dans le théorème 3.19 par la méthode des déplacements de domaines, et (C7) a été prouvée par (Barlow, Bass, Gui [211]). Voir aussi le travail de Caffarelli, Cordoba [245, 244] sur les minimiseurs dont l'ensemble de niveau $\{u = 0\}$ est un graphe.

La Conjecture (C2) a été prouvée sous certaines hypothèses par Alberti, Ambrosio, Cabré [203] (voir théorème 3.18). La conjecture (C2) est encore vraie sous les hypothèses du théorème 3.17 que nous avons prouvé. Au contraire la conjecture (C2) n'est pas vraie sans conditions supplémentaires. Les conjectures (C4) et (C6) sont toujours ouvertes. Néanmoins nous prouvons le théorème 3.20 qui sous certaines hypothèses signifie

$$(C4) \implies (C6)$$

Pour les surfaces minimales, les conjectures (C4) et (C6) correspondent aux résultats bien connus et prouvés par Bombieri, De Giorgi, Giusti [230]. Pour finir, la conjecture (C8) (c'est-à-dire "plat" implique "graphe Lipschitz") reste une question ouverte à notre connaissance, alors que dans Caffarelli, Cordoba [245], il est prouvé que la propriété "graphe Lipschitz" implique un contrôle $C^{1,\alpha}$.

Résultat principal

Notre résultat principal est le théorème suivant qui montre que l'existence d'un minimiseur symétrique sur \mathbb{R}^{n-1} implique l'existence d'un contre-exemple à la conjecture de De Giorgi dans \mathbb{R}^n .

Théorème 3.20 (Stratégie pour contruire un contre-exemple)

Considérons une fonction $F \in C^{1,1}(\mathbb{R})$ satisfaisant (3.25). Supposons l'existence d'un minimiseur global v sur \mathbb{R}^{n-1} (au sens de la définition 3.16) satisfaisant $|v| < 1$ et les symétries suivantes :

$$v(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n-1}) = v(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1$$

Alors pour chaque $\gamma \in (0, \sqrt{2F(v(0))})$ il existe une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ solution de (3.23) satisfaisant $|u| \leq 1$ et vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n$$

telle que pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{u = \lambda\}$ n'est pas un hyperplan.

De plus cette solution u est un minimiseur global sur \mathbb{R}^n , vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(0) = \gamma \quad \text{et} \quad u(0) = v(0)$$

et satisfait les symétries :

$$u(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n-1}, x_n) = u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1 \quad (3.27)$$

Nous avons des raisons de penser qu'un tel minimiseur symétrique v sur \mathbb{R}^8 existe et n'est fonction que de $|X|, |Y|$, avec $X = (x_1, \dots, x_4)$ et $Y = (x_5, \dots, x_8)$. Si notre conviction se révèle exacte, alors notre théorème permettrait de conclure à l'existence d'un contre-exemple à la conjecture de De Giorgi dans \mathbb{R}^9 .

3.6 Un théorème de type Liouville pour les équations elliptiques isotropes homogènes complètement non linéaires [27]

Résumé

Dans cette section nous énonçons un théorème de type Liouville pour des équations elliptiques complètement non linéaires. Pour des équations isotropes homogènes sur \mathbb{R}^2 tout entier, nous montrons sous certaines conditions, que les solutions dont le gradient ne s'annule pas sont des solutions unidimensionnelles, i.e. ne dépendent que d'une seule coordonnée d'espace. Nous donnons un résultat similaire pour le problème de type Serrin correspondant.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec J. Dolbeault.

Nous considérons les solutions d'une équation elliptique complètement non linéaire homogène et isotrope dont la forme la plus générale en dimension 2 d'espace est

$$\mathcal{F}(D_{nn}u, D_{\tau\tau}u, D_{n\tau}u, |\nabla u|^2, u) = 0$$

où $n = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ est le vecteur normal unitaire à la ligne de niveau et τ est le vecteur unitaire tangent à la ligne de niveau de sorte que (τ, n) forme une base orthonormée directe. Nous allons nous restreindre à un cas où le gradient ne s'annule pas, de sorte que l'équation soit toujours bien définie.

Nous introduisons les hypothèses suivantes

(E) Conditions d'ellipticité

Définissons $\alpha = (\mathcal{F})'_{D_{nn}u}$, $\beta = (\mathcal{F})'_{D_{\tau\tau}u}$, $\gamma = (\mathcal{F})'_{D_{n\tau}u}$. Nous supposons que

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad 4\alpha\beta - \gamma^2 > 0$$

(U) Solution unidimensionnelle

Nous supposons l'existence d'une solution unidimensionnelle $m_0(t) > 0$ de

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0^2}{2}\right), 0, 0, m_0^2, t\right) = 0 \quad \text{pour } t \in (a, b)$$

Nous avons alors le résultat suivant de type Liouville

Théorème 3.21 (Théorème de type Liouville)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe et simplement connexe. Nous supposons que la fonction \mathcal{F} est analytique, et que la fonction analytique u est solution de

$$\mathcal{F}(D_{nn}u, D_{\tau\tau}u, D_{n\tau}u, |\nabla u|^2, u) = 0 \quad \text{sur } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.28)$$

vérifiant $a < u < b$ sur Ω . Nous supposons qu'il existe une borne sur $|u|_{C^2(\overline{\Omega})}$ et deux fonctions continues $m(\cdot)$ et $M(\cdot)$ telles que

$$0 < m(u(x)) \leq |\nabla u(x)| \leq M(u(x)) \quad \text{sur } \{a < u(x) < b\} \cap \Omega$$

Nous supposons que \mathcal{F} satisfait la condition d'ellipticité (E), et qu'il existe une solution unidimensionnelle m_0 vérifiant (U) de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow t_\infty} M(t) - m_0(t) = \lim_{t \rightarrow t_\infty} m(t) - m_0(t) = 0 \quad \text{pour } t_\infty = a, b \quad (3.29)$$

Alors les lignes de niveau $\{u = t\}$ sont des lignes droites pour chaque $t \in (a, b)$, et Ω est donc une bande de plan, un demi-plan ou bien le plan entier.

Ce théorème se montre à l'aide de considérations sur les extréma du gradient sur les lignes de niveau de la solution. En considérant à la fois le gradient et la courbure en ces points extréma, on obtient trois couples de gradient/courbure : celui associé au minimum du gradient, celui associé au maximum du gradient, et celui de la solution unidimensionnelle. Ces couples satisfont un système d'inéquations différentielles ordinaires paramétré par le niveau $t = u$ de la ligne de niveau (cf. un travail précédent de Dolbeault, Monneau [12]). La comparaison entre ces couples permet de conclure que la solution est égale à la solution unidimensionnelle.

On peut rapprocher notre théorème d'un résultat différent et complémentaire trouvé récemment par Farina [270] en dimension 2 pour certaines équations quasilineaires de forme particulière. Sous une condition de gradient non nul, il établit que les solutions dont l'orientation du gradient ne varie pas trop à l'infini sont unidimensionnelles. Son résultat repose sur un théorème de Liouville prouvé par Gilbarg et Serrin [284]. Comme corollaire, il prouve en particulier que la conjecture de De Giorgi est vraie en dimension $n = 2$ pour des équations quasi-linéaires.

Indépendamment, Danielli et Garofalo [260] ont prouvé que la conjecture de De Giorgi est vraie pour des équations quasi-linéaires en dimensions $n = 2$ et $n = 3$, généralisant ainsi le résultat et la méthode d'Ambrosio, Cabré [202].

Sans chercher la plus grande généralité, nous donnons à titre d'illustration deux applications dans un cas très particulier semi-linéaire, bien que l'on ait des résultats similaires dans le cas complètement non linéaire pour lequel nous renvoyons à Dolbeault, Monneau [27] pour l'énoncé plus technique. Ainsi on a

Théorème 3.22 (Application à l'équation de Ginzburg-Landau)

Pour toute solution u bornée de

$$\Delta u + u - u^3 = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2 \quad (3.30)$$

si $\nabla u \neq 0$ sur \mathbb{R}^2 , et si les lignes de niveau $\{u = t\}$ ont une courbure bornée pour tout t , alors les lignes de niveau sont des droites pour chaque t .

De même on a le résultat de type Serrin [330].

Théorème 3.23 (Application à un problème de type Serrin)

Soit $|u| \leq 1$ une solution de

$$\Delta u + u - u^3 = 0 \quad \text{sur } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.31)$$

où Ω est un ouvert connexe simplement connexe, C^2 à courbure bornée. On suppose les conditions au bord pour un $\lambda \in (-1, 1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \lambda \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u'_0(u_0^{-1}(\lambda)) \end{array} \right| \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où $u_0(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ est la solution unidimensionnelle. Si $\nabla u \neq 0$ sur Ω , et si les lignes de niveau $\{u = t\}$ ont une courbure bornée pour tout t , alors ces lignes de niveau sont des droites pour chaque t , et Ω est un demi-plan.

Ce dernier résultat constitue en particulier un premier élément de réponse à une conjecture formulée par Berestycki [212] sur les symétries des domaines non bornés sur lesquels on suppose l'existence d'une solution à un problème de type Serrin.

3.7 Solutions localement à symétrie radiale pour certains opérateurs non uniformément elliptiques [31]

Résumé

Dans cette section nous étudions les propriétés de symétrie des solutions de certaines équations non-uniformément elliptiques. Il s'agit d'équations de type p -Laplacien pour $p > 2$ avec second membre non-Lipschitz. Ce type d'équation admet des solutions à symétries radiales qui peuvent être constantes sur une boule centrée en l'origine (solution plateau). Nous prouvons un principe de comparaison pour les solutions de ces équations lorsqu'il s'agit d'équations d'Euler-Lagrange de problèmes convexes. Plus généralement, nous appliquons une méthode locale d'hyperplans mobiles, qui permet de prouver que toute solution dans une boule est somme de solutions plateau à symétrie radiale, la somme n'ayant pas nécessairement la symétrie radiale.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec J. Dolbeault et P. Felmer.

L'une des approches les plus fructueuses pour attaquer les questions de symétrie (mais aussi les propriétés de monotonie) des solutions d'équations elliptiques non-linéaires est la méthode d'hyperplans mobiles (*moving plane*) introduite par Alexandroff [200, 201]. Cette idée a été reprise par Serrin [330] pour l'étude d'un problème à frontière libre, et appliquée par Gidas, Ni, Nirenberg [280, 281] pour montrer un résultat remarquable de symétrie radiale des solutions d'une équation elliptique semi-linéaire du type $\Delta u + f(u) = 0$ posée sur tout l'espace. Cette approche a été à l'origine d'un nombre considérable de travaux. Citons en particulier une simplification de la méthode, apportée par Berestycki et Nirenberg [227] où sont étudiées entre autres des équations du type

$$Lu + f(u) = 0$$

où L est un opérateur uniformément elliptique et f est une fonction Lipschitz.

Nous étudions ici une extension des questions précédentes au cas où à la fois
 1) l'opérateur L n'est pas uniformément elliptique
 2) la fonction f n'est pas Lipschitz.

Le cas 1) des opérateurs non-uniformément elliptiques dont l'exemple type est le p -Laplacien a été étudié en détail. Citons en particulier Vazquez [341] pour un principe du maximum fort sur des solutions positives, et son extension à des opérateurs plus généraux par Montenegro [322]. Citons aussi des travaux sur des questions reliées, Serrin, Zou [331], Damascelli [255, 256], Damascelli, Pacella [257], Damascelli, Pacella, Ramaswamy [258], Damascelli, Ramaswamy [259], Franchi, Lanconelli, Serrin [277]. D'une façon générale, la théorie de la régularité des solutions de ces équations non-uniformément elliptiques n'est pas achevée, et seuls certains résultats partiels sont connus. Citons en particulier Tolksdorf [338], Di Benedetto [263].

Le cas 2) où la fonction f n'est pas Lipschitz n'a été étudié que très récemment. Sur la question de la symétrie des solutions, citons les travaux de Brock [237, 238] fondés sur une symétrisation de Steiner continue, celui de Cortázar [251], et très récemment Farina [268, 269], Dolbeault, Felmer [264, 265].

Ici notre travail est inspiré de Dolbeault, Felmer [266] où ces auteurs ont introduit la méthode locale d'hyperplans mobiles. Avant de présenter notre résultat principal, remarquons que pour des fonctions f continues, il existe des solutions positives de

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \quad \text{dans une boule } B \tag{3.32}$$

qui présentent un plateau où $u = c$ est constante, et $f(c) = 0$ (cf. la Fig. 8). En particulier en dimension 1, la longueur du plateau est arbitraire. On retrouve la non-unicité des solutions lorsque les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz ne sont pas remplies (ici f n'est pas Lipschitz). En particulier, il est aussi possible de construire de nouvelles solutions en "empilant" ces solutions plateau les unes sur les autres (cf. Fig. 9).



FIG. 8 – Une solution plateau (en dimension 1)

Notre résultat principal affirme (sous des conditions que nous allons préciser ci-dessous) que toute solution de (3.32) s'écrit comme empilement de solutions plateau.

Précisément on introduit l'hypothèse :

(H) La fonction f est continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} et n'a qu'un nombre fini de zéros. Si

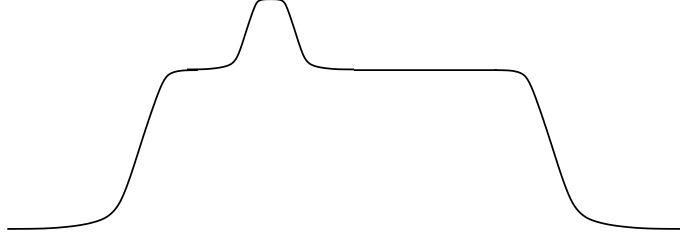


FIG. 9 – Empilement non symétrique de deux solutions plateau l’une sur l’autre (en dimension 1)

$f(u_0) = 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

- (a) ou bien f est décroissante (au sens large) sur $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$, et on dit que $u_0 \in Z_a$
- (b) ou bien $f > 0$ sur $(u_0, u_0 + \varepsilon)$, et on dit que $u_0 \in Z_b$. De plus on suppose que $0 \in Z_b$.

Définition 3.24 (Localement à symétrie radiale)

On dit que u est localement à symétrie radiale, s’il existe une suite dénombrable de fonctions $(u_i)_{i \in I}$ solutions de

$$\Delta_p u_i + f(u_i + C_i) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n$$

telle que

$$u = \sum_{i \in I} u_i$$

et que

$$\begin{cases} u_i = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus B_{R_i} \\ u_i = c_i > 0 & \text{sur } B_{r_i} \\ u_i \text{ est radiale, strictement décroissante sur } & B_{R_i} \setminus B_{r_i} \end{cases}$$

pour des constantes C_i, c_i, R_i, r_i . On impose en particulier qu’étant donnés deux indices i et j , on a ou bien $B_{R_j} \subset B_{r_i}$, ou bien $B_{R_i} \subset B_{r_j}$.

On a alors le

Théorème 3.25 (Localement à symétrie radiale)

Soit $p > 2$, $B = B(0, 1)$ la boule unité de \mathbb{R}^n , f une fonction continue vérifiant l’hypothèse (H), et $u \in C^1(\overline{B})$ une solution de

$$\begin{cases} \Delta_p u + f(u) = 0 & \text{sur } B \\ u \geq 0 & \text{sur } B \\ u = 0 & \text{sur } \partial B \end{cases}$$

avec $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$. Soit $M = |u|_{L^\infty(B)}$. On suppose que

$$u \in C^2(\{x \in B, \nabla u(x) \neq 0\}) \cap C^{1,\gamma}(\{x \in B, u < M\})$$

où $\gamma > \frac{1}{p-1}$. Si l'ensemble

$$I := \{x \in B, \quad \exists u_0 \in Z_b \setminus \{0\}, \quad u(x) = u_0, \quad \nabla u(x) = 0\}$$

est vide, alors u est localement à symétrie radiale.

Ici la condition $I = \emptyset$ semble technique, mais nous ne savons pas comment l'éviter. Elle est par exemple automatiquement satisfaite si on suppose $f > 0$ sur $(0, +\infty)$, ce qui, à notre connaissance, fournit déjà un résultat nouveau dans ce cas particulier.

Notons enfin que le problème de traiter des solutions $u \in C^{1, \frac{1}{p-1}}$, ce qui peut arriver si $\nabla u(x_0) = 0$ et $f(u(x_0)) \neq 0$, reste complètement ouvert.

3.8 Perspectives

Il nous semble intéressant d'approfondir la question de classification de forme de flammes posées sur tout l'espace. En dimension d'espace $n = 2$, nous avons obtenu une classification essentiellement complète des solutions sous certaines hypothèses naturelles, que ce soit pour le problème de réaction-diffusion ou bien pour le problème à frontière libre. Signalons seulement que la question reste ouverte pour le problème à frontière libre lorsque la zone de gaz frais n'est pas simplement connexe.

En dimension $n \geq 3$ beaucoup de questions restent ouvertes, cependant nous disposons maintenant d'un cadre d'étude adéquat pour les étudier. Les questions d'existence, de symétrie, d'unicité sous certaines conditions, de classification des solutions sont autant de problèmes ouverts raisonnables, et qui devraient nous permettre d'améliorer notre compréhension des problèmes posés sur les ouverts non bornés.

Une autre direction de recherche me semble particulièrement intéressante. Il s'agit de mettre au point un contre-exemple à une conjecture de De Giorgi en grande dimension. Nous avons déjà fait la moitié du chemin dans cette direction en établissant le lien entre l'existence d'un contre-exemple en dimension n et l'existence d'un minimiseur symétrique en dimension $n - 1$. Il nous semble maintenant important d'essayer d'établir l'existence d'un minimiseur symétrique en dimension $n - 1 = 8$, ce qui nous donnerait automatiquement un contre-exemple en dimension $n = 9$.

3.9 Bibliographie complémentaire

Dans ces notes bibliographiques, nous regroupons quelques travaux supplémentaires qui nous semblent intéressants quant à leur lien avec les problèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires traités ci-dessus et les techniques pour les aborder.

Une large littérature physique existe en combustion sur les descriptions de fronts de flammes. Nous renvoyons entre autre à Sivashinsky [334, 335, 336, 337], Williams [343],

Zeldovich, Barenblatt, Libovich, Mackviladze [344], Zeldovich, Frank-Kamenetskii [345], Frankel, Sivashinsky [278], Lewis, Von Elbe [304], Liñan [307], Matkowsky, Sivashinsky [309], Joulin [297], Michelson [311, 312], Buckmaster [239, 240], Buckmaster, Ludford [241, 242], Kanel [299]. Des problèmes mathématiquement voisins ont été étudiés en biologie : Kolmogorov, Petrovsky, Piskunov [300], Aronson, Weinberger [208], Fisher [275].

D'un point de vue mathématique on peut citer les travaux menés en combustion par Bonnet, Hamel [231], Berestycki, Larrouturou [220, 221], Berestycki, Larrouturou, Lions [222], Heinze, Papanicolaou, Stevens [293], Gланgetas [288], Hamel [291], Hamel, Nadirashvili [292], Vega [342], Haderer, Rothe [290].

Concernant les propriétés de symétrie unidimensionnelle, citons entre autres les travaux de Berestycki, Caffarelli, Nirenberg [216, 214, 215, 218, 219], Berestycki, Nirenberg [225, 226] Li [305], Alessio, Jeanjean, Montecchiari [199], Angenent [206], Esteban, Lions [267]. Voir aussi Barlow [210], pour un théorème de type Liouville.

De façon similaire, des questions de symétries radiales ont été étudiées en particulier par Li, Ni [306], Amick, Fraenke [204], Farina, Akopian [273] Aftalion, Busca [195], Gidas, Spruck [282]. Voir aussi Busca, Sirakov [243], pour le cas des systèmes elliptiques. En complément aux questions de symétrie, citons aussi les travaux de Bandle, Essen [209], Chen, Li [249].

Certains problèmes de régularité elliptique près des coins d'un domaine ont été en particulier regardé par Dauge [261] Grisvard [289], Maz'ja, Plamenevskii [310], Kondrat'ev [301], Morrey [446].

Au sujet des solutions du problème de type Serrin, qui est un problème à frontière libre particulier, citons quelques travaux en combustion et quelques autres : Reichel [327], Andreucci, Gianni [205], Berestycki, Caffarelli, Nirenberg [217], Caffarelli, Lederman, Wolanski [247], Craig, Sternberg [252], Galaktionov, Hulshof, Vazquez [279], Hilhorst, Hulshof [296], Kozlovsky, Sivashinsky [302], Lederman, Wolanski [303], Ton [339, 340]. Caffarelli, Vazquez [248], Henrot, Philippin [294].

Enfin les questions de stabilité des fronts d'ondes progressives ont en particulier été étudiées par Roquejoffre [328, 329], Berestycki, Larrouturou, Roquejoffre [223], Brauner, Lunardi [232], Brauner, Lunardi, Schmidt-Lainé [233, 234, 235], Brauner, Noor Ebad, Schmidt-Lainé [236].

4 Quelques questions d'élasticité linéaire et non linéaire revisitées

4.1 Estimations elliptiques uniformes pour un modèle de plaque infinie en élasticité linéaire [22]

Résumé

Nous présentons une nouvelle étude des équations de l'élasticité linéaire pour une plaque infinie $\mathbb{R}^2 \times (-1, 1)$. Nous obtenons des estimations elliptiques ($W^{k,p}$ et $C^{k+\alpha}$) uniformes sur les déplacements de la plaque en fonction des forces extérieures. Nous identifions en particulier le noyau de l'opérateur d'élasticité dont nous montrons qu'il est construit à partir du noyau de l'opérateur décrivant le modèle des plaques de Kirchhoff-Love.

Soit $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \times (-1, 1)$ une plaque infinie. Nous notons $x = (x', x_3)$ un point de cette plaque avec $x' = (x_1, x_2)$. Nous considérons le cas de l'élasticité linéaire isotrope homogène pour un matériau de Saint Venant-Kirchhoff, en introduisant pour un déplacement tridimensionnel $u = (u_1, u_2, u_3)$ les opérateurs :

$$Lu = \begin{cases} (\lambda + 2\mu)\partial_{11}u_1 + \mu(\partial_{22}u_1 + \partial_{33}u_1) + (\lambda + \mu)(\partial_{12}u_2 + \partial_{13}u_3) \\ (\lambda + 2\mu)\partial_{22}u_2 + \mu(\partial_{11}u_2 + \partial_{33}u_2) + (\lambda + \mu)(\partial_{21}u_1 + \partial_{23}u_3) \\ (\lambda + 2\mu)\partial_{33}u_3 + \mu(\partial_{11}u_3 + \partial_{22}u_3) + (\lambda + \mu)(\partial_{31}u_1 + \partial_{32}u_2) \end{cases} \Bigg|_{\text{sur } \Omega_\infty}$$

$$Bu = \begin{cases} \mu(\partial_3u_1 + \partial_1u_3) \\ \mu(\partial_3u_2 + \partial_2u_3) \\ \lambda(\partial_1u_1 + \partial_2u_2) + (\lambda + 2\mu)\partial_3u_3 \end{cases} \Bigg|_{\text{sur } \partial\Omega_\infty}$$

où $\lambda, \mu > 0$ sont les constantes de Lamé.

Introduisons par ailleurs l'opérateur associé au modèle de Kirchhoff-Love de la théorie des plaques $M = (M^S, M^A)$ agissant sur les fonctions $\zeta(x') = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, et défini par

$$M\zeta = \begin{cases} (M^S\zeta)_1 = \Delta'\zeta_1 + \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\right) \partial_1 \text{div}'\zeta \\ (M^S\zeta)_2 = \Delta'\zeta_2 + \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\right) \partial_2 \text{div}'\zeta \\ M^A\zeta = \Delta'^2\zeta_3 \end{cases} \Bigg|_{\text{sur } \mathbb{R}^2}$$

où l'opérateur de Laplace bidimensionnel est

$$\Delta' = \partial_{11} + \partial_{22}$$

et la divergence bidimensionnelle portant uniquement sur les deux premières composantes de ζ , est

$$\operatorname{div}'\zeta = \partial_1\zeta_1 + \partial_2\zeta_2$$

Effectuons une remarque préliminaire sur la symétrie du problème. Pour cela on définit pour une fonction scalaire v sur $\overline{\Omega}_\infty$, les parties symétriques et antisymétriques relativement à la coordonnée x_3 :

$$v^s(x) = \frac{1}{2}(v(x_1, x_2, x_3) + v(x_1, x_2, -x_3)) \quad \text{et} \quad v^a(x) = \frac{1}{2}(v(x_1, x_2, x_3) - v(x_1, x_2, -x_3))$$

Cela permet de définir à nouveau pour une fonction à valeurs vectorielles $u = (u_1, u_2, u_3)$, les parties *symétriques* et *antisymétriques* de la façon non standard suivante :

$$u^S = (u_1^s, u_2^s, u_3^a) \quad \text{et} \quad u^A = (u_1^a, u_2^a, u_3^s)$$

Ainsi il est immédiat de vérifier que si u est solution du problème de plaque tridimensionnel

$$\begin{cases} Lu = -f & \text{sur } \Omega_\infty \\ Bu = g & \text{sur } \partial\Omega_\infty \end{cases}$$

alors le problème se découple entre les parties symétriques et antisymétriques

$$\begin{cases} L(u^S) = -f^S \\ B(u^S) = g^A \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L(u^A) = -f^A \\ B(u^A) = g^S \end{cases}$$

Cette remarque permet en particulier de scinder le problème en deux problèmes indépendants.

Introduisons maintenant une application qui à une fonction $\zeta(x')$ définie sur \mathbb{R}^2 permet d'associer un déplacement tridimensionnel qui va jouer un rôle fondamental dans notre étude. Etant donné $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ on définit le déplacement symétrique suivant qui ne dépend que de (ζ_1, ζ_2)

$$U^S(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta_1 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{x_3^2}{2!} \partial_1 \operatorname{div}'\zeta \\ \zeta_2 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{x_3^2}{2!} \partial_2 \operatorname{div}'\zeta \\ -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} x_3 \operatorname{div}'\zeta \end{pmatrix}$$

et le déplacement antisymétrique suivant qui ne dépend que de ζ_3

$$U^A(\zeta) = \begin{pmatrix} -x_3 \partial_1 \zeta_3 + a(x_3) \partial_1 \Delta' \zeta_3 \\ -x_3 \partial_2 \zeta_3 + a(x_3) \partial_2 \Delta' \zeta_3 \\ \zeta_3 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{x_3^2}{2!} \Delta' \zeta_3 \end{pmatrix}$$

où $a(x_3)$ est le polynôme en x_3 suivant

$$a(x_3) = \left(\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{x_3^3}{3!} - 2 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) x_3$$

On définit en particulier le déplacement complet comme somme des parties symétriques et antisymétriques

$$U(\zeta) = U^S(\zeta) + U^A(\zeta)$$

Le transformation qui à ζ associe $U(\zeta)$ permet maintenant d'exhiber un premier lien entre le modèle de plaques tridimensionnel et le modèle de Kirchhoff-Love de la théorie des plaques.

Théorème 4.1 (Lien 3d-2d)

Soit $\zeta(x') = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ une fonction définie sur \mathbb{R}^2 . On a alors

$$(M\zeta = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^2) \implies \begin{cases} LU(\zeta) = 0 & \text{sur} \quad \Omega_\infty \\ BU(\zeta) = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_\infty \end{cases}$$

Nous avons déterminé la transformation $\zeta \mapsto U(\zeta)$ via la théorie de la représentation des groupes (cf. Guichardet [407]).

Au cours de notre étude du noyau de l'opérateur d'élasticité nous avons prouvé une réciproque du théorème sur l'espace des fonctions à croissance au plus polynomiale :

Théorème 4.2 (Caractérisation du noyau)

Soit u une solution C^2 de

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{sur} \quad \Omega_\infty \\ Bu = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_\infty \end{cases}$$

telle qu'il existe deux constantes $C, p > 0$ de sorte que

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|)^p \quad \text{sur} \quad \Omega_\infty$$

Alors il existe un polynôme $\zeta(x_1, x_2)$ de degré inférieur ou égal à p tel que $M\zeta = 0$ et $u = U(\zeta)$.

Nous souhaitons maintenant contrôler les déplacements u en fonction des forces de volume $-f = Lu$ et des forces de surface $g = Bu$. A cause du noyau non trivial de l'opérateur de l'élasticité linéaire, on ne peut pas borner l'intégralité des déplacements mais seulement une "partie". Il existe en effet une "partie non bornée" qui est le noyau suivant :

$$\mathcal{P}_{2,4} = \{v \in C^2(\overline{\Omega_\infty}), \quad Lv = Bv = 0, \quad \exists C > 0, \quad |v^S(x)| \leq C(1 + |x|)^2, \quad |v^A(x)| \leq C(1 + |x|)^4\}$$

Il s'agit d'un ensemble de polynômes en (x_1, x_2, x_3) , dont les polynômes symétriques sont de degré au plus égal à 2 (l'ordre de l'opérateur M^S) et dont les polynômes antisymétriques sont de degré au plus égal à 4 (l'ordre de l'opérateur M^A).

Nous allons donner une estimation uniforme dans des normes de Hölder (nous donnerons plus tard des estimations analogues dans des normes de Sobolev uniformes). Ainsi pour une fonction v définie sur un sous-ensemble ouvert A , nous notons la semi-norme de Hölder pour $\alpha \in (0, 1)$

$$[v]_{\alpha;A} = \sup_{x,y \in A, x \neq y} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Plus généralement nous rappelons les normes

$$|v|_{k+\alpha;A} = \sum_{j=0}^k |D^j v|_{\alpha;A} \quad \text{avec} \quad |v|_{\alpha;A} = |v|_{0;A} + [v]_{\alpha;A} \quad \text{et} \quad |v|_{0;A} = \sup_{x \in A} |v(x)|$$

Pour prendre en compte le noyau $\mathcal{P}_{2,4}$ de l'opérateur de l'élasticité, nous sommes naturellement amené a définir la semi-norme suivante sur un ouvert A quelconque contenu dans Ω_∞ :

$$\mathcal{N}_{k+2+\alpha;A}(u) = \sup_{x \in \overline{A}} \inf_{P \in \mathcal{P}_{2,4}} |u - P|_{k+2+\alpha;B_1(x) \cap A}$$

Grâce à cette semi-norme on ne conserve que la partie bornée du déplacement. On a ainsi l'estimation elliptique suivante

Théorème 4.3 (Estimation uniforme $C^{2+\alpha}$)

Il existe une constante $C > 0$ telle que si u est un déplacement de régularité $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega_\infty})$, alors on a l'estimation suivante

$$\mathcal{N}_{2+\alpha;\Omega_\infty}(u) \leq C (|Lu|_{\alpha;\Omega_\infty} + |Bu|_{1+\alpha;\partial\Omega_\infty})$$

dès que les deux membres de l'inégalité sont finis.

La preuve de ce théorème se fait par l'absurde grâce à un contrôle sur $u - P$ où P est un polynôme de $\mathcal{P}_{2,4}$. Ce contrôle sur $u - P$ utilise la théorie des espaces de Sobolev à poids pour l'opérateur de Laplace sur \mathbb{R}^n , développée entre autres par Amrouche [349], Amrouche, Girault, Giroire [348]. Citons aussi Kozlov, Maz'ya, Rossmann [419]. Nous

conjecturons l'existence d'une théorie similaire des espaces de Sobolev à poids pour l'opérateur de l'élasticité sur une plaque infinie Ω_∞ , théorie qui impliquerait nos résultats de façon plus directe.

Des estimations de Hölder d'ordre plus élevé $C^{k+2+\alpha}$ que celles données dans le théorème 4.4 sont obtenues facilement avec notre méthode.

Insistons sur le fait qu'on a évidemment des estimations similaires dans les espaces $W^{k,p}$ muni de normes uniformes. Etant donné un ouvert A quelconque, on définit pour $1 < p < +\infty$ et une fonction u la norme

$$|u|_{L^p_{\text{unif}}(A)} = \sup_{x \in A} |u|_{L^p(B_1(x) \cap A)}$$

et plus généralement pour tout k réel positif

$$|u|_{W^{k,p}_{\text{unif}}(A)} = \sup_{x \in A} |u|_{W^{k,p}(B_1(x) \cap A)}$$

On associe aussi au noyau $\mathcal{P}_{2,4}$ la semi-norme

$$\mathcal{N}_{W^{k,p}_{\text{unif}}(A)}(u) = \sup_{x \in A} \inf_{P \in \mathcal{P}_{2,4}} |u - P|_{W^{k,p}(B_1(x) \cap A)}$$

Ainsi on a le

Théorème 4.4 (Estimation uniforme $W^{2,p}_{\text{unif}}$)

Il existe une constante $C > 0$ telle que si u est un déplacement de régularité $W^{2,p}_{loc}(\overline{\Omega_\infty})$, alors on a l'estimation suivante

$$\mathcal{N}_{W^{2,p}_{\text{unif}}(\Omega_\infty)}(u) \leq C \left(|Lu|_{L^p_{\text{unif}}(\Omega_\infty)} + |Bu|_{W^{1-\frac{1}{p},p}_{\text{unif}}(\Omega_\infty)} \right)$$

dès que les deux membres de l'inégalité sont finis.

4.2 Estimations elliptiques intérieures pour un modèle de plaque finie en élasticité linéaire [26]

Résumé

Nous présentons une nouvelle étude des équations de l'élasticité linéaire pour une plaque finie $\omega \times (-1, 1)$ où ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 . A un terme près, exponentiellement décroissant en la distance par rapport au bord latéral $\partial\omega \times (-1, 1)$, nous obtenons des estimations elliptiques ($W^{k,p}$ et $C^{k+\alpha}$) sur les déplacements, uniformes à l'intérieur de la plaque en fonction des forces extérieures. Nous donnons aussi des estimations contrôlant les déformations du déplacement tridimensionnel par les déformations d'une projection bidimensionnelle du déplacement tridimensionnel.

Dans cette section nous reprenons le problème étudié à la section précédente mais ici sur une plaque qui n'est pas infinie. Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^2 quelconque (éventuellement non borné et non régulier). On considère la plaque suivante

$$\Omega = \omega \times (-1, 1)$$

Nous notons $\text{dist}(x', \omega)$ la distance d'un point $x' \in \mathbb{R}^2$ à ω , et

$$\Omega_d = \omega_d \times (-1, 1) \quad \text{où} \quad \omega_d = \{x' \in \mathbb{R}^2, \text{dist}(x', \omega) < d\}$$

Pour un ensemble quelconque $A \subset \Omega_\infty$, nous définissons

$$\mathcal{N}_{k+2+\alpha; A}(u) = \sup_{x \in A} \inf_{\xi \in \Xi(x')} |u - U(\xi)|_{k+2+\alpha; B_1(x) \cap A}$$

où

$$\Xi(x') = \{\xi \in C^\infty(B_2(x')), \quad M\xi = 0 \quad \text{sur} \quad B_1(x')\}$$

Nous utilisons les mêmes notations que dans la section précédente pour les opérateurs M, L, B .

Nous introduisons aussi la notation $\partial^* \Omega_d$ pour désigner le bord de Ω_d excepté les bords latéraux :

$$\partial^* \Omega_d = (\omega_d \times \{+1\}) \cup (\omega_d \times \{-1\})$$

Nous avons alors le résultat suivant

Théorème 4.5 (Estimation intérieure $C^{k+2+\alpha}$ pour une plaque avec bords)

Il existe des constantes $C, c > 0$ telles que pour toute fonction $u \in C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega}_d)$, nous avons pour $d \geq 0$

$$\mathcal{N}_{k+2+\alpha; \Omega}(u) \leq C (|Lu|_{\alpha; \Omega_d} + |Bu|_{k+1+\alpha; \partial^* \Omega_d} + e^{-cd} \mathcal{N}_{k+2+\alpha; \Omega_d}(u))$$

dès que les deux membres de l'inégalité sont finis.

De façon similaire, nous notons pour $1 < p < +\infty$,

$$|u|_{L^p_{\text{unif}}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u|_{L^p(B_1(x) \cap \Omega)}$$

et plus généralement

$$|u|_{W^{k,p}_{\text{unif}}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u|_{W^{k,p}(B_1(x) \cap \Omega)}$$

Nous introduisons la semi-norme

$$\mathcal{N}_{W^{k,p}_{\text{unif}}(\Omega)}(u) = \sup_{x \in \Omega} \inf_{\xi \in \Xi(x')} |u - U(\xi)|_{W^{k,p}(B_1(x) \cap \Omega)}$$

Nous avons alors l'analogie du théorème 4.5 pour les espaces $W^{k+2,p}_{\text{unif}}$:

Théorème 4.6 (Estimation intérieure $W_{\text{unif}}^{k+2,p}$ pour une plaque avec bords)

Il existe des constantes $C, c > 0$ telles que pour toute fonction $u \in W_{\text{loc}}^{k+2,p}(\Omega_d)$, nous avons pour $d \geq 0$

$$\mathcal{N}_{W_{\text{unif}}^{k+2,p}(\Omega)}(u) \leq C \left(|Lu|_{W_{\text{unif}}^{k,p}(\Omega_d)} + |Bu|_{W_{\text{unif}}^{k-\frac{1}{p},p}(\partial^*\Omega_d)} + e^{-cd} \mathcal{N}_{W_{\text{unif}}^{k+2,p}(\Omega_d)}(u) \right)$$

dès que les deux membres de l'inégalité sont finis.

Remarquons que les estimations que nous avons obtenues dans le cas d'une plaque infinie $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \times (-1, 1)$ sont un corollaire immédiat des estimations intérieures qui précèdent (ici $d = +\infty$).

Avant de finir cette section, nous donnons une estimation de type Sobolev, mais de nature différente. Au lieu d'être uniforme, elle est intégrale.

Pour cela, étant donnée une fonction $h = (h_1, \dots, h_{11})$ définie sur ω_d , nous définissons son "extension tridimensionnelle" par

$$P_0(h) = \begin{pmatrix} h_1 + x_3 h_4 + \frac{x_3^2}{2!} h_7 + \frac{x_3^3}{3!} h_{10} \\ h_2 + x_3 h_5 + \frac{x_3^2}{2!} h_8 + \frac{x_3^3}{3!} h_{11} \\ h_3 + x_3 h_6 + \frac{x_3^2}{2!} h_9 \end{pmatrix}$$

Nous notons par \mathcal{P} l'espace formé de telles fonctions :

$$\mathcal{P} = \{P_0(h), \quad h \in H^2(\omega_d)\}$$

Nous définissons la projection bidimensionnelle $\text{Proj}_{|\mathcal{P}}(u)$, où $\text{Proj}_{|\mathcal{P}}$ est n'importe quel projecteur de $L^2([-1, 1])$ sur \mathbb{R}^{11} , qui est naturellement étendu à un projecteur de $H^2(\Omega_d)$ sur \mathcal{P} . Nous donnons maintenant une estimation sur

$$w = u - \text{Proj}_{|\mathcal{P}}(u)$$

Théorème 4.7 (Estimation intérieure $W^{k+2,p}$ pour une plaque avec bords)

Il existe des constantes $C, c > 0$ telles que pour toute fonction $u \in W_{\text{loc}}^{k+2,p}(\Omega_d)$, on a pour $w = u - \text{Proj}_{|\mathcal{P}}(u)$ et pour $d \geq 0$:

$$|w|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C \left(|Lu|_{W^{k,p}(\Omega_d)} + |Bu|_{W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial^*\Omega_d)} + e^{-cd} |u|_{W^{k+2,p}(\Omega_d)} \right)$$

dès que les deux membres de l'inégalité sont finis.

4.3 Estimations d'erreur pour une plaque tridimensionnelle de faible épaisseur [22, 26]

Résumé

Dans cette section nous considérons une plaque linéairement élastique $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ d'épaisseur 2ε pour un ouvert ω de \mathbb{R}^2 . On effectue un changement d'échelle pour se ramener sur un ouvert fixe, dans lequel on applique les estimations uniformes obtenues dans les sections précédentes. On obtient des estimations d'erreur optimales entre la solution tridimensionnelle et une projection bidimensionnelle de la solution tridimensionnelle.

Nous considérons une plaque $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ dont l'épaisseur 2ε est destinée à tendre vers zéro. L'ensemble ω est un ouvert quelconque (éventuellement non borné et non régulier) de \mathbb{R}^2 . Après changement de variables, (cf. Ciarlet [369]) on se ramène à l'ouvert fixe $\Omega = \omega \times (-1, 1)$. On obtient des déplacements u définis sur Ω . On pose

$$e^\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} e_{11}(u) & e_{12}(u) & \frac{1}{\varepsilon}e_{13}(u) \\ e_{12}(u) & e_{22}(u) & \frac{1}{\varepsilon}e_{23}(u) \\ \frac{1}{\varepsilon}e_{13}(u) & \frac{1}{\varepsilon}e_{23}(u) & \frac{1}{\varepsilon^2}e_{33}(u) \end{pmatrix}$$

et on définit la forme bilinéaire sur $H_{\text{loc}}^1(\Omega) \times C_0^\infty(\omega \times [-1, 1])$

$$a^\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} \lambda e_{ii}^\varepsilon(u) e_{jj}^\varepsilon(v) + 2\mu e_{ij}^\varepsilon(u) e_{ij}^\varepsilon(v)$$

et la forme linéaire sur $C_0^\infty(\omega \times [-1, 1])$:

$$l(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\omega \times \{+1\}} g v - \int_{\omega \times \{-1\}} g v$$

pour des fonctions $f \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ et $g \in H_{\text{loc}}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. On considère alors les déplacements $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ solutions du problème suivant :

$$a^\varepsilon(u, v) = l(v), \quad \forall v \in C_0^\infty(\omega \times [-1, 1]) \quad (4.33)$$

A ce stade de la présentation nous pourrions rajouter une condition sur le bord latéral $\partial\omega \times (-1, 1)$, cependant notre théorie nécessite plus de développements pour en tenir compte de façon satisfaisante (étude fine des couches limites dans des normes uniformes adaptées). C'est la raison pour laquelle nous n'intégrons pas ces conditions aux limites dans la formulation variationnelle (4.33).

Il existe de très nombreux travaux sur les estimations d'erreurs entre la solution tridimensionnelle des équations de l'élasticité linéaire et un déplacement de Kirchhoff-Love solution des équations du même nom. Citons en particulier les travaux de Shoikhet [467] et Ciarlet, Destuynder [371, 389, 388, 366] pour les premières estimations d'erreur rigoureuses sur la différence $u - U^0$ entre la solution tridimensionnelle et le déplacement de Kirchhoff-Love. Citons à l'inverse le travail récent de Dauge et Gruais [380] sur des estimations d'erreur L^∞ , et le livre très récent de Maz'ya, Nazarov, Plamenevskij, [434, 435] où sont traités de nombreux problèmes de perturbation dans des domaines singuliers avec leurs estimations d'erreurs correspondantes. D'une façon générale, ces diverses estimations d'erreur sont dans le même esprit que la théorie des perturbations singulières développée depuis les années 1960 (cf. Lions [429]). Il est bien connu que les perturbations singulières présentent un phénomène de perte de régularité qui empêche d'estimer $u - U^0$ dans les normes naturelles. Par exemple même dans le cas très particulier d'une plaque périodique (i.e. $\Omega = \omega \times (-1, 1)$ avec $\omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{Z}^2$), si $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, il n'est pas connu d'estimation de type $|u - U^0|_{H^2(\Omega)}$ par une puissance de ε . Dans tous les cas connus il faut, ou bien se contenter d'une estimation de régularité plus faible sur $u - U^0$, ou bien demander plus de régularité sur les forces imposées f et g . L'approche classique a été appliquée à de très nombreux problèmes de réduction de dimension. Cependant à notre connaissance, tous souffrent de cette même difficulté de régularité. Citons à ce propos Jacques-Louis Lions ([429], p. 92) :

Les estimations données (...) sont dans l'espace H^1 . En fait en utilisant les résultats classiques de régularité des problèmes aux limites elliptiques (...), les solutions u (...) sont dans des espaces plus petits (de Sobolev, de Schauder, etc.). Quelles sont les estimations d'erreur dans ces espaces ?

L'objet de notre travail est de proposer une réponse possible à cette question sur le cas des plaques (mais qui a en fait un caractère tout-à-fait général), en contournant la difficulté classique grâce à l'introduction d'une projection bidimensionnelle de la solution tridimensionnelle.

Changement de variables

On introduit le changement de variables suivant $\bar{x} = (\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, x_3)$ avec $\bar{x} \in \bar{\Omega} = \frac{\omega}{\varepsilon} \times (-1, 1)$ et

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\bar{x}) &= \varepsilon^2 u_1(x) & \bar{\partial}_1 &= \varepsilon \partial_1 & \bar{f}_1(\bar{x}) &= \varepsilon^4 f_1(x) & \bar{g}_1(\bar{x}) &= \varepsilon^4 g_1(x) \\ \bar{u}_2(\bar{x}) &= \varepsilon^2 u_2(x) & \bar{\partial}_2 &= \varepsilon \partial_2 & \bar{f}_2(\bar{x}) &= \varepsilon^4 f_2(x) & \bar{g}_2(\bar{x}) &= \varepsilon^4 g_2(x) \\ \bar{u}_3(\bar{x}) &= \varepsilon u_3(x) & \bar{\partial}_3 &= \partial_3 & \bar{f}_3(\bar{x}) &= \varepsilon^5 f_3(x) & \bar{g}_3(\bar{x}) &= \varepsilon^5 g_3(x) \end{aligned}$$

Ce changement de variables permet de se ramener à l'étude précédente de la plaque en élasticité linéaire sur l'ouvert $\frac{\omega}{\varepsilon} \times (-1, 1)$ et d'appliquer nos estimations indépendantes de la taille de l'ouvert d'épaisseur fixée.

Estimations d'erreur

En effectuant le changement de variables précédent, nous allons maintenant appliquer la théorie que nous avons développée dans les sections précédentes. Dans les estimations suivantes nous prendrons des forces surfaciques nulles $g = 0$ pour simplifier la présentation, bien que des résultats similaires soient disponibles pour $g \neq 0$.

A des fins pédagogiques, nous commençons par un résultat particulier.

Théorème 4.8 (Bornes L^∞ dans le cas périodique)

Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de λ, μ telle que pour la plaque périodique (c'est-à-dire $\Omega = \omega \times (-1, 1)$ avec $\omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{Z}^2$), si $f \in L^\infty(\Omega)$ et $g \equiv 0$, alors toute solution u de (4.33) est telle que $w = u - \text{Proj}_{|\mathcal{P}}(u)$ vérifie

$$|e^\varepsilon(w)|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon \left(|f_\alpha|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon |f_3|_{L^\infty(\Omega)} \right)$$

Nous voyons que ce théorème nous assure que si on sait borner les déformations de $\text{Proj}_{|\mathcal{P}}(u)$ qui est une quantité essentiellement bidimensionnelle, alors on sait aussi borner les déformations (et donc les contraintes) de la véritable solution tridimensionnelle. Ici la constante C dans l'estimation est indépendante de la taille de l'ouvert ω périodique choisi (on pourrait tout aussi bien choisir $\omega = l\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{Z}^2$ avec l très grand comme l'inverse d'une puissance de ε par exemple).

Nous donnons maintenant des estimations d'erreurs de type $W^{2,p}$ dans le cas non périodique.

Théorème 4.9 (Estimations d'erreur intérieures $W^{2,p}$)

Soit $\Omega = \omega \times (-1, 1)$ avec ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , et

$$\Omega_d = \omega_d \times (-1, 1), \quad \text{où } \omega_d = \{x' \in \mathbb{R}^2, \quad \text{dist}(x', \omega) < d\}$$

Soit $1 < p < +\infty$. Il existe deux constantes $C, c > 0$ dépendant uniquement de λ, μ et p , telles que pour toute solution u de (4.33) sur Ω_d avec $f \in L^p(\Omega_d)$, on a l'estimation suivante sur $w = u - \text{Proj}_{|\mathcal{P}}(u)$ (que l'on donne uniquement dans le cas où $g \equiv 0$ pour simplifier la présentation)

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon^2 |e^\varepsilon(w)|_{L^p(\Omega)} \\ |\partial_{33}w_3|_{L^p(\Omega)} \\ \varepsilon |\partial_{33}w_\alpha|_{L^p(\Omega)}, \quad \varepsilon |\partial_{3\alpha}w_3|_{L^p(\Omega)} \\ \varepsilon^2 |\partial_{3\alpha}w_\beta|_{L^p(\Omega)}, \quad \varepsilon^2 |\partial_{\alpha\beta}w_3|_{L^p(\Omega)} \\ \varepsilon^3 |\partial_{\alpha\beta}w_\gamma|_{L^p(\Omega)} \end{array} \right\} \leq C \left(\begin{array}{l} \varepsilon^3 \left(\sum_\alpha |f_\alpha|_{L^p(\Omega_d)} + \varepsilon |f_3|_{L^p(\Omega_d)} \right) \\ + \varepsilon^2 e^{-c\frac{d}{\varepsilon}} \left(|e^\varepsilon(w)|_{L^p(\Omega_d)} \right. \\ \left. + |u_3|_{L^p(\Omega_d)} + \varepsilon \sum_\alpha |u_\alpha|_{L^p(\Omega_d)} \right) \end{array} \right)$$

Plus généralement, il est aussi possible de donner des versions $W^{k,p}$ de cette estimation.

Nous allons donner une estimation uniforme dans des normes de Hölder. A cette fin, nous introduisons quelques notations. Ainsi pour une fonction v définie sur un sous-ensemble ouvert A , nous notons la semi-norme de Hölder pour $\alpha \in (0, 1)$ par rapport à $x' = (x_1, x_2)$ seulement

$$[v]_{\alpha;A}' = \sup_{x=(x',x_3),y=(y',x_3) \in A, x \neq y} \frac{|v(x',x_3) - v(y',x_3)|}{|x' - y'|^\alpha}$$

et la semi-norme de Hölder pour $\alpha \in (0, 1)$ par rapport à x_3 seulement

$$[v]_{\alpha;A}^3 = \sup_{x=(x',x_3),y=(x',y_3) \in A, x \neq y} \frac{|v(x',x_3) - v(x',y_3)|}{|x_3 - y_3|^\alpha}$$

Nous rappelons aussi que nous notons la norme L^∞ :

$$|v|_{0;A} = \sup_{x \in A} |v(x)|$$

Nous définissons

$$U^\varepsilon(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta_1 - x_3 \partial_1 \zeta_3 + \varepsilon^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{x_3^2}{2!} \partial_1 \operatorname{div}' \zeta + a(x_3) \partial_1 \Delta' \zeta_3 \right) \\ \zeta_2 - x_3 \partial_2 \zeta_3 + \varepsilon^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{x_3^2}{2!} \partial_2 \operatorname{div}' \zeta + a(x_3) \partial_2 \Delta' \zeta_3 \right) \\ \zeta_3 + \varepsilon^2 \left(-\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} x_3 \operatorname{div}' \zeta + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{x_3^2}{2!} \Delta' \zeta_3 \right) \end{pmatrix}$$

où nous rappelons que

$$\operatorname{div}' \zeta = \partial_1 \zeta_1 + \partial_2 \zeta_2, \quad \Delta' = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad a(x_3) = \left(\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{x_3^3}{3!} - 2 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) x_3$$

Ainsi nous avons

Théorème 4.10 (Estimations d'erreur $C^{2,\alpha}$ uniformes)

Soit $\Omega = \omega \times (-1, 1)$ avec ω un ouvert quelconque (eventuellement non borné) de \mathbb{R}^2 , et

$$\Omega_d = \omega_d \times (-1, 1), \quad \text{où } \omega_d = \{x' \in \mathbb{R}^2, \operatorname{dist}(x', \omega) < d\}$$

On définit la norme pour $0 < \alpha < 1$

$$|v|_{\alpha,\varepsilon;\Omega} = |v|_{0;\Omega} + [v]_{\alpha;\Omega}^3 + \varepsilon^\alpha [v]_{\alpha;\Omega}'$$

et la semi-norme

$$\mathcal{N}_{\alpha,\varepsilon;\Omega}(v) = \sup_{x \in \Omega} \inf_{\xi \in \Xi_\varepsilon(x')} |v_3 - U_3^\varepsilon(\xi), \varepsilon (v_\alpha - U_\alpha^\varepsilon(\xi))|_{\alpha,\varepsilon;\Omega}$$

où

$$\Xi_\varepsilon(x') = \{\xi \in C^\infty(B_{2\varepsilon}(x')), \quad M\xi = 0 \quad \text{sur} \quad B_\varepsilon(x')\}$$

Il existe deux constantes $C, c > 0$ dépendant uniquement de λ, μ et α , telles que pour toute solution u de (4.33) sur Ω_d avec $f \in C^\alpha(\overline{\Omega}_d)$, on a l'estimation suivante sur $w = u - \text{Proj}_{\mathcal{P}}(u)$ (que l'on donne uniquement dans le cas où $g \equiv 0$ pour simplifier la présentation)

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon^2 |e^\varepsilon(w)|_{\alpha,\varepsilon;\Omega} \\ |\partial_{33}w_3|_{\alpha,\varepsilon;\Omega} \\ \varepsilon |\partial_{33}w_\alpha|_{\alpha,\varepsilon;\Omega}, \quad \varepsilon |\partial_{3\alpha}w_3|_{\alpha,\varepsilon;\Omega} \\ \varepsilon^2 |\partial_{3\alpha}w_\beta|_{\alpha,\varepsilon;\Omega}, \quad \varepsilon^2 |\partial_{\alpha\beta}w_3|_{\alpha,\varepsilon;\Omega} \\ \varepsilon^3 |\partial_{\alpha\beta}w_\gamma|_{\alpha,\varepsilon;\Omega} \end{array} \right\} \leq C \left(\begin{array}{l} \varepsilon^3 (|f_\alpha|_{\alpha,\varepsilon;\Omega_d} + \varepsilon |f_3|_{\alpha,\varepsilon;\Omega_d}) \\ + \varepsilon^2 e^{-c\frac{d}{\varepsilon}} (|e^\varepsilon(w)|_{\alpha,\varepsilon;\Omega_d} + \mathcal{N}_{\alpha,\varepsilon;\Omega_d}(u)) \end{array} \right)$$

Plus généralement, il est aussi possible de donner des versions $C^{k,\alpha}$ et $W_{\text{unif}}^{2,p}$ de cette estimation.

Conclusion et questions ouvertes

Une question particulièrement intéressante serait de chercher des estimations similaires tenant compte des conditions aux limites sur le bord latéral $\partial\omega \times (-1, 1)$. Dans cette direction une étude plus poussée des couches limites semble faisable, mais reste à faire. Enfin il serait intéressant d'appliquer notre approche à de nombreux autres problèmes dans des ouverts minces avec phénomène de réduction de dimension, tels que par exemple, les plaques anisotropes, les coques, les arcs, les problèmes similaires en élasticité non linéaire, les équations d'évolutions, les problèmes d'homogénéisation, etc. La liste est longue, et dans chaque cas notre approche est susceptible d'apporter un éclairage nouveau sur des modèles pourtant déjà étudiés par la méthode énergétique classique.

4.4 Sur la régularité asymptotique des déplacements d'une poutre dans la limite des faibles épaisseurs [23]

Résumé

Dans cette section nous considérons une poutre droite de faible épaisseur 2ε , en élasticité linéaire. Nous restreignons notre étude à des proutres de \mathbb{R}^2 , et étudions

le passage $2d - 1d$ dans la limite où l'épaisseur 2ε tend vers zéro. Afin d'éviter tout problème de couches limites, nous supposons des conditions périodiques aux extrémités de la poutre. Nous revisitons un travail de Paumier, dans lequel il est prouvé que les déplacements sont analytiques en ε jusqu'en $\varepsilon = 0$ si les forces sont à fréquence bornée. Nous prouvons plus généralement, que les déplacements sont C^∞ en ε jusqu'en $\varepsilon = 0$, pour des forces C^∞ non bornées en fréquence. Dans ce cadre, les estimations d'erreur classiques ont exactement le sens de développements de Taylor.

Nous considérons une poutre droite bidimensionnelle $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$, qui s'écrit $\Omega^\varepsilon = I \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Cette poutre est d'épaisseur 2ε , et afin d'éviter tout problème de couches limites, nous la supposons périodique, i.e. $I = \mathbb{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Après changement d'échelle, on peut ramener le problème sur l'ouvert fixe $\Omega = I \times (-1, 1)$, et on recherche alors un déplacement $u = (u_1, u_2)$ renormalisé solution des équations suivantes qui deviennent singulières dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu)\partial_{11}u_1 + \frac{(\lambda + \mu)\partial_{21}u_2 + \mu\partial_{22}u_1}{\varepsilon^2} = -f_1 \\ \frac{(\lambda + \mu)\partial_{21}u_1 + \mu\partial_{11}u_2}{\varepsilon^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)\partial_{22}u_2}{\varepsilon^4} = -f_2 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Omega \quad (4.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu(\partial_2u_1 + \partial_1u_2)}{\varepsilon^2} = g_1 \\ \frac{\lambda\partial_1u_1}{\varepsilon^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)\partial_2u_2}{\varepsilon^4} = g_2 \end{array} \right. \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Sous la condition d'équilibre des forces :

$$\int_{\Omega} f_i + \int_{\partial\Omega} g_i = 0, \quad i = 1, 2$$

pour des forces suffisamment régulières, il existe une unique solution u parmi celles vérifiant la condition de normalisation

$$\int_{\Omega} u_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.35)$$

(car sinon on peut toujours ajouter une constante aux déplacements et obtenir encore une solution). Remarquons que la solution ne dépend que de $\eta = \varepsilon^2$, et que formellement on s'attend à pouvoir écrire cette solution normalisée

$$u(\eta) = \sum_{j \geq 0} \eta^j \frac{u^j}{j!}$$

Ici la suite de fonctions $(u^j)_j$ est déterminée de façon unique, à nouveau en imposant la condition de normalisation pour chaque entier j :

$$\int_{\Omega} u_i^j = 0, \quad i = 1, 2$$

Dans [455], Paumier a montré (en fait pour des plaques) que pour des forces $F = (f, g)$ à fréquences bornées en x_1 , i.e. de la forme

$$F = \sum_{k \in \mathbf{Z}, |k| \leq K} F_k^c(x_2) \cos(k_1 x_1) + F_k^s(x_2) \sin(k_1 x_1)$$

avec $F_k^c, F_k^s \in C^\infty([-1, 1])$, il existe $\eta_0(K) > 0$, tel que le développement (4.35) converge dans des espaces de Sobolev du type $H^m((-1, 1), H^q(I))$ pour $\eta \in [0, \eta_0)$.

Plus généralement, pour des forces régulières à fréquences non bornées, nous prouvons le résultat suivant :

Théorème 4.11 (Dépendance régulière de la solution jusqu'à l'épaisseur nulle)

Soit Φ , l'application

$$\begin{aligned} \Phi : C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\partial\Omega) \times [0, +\infty) &\longrightarrow C^\infty(\bar{\Omega}) \\ (f, g, \eta) &\longmapsto u(\eta) \end{aligned}$$

où $u(\eta)$ est la solution de (4.34).

Alors l'application Φ est C^∞ jusqu'en $\eta = 0$.

Ce résultat, d'apparence simple et sur un problème linéaire, est en fait délicat à démontrer. Nous devons en particulier montrer que toute dérivée k -ième de Φ par rapport à η , est continue jusqu'en $\eta = 0$. Plus précisément nous obtenons, en autres, l'estimation non optimale suivante pour tout $j, k \geq 0$

$$\left| \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} - u^j \right|_{k+\alpha} \leq \eta C |F|_{k+9j+5+\alpha} \quad (4.36)$$

où $C = C(n, k, \alpha) > 0$, et les normes figurant dans l'inégalité sont des normes classiques de Hölder.

Au vu de ce résultat, nous voyons en particulier qu'il est maintenant facile d'interpréter les estimations d'erreurs classiques comme de véritables développements de Taylor des déplacements en fonction de $\eta = \varepsilon^2$ (c'est-à-dire en fonction de l'épaisseur initiale de la poutre 2ε), et ce dans l'espace des fonctions C^∞ muni de sa topologie naturelle.

Pour finir, remarquons que l'inégalité (4.36) implique d'ailleurs assez facilement que l'application Φ est non seulement C^∞ , mais est C^∞ -douce (cf. section 2.3 pour la définition d'une application douce).

4.5 Estimation d'erreur pour un modèle de cylindre asymptotiquement mince [29]

Résumé

Dans cette section nous considérons un cylindre mince $\varepsilon\omega \times (0, L)$ de section bidimensionnelle $\varepsilon\omega$ et de longueur L . On considère les déplacements de ce cylindre en élasticité linéaire hétérogène anisotrope en supposant les extrémités du cylindre fixées. On effectue un changement d'échelle pour se ramener sur un cylindre fixe, dans lequel on obtient une estimation d'erreur $3d - 1d$ via une nouvelle inégalité de type Korn que nous établissons.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec F. Murat et A. Sili.

On considère un cylindre $\Omega^\varepsilon = \varepsilon\omega \times I$ de section $\varepsilon\omega$ où ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^2 et $I = (0, L)$ où L est la longueur du cylindre. On suppose que ce cylindre est décrit par l'élasticité linéaire hétérogène anisotrope. Il est soumis à des forces extérieures et ses deux extrémités sont supposées fixées. Après un changement de variables approprié, il est possible de ramener le problème sur un cylindre fixe

$$\Omega = \omega \times (0, L)$$

sur lequel on considère les déplacements $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ appartenant à l'espace $(H_b^1(\Omega))$ ³. Ici $H_b^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions scalaires $H^1(\Omega)$ s'annulant sur les extrémités du cylindre :

$$H_b^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \times \partial I\}$$

Nous noterons $x = (x', x_3)$ tout point de Ω avec $x' = (x_1, x_2) \in \omega$. Dans la suite les indices latins i, j, k, \dots prendront les valeurs 1, 2, 3. A cause du changement de variables, les déplacements u^ε vont satisfaire un problème de perturbations singulières. Ainsi, étant donné un déplacement $\phi \in (\mathcal{D}'(\Omega))$ ³ les déformations suivantes vont jouer un rôle important :

$$e^\varepsilon(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2}e_{11}(\phi) & \frac{1}{\varepsilon^2}e_{12}(\phi) & \frac{1}{\varepsilon}e_{13}(\phi) \\ \frac{1}{\varepsilon^2}e_{21}(\phi) & \frac{1}{\varepsilon^2}e_{22}(\phi) & \frac{1}{\varepsilon}e_{23}(\phi) \\ \frac{1}{\varepsilon}e_{13}(\phi) & \frac{1}{\varepsilon}e_{23}(\phi) & e_{33}(\phi) \end{pmatrix}$$

Ici nous rappelons que le gradient symétrisé $e_{ij}(\phi)$ est défini par

$$e_{ij}(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

Les caractéristiques élastiques du cylindre sont contenues dans son tenseur d'élasticité du quatrième ordre, noté A . Ce tenseur A est supposé fortement coercif et à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, i.e.

$$A_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

$$A_{ijkl}(x)\bar{e}_{kl}\bar{e}_{ij} \geq m \sum_{i,j} |\bar{e}_{ij}|^2, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall \bar{e} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3}$$

Enoncé du problème et objectif de notre étude

Étant donnée un ensemble de forces

$$h \in (L^2(\Omega))_s^{3 \times 3}$$

nous cherchons les déplacements u^ε solutions du problème variationnel suivant

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A(x)e^\varepsilon(u^\varepsilon)e^\varepsilon(\phi)dx = \int_{\Omega} he^\varepsilon(\phi)dx \\ u^\varepsilon \in (H_b^1(\Omega))^3, \quad \forall \phi \in (H_b^1(\Omega))^3 \end{cases}$$

Dans [449], Murat et Sili ont identifié le problème limite, dont la solution est un triplet de déplacements (u, v, w) qui seront précisés ci-dessous, et tels que

$$\|e^\varepsilon(u^\varepsilon - (u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w))\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$$

L'objet de notre étude est de prouver, quitte à supposer plus de régularité sur les données limites, que cette convergence a lieu en $O(\varepsilon)$.

Notations complémentaires

Dans la suite les indices grecs prendront les valeurs 1, 2 (à l'exception de ε qui est destiné à tendre vers zéro). On utilise la convention de sommation sur les indices répétés. La notation x^R désigne le vecteur $x^R = (-x_2, x_1, 0)$ de \mathbb{R}^3 obtenu à partir de x par une rotation de $\pi/2$ des deux premières composantes, et en annulant la dernière composante. On définit les espaces de fonctions à valeurs réelles

$$H_b^1(I) = \{\phi \in H^1(I) : \phi = 0 \text{ sur } \partial I\}$$

$$H_b^2(I) = \left\{ \phi \in H^2(I) : \phi = \frac{d\phi}{dx_3} = 0 \text{ sur } \partial I \right\}$$

$$H_m^1(\omega) = \left\{ \psi \in H^1(\omega) : \int_{\omega} \psi(x') dx' = 0 \right\}$$

On définit ensuite les espaces de fonctions à valeur dans \mathbb{R}^3

$$\left\{ \begin{array}{l} BN_b(\Omega) = \{u : \exists \zeta_\alpha \in H_b^2(I), \quad u_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x_3), \quad \alpha = 1, 2 \\ \exists \zeta_3 \in H_b^1(I), \quad u_3(x) = \zeta_3(x_3) - x_\alpha \frac{d\zeta_\alpha}{dx_3}(x_3) \} \end{array} \right.$$

(où la notation BN se réfère aux déplacements de Bernoulli-Navier),

$$\left\{ \begin{array}{l} R_b(\Omega) = \{v : \exists c \in H_b^1(I), \quad v_\alpha(x) = c(x_3)x_\alpha^R, \quad \alpha = 1, 2 \\ v_3 \in L^2(I; H_m^1(\omega))\} \end{array} \right.$$

(où la notation R se réfère aux rotations en dimension 2),

$$\left\{ \begin{array}{l} RD_2^\perp(\Omega) = \{w : w_\alpha \in L^2(I; H_m^1(\omega)), \quad \alpha = 1, 2 \\ \int_\omega (-x_2 w_1(x', x_3) + x_1 w_2(x', x_3)) dx' = 0 \quad \text{p.p.} \quad x_3 \in I, \\ w_3(x) = 0\} \end{array} \right.$$

(où la notation RD_2 se réfère aux déplacements rigides en dimension 2).

On définit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}(\Omega) = \left\{ e \in (L^2(\Omega))_s^{3 \times 3} : \exists (u, v, w) \in BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega) \times RD_2^\perp(\Omega), \right. \\ \left. e = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(w) & e_{\alpha 3}(v) \\ e_{\alpha 3}(v) & e_{33}(u) \end{pmatrix} \right\} \end{array} \right.$$

où on a noté symboliquement $e_{\alpha\beta}(w)$ le tenseur $\{e_{\alpha\beta}(w) : \alpha, \beta = 1, 2\}$ de $\mathbb{R}_s^{2 \times 2}$ et $e_{\alpha 3}(v)$ le vecteur $\{e_{\alpha 3}(v), \alpha = 1, 2\}$ de \mathbb{R}^2 . On peut montrer (voir [450]) que $BN_b(\Omega), R_b(\Omega), RD_2^\perp(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert pour les normes dont les carrés sont donnés par

$$\|e_{33}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \sum_\alpha \|e_{\alpha 3}(v)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \sum_{\alpha, \beta} \|e_{\alpha\beta}(w)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et que $\mathcal{E}(\Omega)$ muni de la norme dont le carré est la somme des carrés de ces normes est un espace de Hilbert.

Enoncé du résultat

Dans [449], Murat et Sili ont montré que le problème limite est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega A(x)e\bar{e}dx = \int_\Omega h\bar{e}dx \\ e \in \mathcal{E}(\Omega) \quad \forall \bar{e} \in (\mathcal{E}(\Omega))^3 \end{array} \right.$$

De plus le tenseur e solution s'écrit

$$e = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(w) & e_{\alpha 3}(v) \\ e_{\alpha 3}(v) & e_{33}(u) \end{pmatrix}$$

où $(u, v, w) \in BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega) \times RD_2^\perp(\Omega)$ sont uniques. Alors nous avons

Théorème 4.12 (Estimation d'erreur 3d-1d)

Avec les notations qui précèdent, il existe une constante $C = C(m, |A|_{L^\infty(\Omega)}) > 0$ telle que, si w_1, w_2, v_3 appartiennent à $H_b^1(\Omega)$, $(h - Ae)_{\alpha 3} \in H_b^1(I; L^2(\omega))$, et $(h - Ae)_{33} \in H_b^2(I; L^2(\omega))$, alors

$$\|e^\varepsilon (u^\varepsilon - (u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w))\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon CM$$

où

$$M = \|v\|_{(H_b^1(\Omega))^3} + \|w\|_{(H_b^1(\Omega))^3} + \|(h - Ae)_{\alpha 3}\|_{H_b^1(I; L^2(\omega))} + \|(h - Ae)_{33}\|_{H_b^2(I; L^2(\omega))}$$

En particulier on déduit

$$\|u^\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon CM$$

La preuve de ce théorème repose sur une nouvelle inégalité de type Korn que nous prouvons

Proposition 4.13 (Inégalité de type Korn, partielle)

Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω telle que si $z \in (H^1(\Omega))^3$, alors

$$\left\| z_3 - \left(\frac{\int_\omega z_3}{\int_\omega 1} - x_\alpha \frac{d}{dx_3} \left(\frac{\int_\omega z_\alpha}{\int_\omega 1} \right) \right) \right\|_{H^{-1}(I; L^2(\omega))} \leq C \left(\|e_{\alpha\beta}(z)\|_{L^2(\Omega)} + \|e_{\alpha 3}(z)\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

Pour finir cette section, disons quelques mots sur la littérature. L'étude des cylindres minces a commencé avec les questions de conduction : Caillerie [362], Cioranescu, Saint Jean Paulin [376], Murat, Sili [447, 448]. En ce qui concerne l'élasticité sur les cylindres minces, citons Geymonat, Krasucki, Marigo [401], Le Dret [423], Kozlov, Ma'zuya, Movchan [418]. Enfin, pour des problèmes reliés aux questions précédentes, citons entre autres Damlamian, Vogelius [378] et Trabucho, Viano [475], Gaudiello, Gustafsson, Lefter, Mossino [398, 399].

4.6 Justification du modèle de plaque non linéaire de Kirchhoff-Love comme application d'une nouvelle méthode d'inversion singulière [20, 16]

Résumé

Dans cette section nous considérons dans le cadre de l'élasticité non linéaire une plaque tridimensionnelle isotrope homogène de St Venant-Kirchhoff, d'épaisseur 2ε et périodique dans les deux autres directions. Le problème se ramène par changement d'échelle à un problème non linéaire de type pénalisation sur un ouvert fixe. Nous présentons une nouvelle méthode d'inversion singulière. En appliquant cette méthode nous prouvons, pour des forces extérieures suffisamment petites et fixes, que la solution tridimensionnelle en déplacement converge vers la solution du modèle de Kirchhoff-Love non linéaire des plaques lorsque l'épaisseur 2ε tend vers zéro. Le modèle de plaque limite contient en particulier celui de *von Kármán*. Nous donnons aussi une estimation a priori de la vitesse de convergence.

Nous considérons une plaque tridimensionnelle $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ d'épaisseur 2ε et supposée périodique dans ses deux autres directions $\omega = \mathbb{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Cette plaque est soumise à des forces extérieures, et son déplacement est supposé solution des équations de l'élasticité non linéaire isotrope homogène pour un matériau de St Venant-Kirchhoff. Après changement d'échelle, le problème se ramène à l'étude des déplacements u solutions du problème de pénalisation suivant que nous écrivons -pour ne pas rentrer immédiatement dans les détails- sous la forme abstraite :

$$\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F \quad \text{sur} \quad \Omega = \omega \times (-1, 1) \quad (4.37)$$

où F désigne les forces extérieures et \mathcal{A}^ε est l'opérateur d'élasticité non linéaire qui devient singulier lorsque ε tend vers zéro. Le système (4.37) est un système elliptique quasilinéaire du second ordre sur les trois composantes du déplacement u et comporte trois conditions non linéaires aux bords. Lorsque $\varepsilon = 0$, le système dégénère de façon singulière et peut se ramener à un problème posé sur la fibre moyenne ω . Ce système réduit sur ω (qui porte le nom de modèle de Kirchhoff-Love non linéaire) est composé d'un système elliptique semi-linéaire d'ordre 2 sur les deux premières composantes du déplacement, couplé à une équation elliptique semi-linéaire d'ordre 4 sur la troisième composante du déplacement. Comme cas particulier de ce système réduit on trouve les équations des plaques de *von Kármán*. Il est en particulier connu (cf. Ciarlet [366]) que les solutions du problème pour $\varepsilon > 0$ convergent formellement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ vers les solutions du problème à $\varepsilon = 0$. Citons Philippe G. Ciarlet (qui dans [369], p. 325, après avoir évoqué différents résultats de Γ -convergence, remarque)

“Notons qu'un théorème de convergence qui justifierait la théorie de Kirchhoff-Love non linéaire n'est toujours pas connu.”

Citons aussi P.G. Ciarlet ([366], p. 62) à ce sujet :

“Une idée naturelle consiste à essayer de construire pour ε suffisamment petit une solution $u(\varepsilon)$ du problème $\mathcal{P}(\varepsilon)$ “proche de” la solution bidimensionnelle u^0 du problème limite $\mathcal{P}(0)$. (...) Une étape supplémentaire serait de comparer les solutions tridimensionnelles et bidimensionnelles, généralisant ainsi au cas non linéaire, la théorie de la convergence connue dans le cas linéaire.”

Nous allons suivre cette idée et présenter ici les moyens de la mettre en oeuvre grâce à une nouvelle méthode d'inversion singulière.

Ainsi nous allons résoudre du même coup deux des cinq points présentés par P.G. Ciarlet dans sa préface au volume II [369]. Il s'agit des problèmes ouverts :

- *“Justification de la théorie non linéaire de Kirchhoff-Love par un théorème de convergence lorsque l'épaisseur tend vers zéro”*

- “Existence de solutions du problème non linéaire pour une plaque tridimensionnelle, obtenue comme extension d’une solution bidimensionnelle (dont on connaît l’existence)”

Nous obtenons effectivement ce dernier résultat pour des solutions bidimensionnelles suffisamment petites.

Rappelons les résultats déjà connus. Il est possible de montrer l’existence de solutions (dans des espaces de Banach appropriés) grâce au théorème d’inversion locale classique dans les cas suivants :

- 1) Pour $\varepsilon = 0$, et des forces petites $|F| < R_0$.
- 2) Pour chaque $\varepsilon > 0$ et des forces suffisamment petites $|F| < R_\varepsilon$.

La difficulté est que R_ε tend vers zéro lorsque l’épaisseur ε tend vers zéro, ce qui complique sérieusement toute approche classique pour montrer la convergence des solutions lorsque ε tend vers zéro.

Nous prouvons un théorème du type (la version précise sera donnée en 4.15) :

Théorème 4.14 (Convergence 3d-2d et estimation d’erreur)

Il existe des constantes $\varepsilon_0, R_0, M > 0$ telles que pour chaque $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, et $|F| < R_0$, il existe une solution u de (4.37). De plus si on note u^0 la solution pour $\varepsilon = 0$, alors nous avons l’estimation a priori :

$$|u - u^0| \leq \varepsilon M \tag{4.38}$$

Pour finir toute solution vérifiant (4.38) est unique.

Ce résultat est basé sur une nouvelle méthode que nous avons appelée *Méthode d’Inversion Singulière* qui permet d’obtenir des résultats d’existence même dans les cas où le problème est trop singulier pour appliquer le théorème d’inversion locale classique. Dans notre cas, nous voulons trouver une branche de solutions u de

$$\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F$$

lorsque le paramètre ε varie à partir de sa valeur initiale $\varepsilon = 0$ pour laquelle nous avons une solution

$$\mathcal{A}^0(u^0) = F$$

Le fait que l’opérateur \mathcal{A}^ε ait un comportement en $1/\varepsilon$ lorsque ε tend vers zéro, empêche l’application du théorème d’inversion locale classique. De plus il est connu que ces problèmes présentent un phénomène de perte de dérivées dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui se voit dans le passage d’un opérateur d’ordre 2, à un opérateur d’ordre 4, même dans le cas de l’élasticité linéaire. Les techniques telles que le théorème d’inversion locale de Nash-Moser (cf. Hamilton [409]) d’une part, et de perturbations singulières d’autre part (cf. Lions [429]) ne semblent pas applicables à ce contexte (cf. Paumier [456], Monneau [24]). Pour finir, même si un théorème de point fixe existe sans doute dans ce contexte, il semble assez difficile à obtenir.

Notre méthode d'inversion singulière permet d'obtenir un compromis entre l'exigence d'un théorème de point fixe, et la flexibilité des méthodes d'inversion locale classiques.

La Méthode d'Inversion Singulière

(appliquée à la résolution de l'équation $\mathcal{A}^\varepsilon u = F$ à partir de $\varepsilon = 0$)

Étape 1 : Pour $\varepsilon = 0$, la solution u^0 de $\mathcal{A}^0(u^0) = F$ peut être obtenue pour $|F| < R_0$, grâce au théorème d'inversion locale classique à partir de la solution particulière $u^0 = 0$ correspondant à $F = 0$.

Étape 2 : Pour chaque $\varepsilon > 0$, la solution u de $\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F$ peut être obtenue pour $|F| < R_\varepsilon$, grâce au théorème d'inversion locale classique à partir de la solution particulière $u = 0$ correspondant à $F = 0$. (Mais à ce stade, R_ε n'est pas contrôlé lorsque ε tend vers zéro.)

Étape 3 : Il existe une constante $c = c(R_0) > 0$ telle que pour tout $M > 0$, pour tout $|F| < R_0$, il existe un $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M, R_0) > 0$ tel que pour toute fonction u de l'ensemble

$$K_M^\varepsilon = \{u, \|u - u^0\| \leq \varepsilon M\}$$

et pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, nous avons

$$(D_u \mathcal{A}^\varepsilon(u) \cdot w, w) \geq c|w|^2 \quad (4.39)$$

ce qui prouve en particulier que $D_u \mathcal{A}^\varepsilon(u)$ est inversible.

Remarquons qu'ici la norme $\|\cdot\|$ est une norme plus forte que la norme $|\cdot|$ sur w .

Étape 4 : A l'aide de (4.39) et pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, nous prouvons l'*estimation a priori*

$$\exists M > 0, \quad \forall |F| < R_0, \quad (u \in K_M^\varepsilon \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^\varepsilon(u) = F) \implies \left(u \in K_{\frac{M}{2}}^\varepsilon\right) \quad (4.40)$$

Étape 5 : Conclusion. Grâce à (4.39), le linéarisé est inversible tant que $u \in K_M^\varepsilon$. Or la solution u ne peut sortir de K_M^ε , car $u \in K_{M/2}^\varepsilon$ par (4.40). Nous concluons *a posteriori*, que le théorème d'inversion locale classique s'applique à l'étape 2 uniformément en $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, pour toutes les F vérifiant $|F| < R_0$. De plus l'inégalité (4.39) implique l'unicité de la solution u sur K_M^ε .

Cette méthode d'inversion singulière semble applicable à de très nombreux problèmes pour lesquels les autres approches échouent (cf. par exemple Bonnet, Chapman, Monneau [3, 4], pour une application de cette méthode dans un autre contexte, avec couches limites).

Enoncé précis du résultat

Nous considérons une plaque périodique d'épaisseur ε

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{Z}^2$$

Nous considérons des forces volumiques extérieures f^ε et des forces surfaciques extérieures g^ε , et rappelons l'énergie élastique non linéaire

$$\mathcal{E}_{F^\varepsilon}(u^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\lambda}{2} (E_{kk}(u^\varepsilon))^2 + \mu (E_{kl}(u)E_{lk}(u^\varepsilon)) - f_i^\varepsilon u_i^\varepsilon - \int_{\omega \times \{\varepsilon\}} g_i^\varepsilon u_i^\varepsilon + \int_{\omega \times \{-\varepsilon\}} g_i^\varepsilon u_i^\varepsilon \quad (4.41)$$

où

$$E_{ij}(w) = \frac{1}{2}(\partial_i w_j + \partial_j w_i + \partial_i w_k \partial_j w_k)$$

Ici nous avons utilisé la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Nous sommes intéressés par les quantités "rescalées" définies sur $\Omega = \omega \times (-1, 1)$, et nous notons $u, F = (f, g)$ les quantités définies sur Ω et $u^\varepsilon, F^\varepsilon = (f^\varepsilon, g^\varepsilon)$ les quantités correspondantes définies sur Ω^ε et reliées par

$$\begin{aligned} u_\alpha^\varepsilon &= \varepsilon^2 u_\alpha & f_\alpha^\varepsilon &= \varepsilon^2 f_\alpha & g_\alpha^\varepsilon &= \varepsilon^3 g_\alpha \\ u_3^\varepsilon &= \varepsilon u_3 & f_3^\varepsilon &= \varepsilon^3 f_3 & g_3^\varepsilon &= \varepsilon^4 g_3 \end{aligned} \quad (4.42)$$

où les quantités indexées par ε sont évaluées au point $x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \Omega^\varepsilon$ et les quantités sans indice ε sont évaluées au point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Les indices grecs prennent les valeurs 1, 2. Nous renvoyons au livre de Ciarlet [71] pour une justification physique de ces lois d'échelles en ε .

Nous voyons que u^ε est formellement un point critique de l'énergie $\mathcal{E}_{F^\varepsilon}$ si et seulement si u satisfait les équations d'Euler-Lagrange que nous notons sous forme compacte

$$\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (4.43)$$

où \mathcal{A}^ε est un opérateur différentiel quasilinéaire incorporant les conditions non linéaires aux bords.

Nous rappelons les développements asymptotiques formels :

Théorème (Ciarlet [71])

Toute solution de (4.43) converge formellement vers une fonction u^0 donnée par

$$u^0 = \begin{cases} u_\alpha^0 = \zeta_\alpha(x') - x_3 \partial_\alpha \zeta_3(x') \\ u_3^0 = \zeta_3(x') \end{cases} \quad (4.44)$$

où $x' = (x_1, x_2)$ et ζ est la solution de l'équation non linéaire des plaques sur ω :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_\beta n_{\alpha\beta}(\zeta) = h_\alpha \\ \frac{8\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \Delta^2 \zeta_3 - \partial_\beta (n_{\alpha\beta}(\zeta) \partial_\alpha \zeta_3) = h_3 \\ \text{où } n_{\alpha\beta}(\zeta) = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} E_{\gamma\gamma}^0(\zeta) \delta_{\alpha\beta} + 4\mu E_{\alpha\beta}^0(\zeta) \end{array} \right. \quad (4.45)$$

et

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}^0(\zeta) &= \frac{1}{2} (\partial_\alpha \zeta_\beta + \partial_\beta \zeta_\alpha + \partial_\alpha \zeta_3 \partial_\beta \zeta_3) \\ h_\alpha &= IF_\alpha, \quad h_3 = IF_3 + \partial_\alpha I(x_3 F_\alpha) \end{aligned}$$

où l'opérateur I est défini par

$$IF_i(x') = \int_{-1}^{+1} f_i(x', x_3) dx_3 + [g_i(x', x_3)]_{x_3=-1}^{x_3=+1}$$

Toute fonction u^0 telle que définie dans le théorème précédent sera appelée une solution de l'équation

$$\mathcal{A}^0(u^0) = F \quad \text{sur } \Omega \quad (4.46)$$

pour conserver le même type de notations.

En particulier l'existence d'une telle solution demande formellement que les conditions d'équilibre suivantes soient remplies

$$\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g = 0 \quad (4.47)$$

De plus la solution u est définie à addition d'une constante près sur chacune de ses composantes. Nous obtenons formellement une unique solution si nous imposons la condition de normalisation suivante

$$\int_{\Omega} u = 0 \quad (4.48)$$

Notations

Pour une fonction h nous notons $D^l h$ l'ensemble de toutes les dérivées de h jusqu'à l'ordre $l \in \mathbb{N}$: $D^l h = \{\partial_1^{l_1} \partial_2^{l_2} \partial_3^{l_3} h\}_{l_i \geq 0, i=1,2,3, l_1+l_2+l_3=l}$ et $D_T^l h = \{\partial_1^{l_1} \partial_2^{l_2} h\}_{l_\alpha \geq 0, l_1+l_2=l}$. Pour $k \geq 0$, nous disons que $F = (f, g) \in H^k$ si et seulement si $f \in H^k(\Omega)$ et $g \in H^k(\partial\Omega)$ et nous définissons les normes correspondantes (ce choix n'est pas optimal)

$$|F|_{H^k} = \sum_{l=0}^k |D^l f|_{L^2(\Omega)} + |D_T^l g|_{L^2(\partial\Omega)}$$

Nous définissons

$$\nabla^\varepsilon u = \left(\frac{e_{33}(u)}{\varepsilon^2}, \frac{e_{13}(u)}{\varepsilon}, \frac{e_{23}(u)}{\varepsilon}, e_{12}(u), e_{11}(u), e_{22}(u), e_{13}^-(u), e_{23}^-(u), e_{12}^-(u) \right)$$

où

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad \text{et} \quad e_{ij}^-(u) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j - \partial_j u_i) = -e_{ji}^-(u)$$

De plus étant donnée une fonction u^0 , nous notons $u^2 = u^2[u^0]$ la fonction

$$u^2[u^0] = \begin{cases} u_\alpha^2 = 0 \\ u_3^2 = T(e_{33}(u^2)) \end{cases}$$

où $e_{33}(u^2)$ est donné par :

$$e_{33}(u^2) = - \left(E_{33}^2(u^0) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} E_{\beta\beta}^0(u^0) \right) \quad (4.49)$$

$$E_{ij}^0(u) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_3 \partial_j u_3), \quad E_{ij}^2(u) = \frac{1}{2} \partial_i u_\gamma \partial_j u_\gamma$$

et pour une fonction générale h :

$$Th = \int_0^{x_3} h(x', s) ds$$

Nous sommes maintenant en position pour énoncer précisément notre résultat principal

Théorème 4.15 (Convergence 3d-2d et estimation d'erreur)

Il existe $\varepsilon_0, R_0, M > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ et tout F satisfaisant la condition d'équilibre (4.47) tel que $|F|_{H^4} < R_0$, il existe une solution $u \in H^3(\Omega)$ de

$$\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F$$

parmi les solutions satisfaisant la condition de normalisation (4.48). De plus si nous notons u^0 la solution pour $\varepsilon = 0$, et $v = u^0 + \varepsilon^2 u^2[u^0]$, alors nous avons

$$|\nabla^\varepsilon(u - v)|_{H^2(\Omega)} \leq \varepsilon M \quad (4.50)$$

Pour finir toute solution satisfaisant (4.50) est unique modulo la normalisation (4.48).

L'estimation (4.50) est obtenue via la méthode des translations de Nirenberg (cf. Brézis [359]) et est basée sur l'inégalité de Korn.

Remarque 4.16 *Remarquons que notre méthode d'inversion singulière ne permet pas d'empêcher le phénomène classique de perte de régularité : ici on demande que les forces soient bornées dans une norme bien plus forte que la norme naturelle qui correspondrait à deux crans de régularité de moins que la régularité de solution. C'est aussi la raison pour laquelle nous n'avons pas cherché à optimiser la régularité à avoir sur F et u .*

La preuve du théorème ci-dessus repose essentiellement sur les deux propositions suivantes où on note

$$K_M^\varepsilon(F) = \left\{ u \in H^3(\Omega), \quad |\nabla^\varepsilon(u - v)|_{H^2(\Omega)} \leq \varepsilon M \right\}$$

où $v = u^0 + \varepsilon^2 u^2[u^0]$ pour u^0 solution de $\mathcal{A}^0(u^0) = F$ avec $|F|_{H^4} < R_0$.

Proposition 4.17 (Coercivité)

Il existe $\varepsilon'_0 = \varepsilon'_0(M, R_0) > 0$ et $c > 0$ tels que pour tout $|F|_{H^4} < R_0$, si $u \in K_M^\varepsilon(F)$ avec $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$, alors

$$\forall w \in H^1(\Omega), \quad (D_u \mathcal{A}^\varepsilon(u) \cdot w, w) \geq c |\nabla^\varepsilon w|_{L^2(\Omega)}^2$$

Pour obtenir cette estimation, une borne L^∞ sur ∇u est nécessaire dans notre approche, c'est la raison pour laquelle nous travaillons avec $u \in H^3(\Omega)$. Par ailleurs notre estimation a priori est la suivante

Proposition 4.18 (Estimation a priori)

Il existe $M > 0$ et $\varepsilon_0 < \varepsilon'_0(M, R_0)$ tels que si $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ alors pour tout $|F|_{H^4} < R_0$:

$$(\mathcal{A}^\varepsilon(u) = F \quad \text{et} \quad u \in K_M^\varepsilon(F)) \implies (u \in K_{M/2}^\varepsilon(F))$$

Pour finir citons le travail remarquable et très récent de Friesecke, James et Müller [396], où par une méthode complètement différente (basée sur la preuve d'un lemme de rigidité fondamental, sorte d'inégalité de Korn non linéaire), ces auteurs prouvent un résultat de Γ -convergence justifiant la théorie de Kirchhoff-love non linéaire.

4.7 Quelques remarques sur l'inversibilité asymptotique du linéarisé de l'élasticité non linéaire [24]

Résumé

Dans cette section nous nous intéressons aux propriétés d'inversibilité du linéarisé des équations de l'élasticité non linéaire dans le cas d'une poutre mince d'épaisseur 2ε et périodique dans son autre direction. Nous montrons, d'une part formellement, que pour des compressions de la poutre dans le sens de l'épaisseur correspondant à des faibles déformations en $O(\varepsilon^2)$, il y a pourtant flambement de la structure. Cela montre en particulier que l'ensemble d'inversibilité du linéarisé est ε -dépendant. D'autre part nous étudions pour une poutre infinie $\mathbb{R} \times (-1, 1)$, les solutions correspondant aux équations de l'élasticité linéaire classique, dont les coefficients sont légèrement perturbés par un petit paramètre δ . Nous prouvons rigoureusement sur cet exemple, que pour $\delta < 0$ (ce qui correspond au linéarisé du problème non linéaire avec compression dans le sens de l'épaisseur), on obtient des solutions périodiques oscillantes dans le sens de la longueur de la poutre et de période de l'ordre de $1/\sqrt{-\delta}$. Cette "instabilité" s'interprète là encore comme une perte d'inversibilité du linéarisé du problème initial.

Nous étudions une poutre bidimensionnelle $\Omega^\varepsilon = I \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ d'épaisseur 2ε , et supposée périodique dans son autre direction $I = \mathbb{R}/(2\pi L\mathbf{Z})$. On considère l'énergie

$$\mathcal{E}(u^\varepsilon) = \mathcal{E}_0(u^\varepsilon) + \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon u_i^\varepsilon - \int_{\partial\Omega^\varepsilon} g_i^\varepsilon u_i^\varepsilon$$

où

$$\mathcal{E}_0(u^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\lambda}{2} E_{ii}^\varepsilon E_{jj}^\varepsilon + \mu E_{ij}^\varepsilon E_{ij}^\varepsilon$$

où les indices i, j prennent les valeurs dans $\{1, 2\}$, et nous avons utilisé la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. De plus on note $x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon)$, et on a

$$E_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_i^\varepsilon u_j^\varepsilon + \partial_j^\varepsilon u_i^\varepsilon + \partial_i^\varepsilon u_k^\varepsilon \partial_j^\varepsilon u_k^\varepsilon)$$

Nous nous intéressons au cas particulier

$$f_i^\varepsilon = 0, \quad g_1^\varepsilon = 0, \quad g_2^\varepsilon = \pm(\lambda + 2\mu)\delta\varepsilon^2 \quad \text{sur } I \times \{\pm\varepsilon\}$$

Nous prouvons formellement :

Théorème 4.19 (Limite formelle de l'énergie à $\varepsilon = 0$)

Formellement le minimiseur local u^ε de \mathcal{E} est tel que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} u_1^\varepsilon(x_1, \varepsilon x_2) \\ \frac{1}{\varepsilon} u_2^\varepsilon(x_1, \varepsilon x_2) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \zeta_1(x_1) - x_2 \partial_1 \zeta_2(x_1) \\ \zeta_2(x_1) \end{pmatrix}$$

où $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ minimise l'énergie suivante

$$\mathcal{E}_\delta^0(\zeta) = \int_I \left\{ \left(\zeta_1' + \frac{(\zeta_2')^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} (\zeta_2'')^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \delta (\zeta_2')^2 \right\}$$

Il est alors facile de prouver rigoureusement que

Théorème 4.20 (Flambement par compression suivant l'épaisseur)

Soit $V = H^1(I) \times H^2(I)$. L'infimum de \mathcal{E}_δ^0 est atteint exactement par les fonctions suivantes (uniques à adition de constantes près)

$$\zeta = 0 \quad \text{si } \delta > -\frac{1}{c_3 L^2}$$

et

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_1(x_1) = -\frac{L}{2} \sqrt{c_2 \left(\delta + \frac{1}{c_3 L^2} \right)^-} \sin\left(\frac{2x_1}{L}\right) \\ \zeta_2(x_1) = 2L \sqrt{c_2 \left(\delta + \frac{1}{c_3 L^2} \right)^-} \sin\left(\frac{x_1}{L}\right) \end{cases} \quad \text{si } \delta \leq -\frac{1}{c_3 L^2}$$

où $c_3^{-1} = \frac{2\mu}{3(\lambda+2\mu)}$ et $c_2 = \frac{\lambda+3\mu}{2\mu}$.

Nous voyons donc, en revenant aux coordonnées d'origine, qu'un flambement se produit si $\partial_2^\varepsilon u_2^\varepsilon$ atteint la valeur

$$(\lambda + 2\mu)\delta\varepsilon^2 \quad \text{avec} \quad \delta < -\frac{1}{c_3 L^2} \quad (4.51)$$

Cela montre (au moins formellement, mais il n'est pas difficile de le rendre rigoureux), que le linéarisé du problème initial cesse d'être inversible si la condition (4.51) est satisfaite. Cela signifie en d'autres mots que l'énergie de l'élasticité non linéaire cesse d'être convexe sous la condition (4.51).

Ce résultat montre un fait essentiel : même après le changement de variables classique ramenant le problème sur un ouvert fixe, le domaine \mathcal{D}_ε sur lequel le linéarisé est inversible est ε -dépendant. Cette dépendance empêche en particulier toute application directe du théorème des fonctions implicites dans ce cadre-là (même du type Nash-Moser, cf. Paumier [456]) qui donnerait une solution à $\varepsilon > 0$ à partir du cas particulier $\varepsilon = 0$. En effet, à la limite $\varepsilon = 0$, l'ensemble \mathcal{D}_0 n'est plus un ouvert de l'espace des déplacements.

D'autre part nous étudions rigoureusement les solutions bornées du système suivant posé sur une poutre infinie $\Omega_\infty = \mathbb{R} \times (-1, 1)$:

$$L(\delta)v = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_\infty = \mathbb{R} \times (-1, 1) \quad (4.52)$$

qui s'écrit explicitement

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{11}v_1(\lambda + 2\mu + \lambda(\delta + \frac{\delta^2}{2})) + \partial_{12}v_2(\lambda + \mu)(1 + \delta) + \partial_{22}v_1(\mu + (\lambda + 2\mu)(\delta + \frac{\delta^2}{2})) = 0 \\ \partial_{11}v_2(\mu + (\lambda + 2\mu)(\delta + \frac{\delta^2}{2})) + \partial_{12}v_1(\lambda + \mu)(1 + \delta) + \partial_{22}v_2(\lambda + 2\mu)(1 + 3(\delta + \frac{\delta^2}{2})) = 0 \\ \partial_2v_1(\mu + (\lambda + 2\mu)(\delta + \frac{\delta^2}{2})) + \partial_1v_2\mu(1 + \delta) = 0 \\ \partial_2v_2(\lambda + 2\mu)(1 + 3(\delta + \frac{\delta^2}{2})) + \partial_1v_1\lambda(1 + \delta) = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur} \quad \Omega_\infty \quad (4.53)$$

Ce système est obtenu en prenant le linéarisé du problème non linéaire (en la solution particulière correspondant à une compression uniforme de la poutre suivant son épaisseur, et après changement de variables), et en ne conservant de ce linéarisé que la partie d'ordre zéro en ε .

Alors nous prouvons rigoureusement

Théorème 4.21 (Solutions périodiques dans le noyau du linéarisé)

Pour $\delta < 0$ et $|\delta|$ suffisamment petit, il existe des solutions x_1 -périodiques non constantes de (4.52) de fréquence

$$\xi^2 = -\frac{3(\lambda + 2\mu)}{2\mu}\delta(1 + o(1))$$

Au contraire pour $\delta \geq 0$ avec $|\delta|$ suffisamment petit, les seules solutions bornées de (4.52) sont constantes.

Ce résultat est intéressant d'une part à cause de ses liens avec les remarques qui précèdent. En particulier en posant $\xi = \frac{1}{L}$, on retrouve la valeur critique de $\partial_2^\varepsilon u_2^\varepsilon$ pour laquelle le linéarisé cesse d'être inversible.

Ce résultat est aussi intéressant car il fournit un exemple (sur un ouvert non borné) où la dimension du noyau d'un opérateur augmente par perturbation (ce qui est évidemment impossible sur les ouverts bornés). Ce résultat fût aussi remarqué dans un cadre différent, par Nirenberg et Walker [453] pour le cas d'un système sur \mathbb{R}^2 dans des espaces de Sobolev à poids.

4.8 Perspectives

Au cours de mon travail, j'ai en particulier mis en évidence un nouveau modèle de plaques en élasticité linéaire : le modèle de Kirchhoff-Love d'ordre supérieur. Celui-ci repose sur une étude approfondie du noyau de l'opérateur d'élasticité linéaire. Cette approche ouvre, me semble-t-il, une direction de recherche particulièrement intéressante et potentiellement très fructueuse. Il semble ainsi possible de généraliser ce résultat à nombreuses autres situations, telles que le cas des poutres droites, les arcs courbes, les coques elliptiques et d'examiner la situation dans le cas de coques non-elliptiques, le cas de l'élasticité homogène anisotrope, les problèmes en élasticité non linéaire, ... Il est aussi intéressant de regarder les problèmes d'homogénéisation et d'essayer d'en tirer les conséquences.

Je suis aussi très intéressé par les implications numériques. Du point de vue de l'analyse, le modèle de Kirchhoff-Love d'ordre supérieur fournit une solution plus proche de la solution tridimensionnelle que les modèles précédents. Cela devrait aussi se traduire numériquement par un gain en précision numérique que j'aimerais étudier.

J'aimerais aussi étudier plus finement les problèmes de couches limites qui ne sont pas contenus dans le modèle que je propose pour les plaques. Une étude dans cette direction devrait permettre d'incorporer les couches limites au modèle.

J'ai par ailleurs été amené à développer une nouvelle méthode d'inversion singulière afin d'obtenir une estimation d'erreur en élasticité non linéaire pour une plaque avec conditions périodiques. Cette méthode d'une portée générale serait intéressante à diffuser et à appliquer à bien d'autres situations où à la fois le théorème d'inversion locale et les approches énergétiques sont insuffisants.

Il me semble en particulier intéressant d'étendre cette méthode aux cas des plaques en élasticité non linéaire avec des conditions aux bords plus naturelles, et ce en gérant les couches limites alors inévitables.

4.9 Bibliographie complémentaire

Les modèles de dimension réduite décrivant des arcs ou des plaques ont une origine assez ancienne. On peut ainsi citer par exemple Euler [392], Kirchhoff [416], Love [431].

De très nombreux travaux ont été réalisés en élasticité linéaire. Citons ainsi Ciarlet, Destuynder [371], Ciarlet, Lods [372], Ciarlet, Lods, Miara [373, 374], Ciarlet, Miara [375] Destuynder [388, 389, 387], Dauge, Gruais [379, 380], Nitsche [454], Sanchez-Palencia [461, 462, 463], Mardare [433], Miara, Sanchez-Palencia [436], Miara, Valente [437], Slicaru [469], Paumier [457], Paumier, Raoult [459], Destuynder [390, 386], Babuska, Schwab [356], Dauge, Djurdjevic, Rössle [385], Morgenstern [444].

La théorie des perturbations singulières est un outil proche dans l'esprit des questions de réduction de dimensions ; citons Lions [429], Kozlov, Maz'ya, Schwab, C. [417], Vogelius, Babuska [484], Hill, Arrigo [410], Libai, Simmonds [428].

Les problèmes de couches limites ont aussi été très étudiés. Citons entre autres Schwab [465, 466], Arnold, Falk [354], Dauge, Gruais [381, 382], Dauge, Gruais, Rössle [383, 384].

Le Principe de Saint-Venant apparait naturellement dans les problèmes d'élasticité, Toupin [474] ; les questions d'homogénéisation sont aussi très reliées, Caillerie [361].

Par ailleurs des études ont été effectuées sur le contrôle des plaques, comme le travail de Bourquin, Schwab [357] ; des questions en plasticité ont été résolues sous un angle mathématique entre autre par Temam [473].

Une partie de notre approche repose sur la théorie de la régularité elliptique, dont nous rappelons les contributions de Amrouche, Girault, Giroire [348], Amrouche [349], Agmon, Douglis, Nirenberg [346, 347], Campanato [363], Chen, Wu [365], Ciarlet [367, 371, 366, 369, 368, 370], Galdi [397], Giaquinta [402, 403], Gilbarg, Trudinger [404], Hörmander [411], Krilov [422], Mielke [439, 440, 441, 442, 443], Morrey [445, 446], Safonov [460], Schechter [464], Simon [468], Trudinger [476, 477].

Les problèmes dans les ouverts singuliers ont été en particulier regardés par Kondratiev, Oleinik [420], Kozlov, Maz'ya, Schwab [421].

En élasticité non linéaire, il existe de nombreux travaux, dont ceux de Antman [350, 351, 352], Anzelloti, Baldo, Percivale [353], Coutand [377], Fox, Raoult, Simo [394, 395], Friesecke, James, Müller [396], John [412, 413, 414, 415], Paumier [456], Fife [393], Genevey [400], Guidugli [408], Le Dret, Raoult [424, 425, 426], Lods, Miara [430], Miara [438], Stoker [470, 471], Valent [478, 479, 480, 481, 482, 483].

Plus généralement les travaux suivants sur les EDP non linéaires sont utiles pour les question d'élasticité non linéaire : Hamilton [409], Nirenberg [451, 452], Brezis, Nirenberg [360], Struwe [472].

Les questions numériques font biensûr l'objet de recherches intensives en élasticité ; citons entre autres Chapelle [364], Paumier, Chenais [458], Le Tallec [427], Brenner, Scott [358], Destuynder, Métivet [391].

Enfin citons la théorie de la représentation des groupes Guichardet [407], qui m'a originellement permis de déterminer explicitement le noyau de l'opérateur d'élasticité linéaire.

5 Applications en supraconductivité, chimie quantique et dynamique moléculaire

Nous donnons une brève introduction aux questions que nous avons abordées sur les supraconducteurs. Cette introduction est suivie de deux sous-sections sur les supraconducteurs, puis d'une sous-section sur un problème de chimie quantique et enfin d'une sous-section sur des algorithmes en dynamique moléculaire.

Nous considérons un matériau supraconducteur situé dans une région Σ de l'espace \mathbb{R}^3 . Ce matériau est décrit par sa fonction d'onde macroscopique complexe $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$. Le module de ψ est physiquement compris entre deux valeurs limites qui correspondent à des phases parfaites : $|\psi| = 0$ (matériau normal, i.e. non supraconducteur) et $|\psi| = 1$ (matériau supraconducteur parfait). Les transitions entre les deux phases (normales et supraconductrices, se font sur une distance caractéristique de $\frac{1}{\kappa}$ où $\kappa > 0$ est le paramètre de Ginzburg-Landau qui dépend du matériau supraconducteur choisi.

On suppose que ce matériau supraconducteur baigne dans un champ magnétique H défini sur tout l'espace \mathbb{R}^3 qui est lui-même supposé égal à une valeur H_0 à l'infini. En dehors du supraconducteur, ce champ magnétique obéit aux équations de Maxwell. Pour les petits champs H_0 , le matériau supraconducteur a un comportement d'éviction du champ magnétique, appelé l'effet Meissner. Cela signifie qu'à l'intérieur du supraconducteur, le champ magnétique est faible $H \simeq 0$ (sans être rigoureusement égal à zéro) et la fonction d'onde ψ a un module très proche de 1. En fait le champ magnétique décroît exponentiellement vite vers zéro à partir de sa valeur non nulle sur le bord du supraconducteur. La distance caractéristique de cette décroissance est la longueur de London, fixée égale à 1 dans les unités dans lesquelles nous travaillons ici. Cette longueur de London caractéristique permet l'existence de courants supraconducteurs $J = \text{rot } H$ localisés essentiellement à la surface $\partial\Sigma$ du matériau. Physiquement ces courants restent inférieurs à une valeur critique J_c qui dans le modèle que l'on considère tend vers une constante égale à $\sqrt{\frac{4}{27}}$ lorsque κ tend vers l'infini.

Les inconnues du problème ($\psi, H = \text{rot } A$), où A est le potentiel magnétique, sont supposées minimiser l'énergie totale du système (supraconducteur + champ magnétique) :

$$\mathcal{E} = \int_{\Sigma} \left| \left(\frac{1}{\kappa} \nabla - iA \right) \psi \right|^2 + \frac{(|\psi|^2 - 1)^2}{2} + |\text{rot } A - H_0|^2 dV + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma} |\text{rot } A - H_0|^2 dV \quad (5.54)$$

Cette énergie est en particulier invariante par changement de jauge :

$$\begin{cases} \psi \longrightarrow \psi e^{i\chi} \\ A \longrightarrow A - \frac{1}{\kappa} \nabla \chi \end{cases}$$

Disons quelques mots d'autres comportements possibles du supraconducteur. Lorsque le champ magnétique imposé H_0 est plus grand qu'un certain champ critique (qui dépend de Σ et κ), l'effet supraconducteur disparaît, c'est-à-dire que ψ est rigoureusement

nul dans le supraconducteur, et le champ magnétique pénètre le matériau comme s'il n'y avait pas de matériau. On dit que le matériau redevient normal.

Pour les supraconducteurs de type I (définis par un κ inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$), seuls les deux états mentionnés (Meissner et normal) sont possibles. En revanche, pour les supraconducteurs de type II (définis par un κ supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$), il existe un troisième état, appelé état mixte, dans lequel coexistent des filaments de phase normale (appelés vortex) entourés de phase supraconductrice. La fonction d'onde ψ vaut rigoureusement zéro sur le vortex, et a une phase non nulle en tournant autour du vortex. Ces vortex sont créés sur le bord du supraconducteur, puis pénètrent à l'intérieur du matériau et se regroupent (à l'équilibre) dans une région intérieure, appelée région mixte.

Nous présentons maintenant trois modèles que nous avons étudiés, tous issus de la formulation (5.54) dans divers cas limites. Pour chacun de ces modèles, on suppose que l'on connaît sur le bord du supraconducteur, la composante tangente du champ magnétique (qui est continue au passage de l'interface $\partial\Sigma$).

Solution de Meissner à κ fini en 2D

On considère le cas d'un matériau ayant la forme d'un cylindre infini $\Sigma = \Omega \times \mathbb{R}$, d'axe parallèle au champ $H_0 = (0, 0, h_0)$ imposé à l'infini. Le problème se ramène alors à la minimisation de l'énergie (5.54) sur la section Ω du cylindre. On choisit une jauge de sorte que la fonction d'onde soit à valeurs réelles $\psi = |\psi| = f > 0$. Pour ce choix particulier de jauge, le couple (ψ, A) est noté (f, Q) avec $Q = (Q_1, Q_2)$. Les fonctions réelles (f, Q_1, Q_2) satisfont alors les équations (cf. Bonnet, Chapman, Monneau [3, 4]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\kappa^2} \Delta f = f(f^2 + Q^2 - 1) \\ -\text{rot}(\text{rot} Q) = fQ \\ \frac{\partial_n f}{\kappa^2} = 0 \\ \text{rot} Q = H_0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \Omega \\ \\ \text{sur } \partial\Omega \end{array} \quad (5.55)$$

où ici le champ magnétique est $H = (0, 0, h)$ avec $h = \text{rot} Q = \partial_1 Q_2 - \partial_2 Q_1$, et $\text{rot} h = -\partial_2 h e_1 + \partial_1 h e_2$.

Solution de Meissner à $\kappa = +\infty$, en 3D

En faisant formellement $\kappa = +\infty$ dans les équations (5.55), on obtient un modèle limite 2D, dans lequel on peut éliminer la fonction f et tout réexprimer en fonction de $h = \text{rot} Q$ (c'est le modèle de Berestycki, Bonnet, Chapman [488]). En 3D, on peut faire le même raisonnement (cf. Monneau [5]). Nous obtenons ainsi que le champ magnétique $H = (h_1, h_2, h_3)$ est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{rot}(F(|\text{rot} H|^2)\text{rot} H) - H = 0 \text{ sur } \Sigma \\ H_T = H_T^{ext} \text{ sur } \partial\Sigma \end{array} \right. \quad (5.56)$$

où H_T est la composante tangentielle du champ magnétique sur le bord $\partial\Sigma$, et $F(q)$ est la fonction définie implicitement par la relation $(1 - q^2 F^2)F = 1$, et $F(0) = 1$. Ici seule

la composante tangentielle du champs magnétique est imposée, car le fait que H soit à divergence nulle découle des équations (5.56).

Problème à frontière libre $\kappa = +\infty$ en 2D

En 2D, en faisant formellement $\kappa = +\infty$ dans les équations (5.55), on obtient un modèle similaire au système (5.56) dans lequel $H = (0, 0, h)$. Signalons cependant que la solution de Meissner, n'est pas la plus stable énergétiquement à κ grand. Physiquement, des vortex pénètrent dans le matériau et se regroupent dans une région à l'intérieur du supraconducteur. La distance moyenne entre deux vortex est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$. Dans la limite où κ tend vers l'infini, on obtient une région "homogénéisée" où le champ magnétique h est constant, disons égal à h_1 . Le champ h est alors solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(F(|\nabla h|^2)\nabla h) - h = 0 & \text{sur } \Omega \setminus \bar{\omega} \\ h = h_0 & \text{sur } \partial\Omega \\ h = h_1 & \text{sur } \partial\omega \\ \frac{\partial h}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (5.57)$$

Dans ce problème il y a deux inconnues : l'application définie sur $\Omega \setminus \omega$, et l'ouvert $\omega \subset \Omega$. Ce problème est un problème de l'obstacle et son étude a été présentée dans la section 2.

5.1 Etude d'un modèle tridimensionnel de supraconducteurs pour une valeur infinie du paramètre de Ginzburg-Landau [5]

Résumé

Dans cette section nous étudions un modèle tridimensionnel de supraconducteur baigné dans un champ magnétique extérieur. Pour des valeurs infinies du paramètre de Ginzburg-Landau, nous présentons des résultats d'existence et d'unicité des solutions de Meissner pour des champs magnétiques extérieurs faibles, et de non-existence pour des champs forts. De plus nous montrons que le courant électrique est maximal sur le bord du matériau et que sa valeur sur le bord détermine complètement le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur.

Nous nous intéressons aux solutions $H = (h_1, h_2, h_3)$ de l'équation (5.56) que nous rappelons

$$\begin{cases} -\operatorname{rot}(F(|\operatorname{rot} H|^2)\operatorname{rot} H) - H = 0 & \text{sur } \Sigma \\ H_T = H_T^{ext} & \text{sur } \partial\Sigma \end{cases} \quad (5.58)$$

Nous obtenons des résultats dans les espaces de Hölder $C^{2+\alpha}$:

Théorème 5.1 (Existence, unicité, non-existence du champ magnétique)

i) Il existe une constante $\varepsilon > 0$, telle que si $|H_T^{ext}|_{C^{2+\alpha}(\partial\Sigma)} < \varepsilon$, alors il existe une unique

fonction $H \in C^{2+\alpha}(\overline{\Sigma})$ solution de (5.58).

ii) Soit $B_T \in C^{2+\alpha}(\partial\Sigma)$. Alors il n'y a pas de solution $H \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ de (5.58) avec la condition au bord $H_T^{ext} = \mu B_T$ sur $\partial\Sigma$ pour $\mu > 0$ suffisamment grand.

Nous prouvons aussi les propriétés suivantes du courant.

Théorème 5.2 (Propriétés du courant)

Considérons une solution $H \in C^{2+\alpha}(\overline{\Sigma})$ de (5.58) et définissons le courant par

$$J = \text{rot } H$$

i) Alors par définition $J^2 < \frac{4}{27}$ sur $\overline{\Sigma}$. De plus J^2 est maximal sur $\partial\Sigma$.

ii) Soit $J^{ext} \in C^{2+\alpha}(\partial\Sigma)$. Alors il y a au plus un champ magnétique H solution de (5.58) telle que $\text{rot } H = J^{ext}$ sur $\partial\Sigma$.

5.2 Sur la convergence des minimiseurs locaux de l'énergie de Ginzburg-Landau dans la limite des hautes valeurs du paramètre de Ginzburg-Landau [3, 4]

Résumé

Dans cette section nous étudions un matériau supraconducteur ayant la forme d'un cylindre infini baigné dans un champ magnétique parallèle à l'axe du cylindre. Nous nous ramenons ainsi à un problème bidimensionnel posé sur la section du cylindre. Nous travaillons pour des valeurs finies (mais suffisamment grandes) du paramètre κ de Ginzburg-Landau. Pour un champ magnétique extérieur inférieur à une valeur critique indépendante de κ , nous montrons qu'il existe une solution de Meissner, et que lorsque κ tend vers $+\infty$, cette solution tend vers une limite.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec A. Bonnet et S.J. Chapman.

Nous étudions les solutions (f, Q) avec $Q = (Q_1, Q_2)$ des équations (5.55) que nous rappelons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\kappa^2} \Delta f = f(f^2 + Q^2 - 1) \\ -\text{rot}(\text{rot } Q) = fQ \\ \frac{\partial_n f}{\kappa^2} = 0 \\ \text{rot } Q = H_0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \Omega \\ \text{sur } \partial\Omega \end{array} \quad (5.59)$$

qui sont les équations d'Euler-Lagrange de

$$\mathcal{E}_\kappa(f, Q) = \int_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{\kappa^2} + f^2 Q^2 + \frac{(f^2 - 1)^2}{2} + |\text{rot } Q - h_0|^2 \quad (5.60)$$

Nous travaillons dans l'espace fonctionnel suivant

$$V = \{(f, Q) \in L^\infty(\Omega) \times (L^\infty(\Omega))^2, \quad \nabla f, \quad \text{rot } Q \in L^2(\Omega)\}$$

dont on considère le sous-ensemble fonctionnel suivant

$$\mathcal{K} = \left\{ (f, Q) \in V, \quad f^2 - Q^2 \geq \frac{1}{3} \right\}$$

sur lequel la fonctionnelle \mathcal{E}_κ est convexe.

Nous prouvons pour un ouvert Ω suffisamment régulier

Théorème 5.3 (Existence et unicité dans l'ensemble fonctionnel \mathcal{K})

Il existe un champ critique h_0^ tel que pour tout $h_0 \in (0, h_0^*)$, il existe $\kappa_0 = \kappa_0(h_0)$, de sorte que pour tout $\kappa > \kappa_0$, il existe une et une seule solution (f, Q) de (5.59) parmi celles appartenant au sous-ensemble fonctionnel \mathcal{K} .*

De plus nous prouvons

Théorème 5.4 (Borne supérieure du minimum d'énergie)

Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω telle que

$$\inf_{(f, Q) \in V} \mathcal{E}_\kappa(f, Q) \leq \frac{C(1 + h_0^2)}{\sqrt{\kappa}}$$

Ce résultat montre en particulier qu'étant donné un champs magnétique extérieur, les minimiseurs de Meissner ne sont pas des minimiseurs globaux de l'énergie \mathcal{E}_κ pour κ suffisamment grand.

Signalons que ce résultat a été affiné par Serfaty [504, 505].

5.3 Sur la décroissance exponentielle du champs électrique dans les métaux décrits par le modèle de Thomas-Fermi-von Weizsäcker [13]

Résumé

Dans cette section nous présentons l'étude d'un matériau décrit par le modèle de Thomas-Fermi-von Weizsäcker, et soumis à un champ électrique extérieur. Pour un champ électrique inférieur à un champ critique, nous montrons qu'il existe une solution ionisée stable. Pour cette solution nous prouvons que le champ électrique décroît exponentiellement vite en pénétrant dans le matériau.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec X. Blanc.

Nous considérons un cristal remplissant la région suivante

$$\mathbf{R}^2 \times [-1, 1],$$

composé de noyaux répartis sur le réseau

$$\varepsilon \mathbf{Z}^3 \cap (\mathbf{R}^2 \times [-1, 1])$$

et entouré d'un nuage d'électrons décrit par une densité électronique ρ . Le problème étant périodique en (x_1, x_2) , nous introduisons la cellule élémentaire (périodique)

$$\Gamma_\varepsilon = \mathbf{R}^3 / (\varepsilon \mathbf{Z}^2 \times \{0\})$$

La mesure représentant la distribution de charge des noyaux sur cette cellule est alors supposée égale à

$$m(x) = \sum_{k=-N}^N \varepsilon^3 \delta(x - k\varepsilon e_3).$$

Ici $2N+1$ est le nombre total de noyaux, et pour garantir $\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Gamma_\varepsilon} m = 2$, nous supposons pour simplifier que $\varepsilon = \frac{1}{N+\frac{1}{2}}$. On définit la fonction de Green sur la cellule Γ_ε par la solution de $-\Delta G_\varepsilon = \delta_0(x)$ choisie égale à

$$G_\varepsilon(x) = -\frac{1}{2\varepsilon^2}|x_3| + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \in \varepsilon \mathbf{Z}^2 \times \{0\}} \left(\frac{1}{|x-k|} - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] \times \{0\}} \frac{dy}{|x-y-k|} \right) + \frac{M}{\varepsilon}, \quad (5.61)$$

où la constante M est fixée (indépendamment de ε) de sorte que $G_\varepsilon(x) - \frac{1}{4\pi|x|} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. On suppose que le matériau est baigné dans un champ électrique E extérieur et uniforme. Ainsi le champ électrique total est donné par

$$E_{tot} = -\nabla \left(G_\varepsilon \star \left(\frac{m-\rho}{\varepsilon} \right) - Ex_3 \right) \quad (5.62)$$

où la convolution a lieu sur la cellule Γ_ε . On suppose de plus que la densité électronique ρ (définie sur Γ_ε) minimise l'énergie de Thomas-Fermi-von Weizsäcker (TFW) des films minces :

$$\mathcal{E}_\varepsilon(\rho) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon^4 |\nabla \sqrt{\rho}|^2 + \varepsilon^2 \rho^{\frac{5}{3}} + \rho \cdot G_\varepsilon \star \left(\frac{1}{2} \rho - m \right) + \varepsilon E x_3 \rho, \quad (5.63)$$

qui est strictement convexe sur le convexe K_λ défini pour $\lambda > 0$ par

$$K_\lambda = \left\{ \rho \geq 0, \quad \sqrt{\rho} \in H^1(\Gamma_\varepsilon), \quad |x_3| \rho \in L^1(\Gamma_\varepsilon), \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Gamma_\varepsilon} \rho = \lambda > 0 \right\}.$$

On prouve alors le

Théorème 5.5 (Cristal ionisé par le champ électrique extérieur)

Nous supposons que $0 \leq E < \frac{1}{\varepsilon}$. Nous posons alors

$$\lambda_c = (1 - \varepsilon E) \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Gamma_\varepsilon} m \right),$$

Nous avons

(i) Si $\lambda > \lambda_c$, alors $\inf_{K_\lambda} \mathcal{E}_\varepsilon = -\infty$.

(ii) Si $0 \leq \lambda \leq \lambda_c$, alors $\inf_{K_\lambda} \mathcal{E}_\varepsilon > -\infty$, et cette énergie admet un unique minimiseur $\rho_\lambda \in K_\lambda$.

Catto, Le Bris et Lions [514], ont montré qu'il existe une solution ρ_{per} périodique dans les trois directions de \mathbb{R}^3 , associée à une distribution de charges situées sur un réseau normalisé à \mathbf{Z}^3 . Ils ont pu associer simultanément une fonction ϕ_{per} périodique elle aussi, qui peut être interprétée comme un potentiel électrique. Nous prouvons alors le

Théorème 5.6 (Décroissance exponentielle du champ électrique dans le cristal)

Soit $0 \leq E < \frac{1}{\varepsilon}$ et $\lambda = \lambda_c$. Alors il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ (qui ne dépendent que d'une borne sur E et pas de ε) telles que la densité minimisante $\rho = \rho_{\lambda_c}$ et le champ électrique total E_{tot} (donné par l'équation (5.62)) satisfont :

$$\left. \begin{array}{l} |\rho(x) - \rho_{per}(\frac{x}{\varepsilon})| \\ |E_{tot}(x) + (\nabla\phi_{per}) (\frac{x}{\varepsilon})| \end{array} \right\} \leq C_1 e^{-C_2 \frac{d(x)}{\varepsilon}},$$

où $d(x) = d(x_3, [-1, 1]^c)$ est la distance d'un point x du cristal au bord du cristal.

Nous donnons aussi un résultat similaire pour un problème purement unidimensionnel, plus simple et apparenté au modèle de Thomas-Fermi-von Weizsäcker. Nous montrons qu'on peut aussi retrouver des résultats similaires, mais plus faibles, par homogénéisation.

5.4 Une méthode de construction d'algorithmes réversibles conservant la mesure et son application en Dynamique Moléculaire [21]

Résumé

Dans cette section nous nous intéressons à des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) qui conservent une certaine mesure m . Nous présentons une méthode élémentaire pour construire des algorithmes qui tout en discrétisant l'EDO, conservent encore cette mesure m . Par ailleurs, nous montrons que l'algorithme GGMT, récemment introduit par Liu et Tuckerman en dynamique moléculaire, n'est pas mesure-invariant. Nous appliquons alors notre méthode et proposons un algorithme correspondant qui conserve la mesure.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec F. Legoll.

Nous nous intéressons à des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) de la forme générale suivante

$$\dot{X}_i = F_i(X_1, \dots, X_n), \quad i = 1, \dots, n \tag{5.64}$$

D'une façon générale, ces EDO admettent une mesure invariante m_X intrinsèque. Il est toujours possible d'effectuer des changements de variables sur les fonctions inconnues X_i , mais cela ne change pas les caractéristiques intrinsèques du système. Nous obtenons tout au plus différentes écritures équivalentes. Exploitant cette remarque, notre méthode consiste, lorsque cela est effectivement possible, à transformer explicitement (par changement de variables) l'équation (5.64), de façon à se ramener à la forme *normale* suivante

$$\dot{Y}_i = G_i(\check{Y}_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.65)$$

où

$$\check{Y}_i = (Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_n)$$

ne fait pas intervenir la variable Y_i . Cette forme particulière d'EDO a l'avantage de préserver automatiquement la mesure

$$m_Y = dY_1 \dots dY_n$$

qui est équivalente à m_X via le changement de variables.

Il est alors possible de construire un algorithme préservant *exactement* la mesure m_Y (d'où la conservation exacte de la mesure m_X d'origine), et ce grâce à une factorisation de Trotter des propagateurs de Liouville (cf. Tuckerman, Martyna [559]).

Illustration sur un exemple simple

Pour illustrer notre méthode, nous l'appliquons à un exemple simple, celui du thermostat de Nosé-Hoover [539]. Dans le cas le plus simple, il s'agit de considérer une particule qui aurait une dynamique classique (Hamiltonienne) et de la coupler avec un thermostat à la température T imposée, de façon à ce que la particule échantillonne l'espace des phases avec une distribution de Maxwell-Boltzmann à la température T . Le dynamique (EDO) est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= p \\ \dot{p} &= F(r) - p_\xi p \\ \dot{p}_\xi &= p^2 - kT \end{aligned} \quad (5.66)$$

Ici r est la position (pour simplifier on travaille en dimension 1), p l'impulsion de la particule, et p_ξ "l'impulsion du thermostat". Les forces $F(r)$ sont supposées dériver d'un potentiel $F(r) = -V'(r)$, et la masse de la particule a été normalisée à 1. La constante k est celle de Boltzmann.

Il est bien connu que (5.66) conserve la mesure suivante de type "Maxwell-Boltzmann"

$$m_1 = e^{-\frac{1}{kT} \left(\frac{p^2}{2} + \frac{p_\xi^2}{2} + V(r) \right)} dr dp dp_\xi$$

Il est habituel d'ajouter à ce système la variable ξ vérifiant

$$\dot{\xi} = p_\xi \quad (5.67)$$

de sorte que l'énergie et la mesure suivantes sont conservées

$$H' = \frac{p^2}{2} + \frac{p_\xi^2}{2} + V(r) + \xi kT$$

$$m_0 = e^\xi dr d\xi dp dp_\xi$$

Il existe de nombreux algorithmes sur cette exemple très simple, mais notre but est de présenter une façon systématique de construire un algorithme (et même plusieurs d'ailleurs différents de ceux déjà connus).

Nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\tilde{p} = e^\xi p$$

Ainsi le système (5.66)-(5.67) se réécrit pour les variables $(r, \xi, \tilde{p}, p_\xi)$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \tilde{p}e^{-\xi} \\ \dot{\tilde{p}} &= e^\xi F(r) \\ \dot{p}_\xi &= \tilde{p}^2 e^{-2\xi} - kT \\ \dot{\xi} &= p_\xi \end{aligned} \tag{5.68}$$

La mesure suivante

$$\tilde{m} = dr d\xi d\tilde{p} dp_\xi$$

est naturellement conservée. Nous considérons l'opérateur de Liouville

$$L = \dot{r}\partial_r + \dot{\tilde{p}}\partial_{\tilde{p}} + \dot{p}_\xi\partial_{p_\xi} + \dot{\xi}\partial_\xi$$

que nous écrivons

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

avec

$$\begin{aligned} L_1 &= \dot{\xi}\partial_\xi \\ L_2 &= \dot{\tilde{p}}\partial_{\tilde{p}} \\ L_3 &= \dot{r}\partial_r + \dot{p}_\xi\partial_{p_\xi} \end{aligned}$$

Utilisant la formule de Trotter pour des opérateurs généraux A et B

$$e^{\Delta t(A+B)} = e^{\frac{\Delta t}{2}B} e^{\Delta tA} e^{\frac{\Delta t}{2}B} + O(\Delta t^3) \tag{5.69}$$

nous obtenons 3! algorithmes possibles

$$e^{\frac{\Delta t}{2}L_a} e^{\frac{\Delta t}{2}L_b} e^{\Delta tL_c} e^{\frac{\Delta t}{2}L_b} e^{\frac{\Delta t}{2}L_a} = e^{\Delta tL_{eff}} \tag{5.70}$$

avec $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$. Bien sûr on a alors

$$e^{\Delta tL_{eff}} = e^{\Delta tL} + O(\Delta t^3) \tag{5.71}$$

Par exemple pour le choix de $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ on a l'algorithme suivant :

$$(1) \quad \xi \rightarrow \xi + \frac{1}{2}\Delta t \xi$$

$$(2) \quad \tilde{p} \rightarrow \tilde{p} + \frac{1}{2}\Delta t e^{\xi} F(r)$$

$$(3) \quad \begin{cases} r \rightarrow r + \Delta t \tilde{p} e^{-\xi} \\ p_{\xi} \rightarrow p_{\xi} + \Delta t (\tilde{p}^2 e^{-2\xi} - kT) \end{cases}$$

$$(2) \quad \tilde{p} \rightarrow \tilde{p} + \frac{1}{2}\Delta t e^{\xi} F(r)$$

$$(1) \quad \xi \rightarrow \xi + \frac{1}{2}\Delta t p_{\xi}$$

Cet algorithme conserve la mesure \tilde{m} , car chaque translation conserve exactement la mesure.

Remarquons que, comme tous les algorithmes qui existent en dynamique moléculaire, cet algorithme ne conserve pas exactement (mais seulement approximativement) l'énergie du système qui dans nos nouvelles variables est

$$\tilde{H}' = \frac{\tilde{p}^2}{2} e^{-2\xi} + \frac{p_{\xi}^2}{2} + V(r) + \xi kT$$

Pour un grand nombre de particules, la conservation de la mesure est beaucoup plus contraignante que celle de l'énergie, c'est pourquoi on préfère faire ce choix d'algorithmes préservant une mesure exactement, et l'énergie seulement approximativement.

Une application : Generalized Gaussian Moment Thermostatting

Liu et Tuckerman [530] ont proposés récemment une nouvelle dynamique appelée la dynamique "Generalized Gaussian Moment Thermostatting" (GGMT), qui est destinée à thermostatier un ensemble de particules, mais de façon plus efficace que la dynamique de Nosé-Hoover. Ils ont alors développé un algorithme dont il prétendent qu'il conserve bien la mesure numériquement, mais dont nous avons montré par ailleurs qu'il ne conserve pas exactement cette mesure. En appliquant notre méthode, nous avons alors reformulé cette dynamique sous forme *normale*, ce qui permet de générer très facilement un algorithme (et même plusieurs) rigoureusement mesure-invariants (cf. Monneau, Legoll [21], pour plus de détails). Des tests préliminaires de ce nouvel algorithme montrent qu'il donne de bons résultats même dans des cas où la mesure invariante testée est non triviale.

5.5 Perspectives

Je n'envisage pas (faute de temps) de poursuivre les recherches correspondant aux thèmes de cette dernière partie (supraconducteurs, dynamique moléculaire). Je signale simplement un problème, encore ouvert à ma connaissance, autour du modèle

de Thomas-Fermi-von Weizsäcker : il s'agit de prouver que la densité électronique se périodise exponentiellement vite en la distance par rapport au bord du cristal en pénétrant à l'intérieur d'un cristal parfaitement périodique, mais de taille finie. Ceci constituerait en particulier une extension naturelle et intéressante de résultats que j'ai prouvé avec X. Blanc sur un cas plus simple.

De façon indépendante, après avoir passé une période à prospecter sur de nouveaux thèmes, j'ai pu dégager deux directions de recherche qui me semblent particulièrement intéressantes.

La première direction de recherche concerne la théorie des dislocations, qui se situe entre le niveau atomique et le niveau macroscopique. Cette théorie constitue l'explication microscopique de la plasticité. Elle présente les dislocations comme des lignes de singularités en interaction avec le champ élastique. En ce sens cette théorie se rapproche du modèle de Ginzburg-Landau des supraconducteurs. Il me semble intéressant de revisiter les modèles existants de façon à bâtir sur des bases mathématiques solides une théorie statique et dynamique des dislocations auquel serait associé un volet numérique permettant des calculs effectifs "stables".

La deuxième direction de recherche que j'ai identifiée est la justification des modèles d'élasticité à partir de modèles microscopiques, tels que les interactions à deux corps. Le but est ici de justifier le modèle macroscopique sans autre hypothèse microscopique que la matière minimise son énergie globale. Cette justification est en particulier nécessaire pour ensuite établir une analyse numérique convenable du modèle complet. Le but serait alors d'en déduire les "lois" de couplage micro-macro dans le cas de la modélisation d'une petite zone microscopique entourée d'une zone elle-même décrite par un modèle macroscopique (cf. Monneau [33]). Ce type d'approche porte le nom de "Méthode Quasicontinue" dans la littérature (voir Tadmor, Ortiz, Phillips [572], Shenoy, Miller, Tadmor, Rodney, Phillips, Ortiz [573]).

5.6 Bibliographie complémentaire

Supraconducteurs

Le modèle de Ginzburg-Landau pour les supraconducteurs est présenté dans la littérature physique Ginzburg, Landau [497], De Gennes [494], Du, Gunzburger, Petersen [495].

De nombreuses études mathématiques ont été menées. Citons les travaux de Aftalion [485, 486, 487] Berestycki, Bonnet, Chapman [488], Béthuel, Brézis, Helein [489], Bolley, Helffer [490], Chapman [491], Chapman, Howison, Ockendon [492], Chapman, Rubinstein, Schatzman [493] Lin [499], Sandier, Serfaty [501, 502], Serfaty [503, 504, 505].

Pour des compléments sur les méthodes d'analyse citons Dautray, Lions [496], Girault, Raviard [498], Morrey [500].

Thomas-Fermi-von-Weizsäcker

Plusieurs travaux existent sur le modèle de Thomas-Fermi-von-Weizsäcker. Citons entre autres Benguria, Brézis, Lieb [510], Benguria, Lieb [511], Blanc, Le Bris [512], Catto, Le Bris, Lions [515], Lieb, Narnhofer [516], Parr, Yang [518], Solovej [519]. En complément sur les équations semi-linéaires citons Brézis [513].

L'effet d'un champ électrique sur un matériau a été regardé d'un point de vue mathématique en particulier par Avron, Herbst [507], Balbás, Barranco, Garcias, Mañanes, Navarro, Rubio, Serra [508], Bauer, Cornolti, Macchi, Pitrelli [509].

Pour les effets d'homogénéisation, citons Allaire [506], Nguetseng [517].

Dynamique Moléculaire

Citons Ercolessi, Adams [523] comme un des premiers travaux reliant l'échelle atomique à l'échelle planétaire, et basé sur le transfert d'information d'une échelle à une autre. Pour un panorama des problèmes en dynamique moléculaire voir Tuckerman, Martyna [559, 560].

Sur les dynamiques à température constante citons Andersen, Bonerup, Hansen [520], Hoover [525], Nosé [539], Jang, Voth [528, 529], Liu, Tuckerman [530], Martyna, Klein, Tuckerman [533]; voir aussi le travail Zhou, Stuart, Berne [571] pour un état hors d'équilibre thermodynamique. Pour les calculs à pression constante, citons Martonak, Molteni, Parrinello [531], Procacci, Berne [542, 543].

Sur les algorithmes conservant la mesure, citons Martyna, Tuckerman [534, 535], Martyna, Tuckerman, Tobias, Klein [536], Matubayasi, Nakahara [537], Toxvaerd [551], Tuckerman [552]. Sur la méthode des pas de temps multiples, citons Humphreys, Friesner, Berne [526], Tuckerman, Berne [553, 554], Tuckerman, Berne, Martyna [555, 556, 557], Tuckerman, Berne, Rossi [558], Tuckerman, Martyna, Berne [561], Tuckerman, Parinello [566, 567], Stuart, Zhou, Berne [550]. Parmi les algorithmes basés sur l'intégrale de chemins, citons Martyna, Hughes, Tuckerman [532], Tuckerman, Martyna, Klein, Berne [562], Tuckerman, Marx, Klein, Parinello [563], Tuckerman, von Rosenvinge, Hughes, Martyna [569], Cao, Martyna [521], Sanz-Serna, Calvo [547], Hairer, Lubich, Wanner [524].

Sur le traitement des forces à longue ou très courte distance, citons Nakano [538], Payne, Teter, Allan, Arias, Joannopoulos [540], Challacombe, White, Head-Gordon [522], Hutter, Tuckerman, Parinello [527]. Sur le calcul de constantes élastiques, citons Parri-

nello, Rahman [541], Ray, Moody, Rahman [544].

Citons enfin d'autres applications variées en dynamique moléculaire : Ryckaert, Ariedi, Melchionna [545], Samuelson, Martyna [546], Schlick, Figueroa, Mezei [548], Smargiassi [549], Tuckerman, Mundy, Klein [564], Tuckerman, Mundy, Martyna [565], Tuckerman, Ungar, von Rosenvinge, Klein [568], Tuckerman, Yarne, Samuelson, Hughes, Martyna [570].

Références

[1] Liste de publications

- *Articles publiés ou acceptés*

- [2] (AVEC A. BONNET), *Distribution of vortices in a type II superconductor as a free boundary problem : Existence and regularity via Nash-Moser theory*, Interfaces and Free Boundaries **2**, 181-200 (2000).
- [3] (AVEC A. BONNET ET S.J. CHAPMAN), *Convergence of Meissner minimisers of the Ginzburg-Landau energy as kappa tends to infinity*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **331**, 1-5, (2000).
- [4] (AVEC A. BONNET ET S.J. CHAPMAN), *Convergence of Meissner minimisers of the Ginzburg-Landau energy of superconductivity as kappa tends to infinity*, SIAM J. Math. Anal. **31** (6), 1374-1395, (2000).
- [5] *Quasilinear Elliptic System Arising in a Three-dimensional Type-II Superconductor for Infinite Kappa*, accepté dans Nonlinear Anal. TMA.
- [6] (AVEC F. HAMEL), *Solutions d'équations semilinéaires dans \mathbb{R}^N ayant des courbes de niveau de forme conique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **327**, 645-650, (1998).
- [7] (AVEC F. HAMEL), *Solutions of semilinear elliptic equations in \mathbb{R}^N with conical-shaped level sets*, Comm. Partial Differential Equations **25** (5 et 6), 769-819 (2000).
- [8] (AVEC F. HAMEL), *Existence and uniqueness for a free boundary problem arising in combustion theory*, Interfaces and Free Boundaries **4**, 167-210, (2002).
- [9] (AVEC F. HAMEL), *Conical-shaped travelling fronts applied to the mathematical analysis of the shape of premixed Bunsen flames*, In : Nonlinear PDE's in Physics, H. Berestycki and Y. Pomeau eds., NATO ASI Series, Elsevier Publ. Co., Dordrecht, 2001, à paraître.
- [10] (AVEC H. BERESTYCKI ET F. HAMEL), *One-dimensional symmetry for some bounded entire solutions of some elliptic equations*, Duke Math. J. **103** (3), 375-396 (2000).
- [11] (AVEC J. DOLBEAULT), *Estimations de convexité pour des équations elliptiques non-linéaires et application à des problèmes de frontière libre*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **331**, 771-776, (2000).
- [12] (AVEC J. DOLBEAULT), *Convexity Estimates for Nonlinear Elliptic Equations and Application to Free Boundary Problems*, accepté aux Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.
- [13] (AVEC X. BLANC), *Screening of an Applied Electric Field Inside a Metallic Layer Described by the Thomas-Fermi-von Weizsäcker Model*, Advances in Differential Equations **7** (7), 847-876, (2002).

- [14] *A Brief Overview on the Obstacle Problem*, in Proceedings of the Third European Congress of Mathematics, Barcelona, (2000) : Progress in Mathematics. **202**, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, (2001).
- [15] (AVEC D.S. JERISON), *L'existence d'un minimiseur global symétrique sur \mathbb{R}^{n-1} implique l'existence d'un contre-exemple à une conjecture de De Giorgi dans \mathbb{R}^n* , C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **333**, 427-431, (2001).
- [16] *Justification de la théorie non linéaire de Kirchhoff-Love, comme application d'une nouvelle méthode d'inversion singulière*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **334**, 615-620, (2002).
- [17] *Estimations intérieures avec régularité optimale pour un modèle de plaques en élasticité linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **334**, 1-6, (2002).
- [18] *On the Number of Singularities for the Obstacle Problem in Two Dimensions*, accepté au J. Geom. Anal.

- *Articles soumis*

- [19] (AVEC A. BONNET), *On the Mushy Region Arising Between Two Fluids in a Porous Medium*, soumis au Nonlinear Anal. TMA.
- [20] *Justification of the nonlinear Kirchhoff-Love theory of plate as the application of a new singular inverse method*, soumis à Archive for Rational Mechanics and Analysis.
- [21] (AVEC F. LEGOLL), *Designing reversible measure-invariant algorithms with applications to molecular dynamics*, soumis à Journal of Chemical Physics.
- [22] *Uniform Elliptic Estimate for an Infinite Plate in Linear Elasticity*, soumis au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.
- [23] *On the asymptotic smoothness of the displacements of a beam as a function of its thickness*, soumis à IMA Journal of Applied Mathematics.
- [24] *Some Remarks on the Asymptotic Inversibility of the Linearized Operator of Nonlinear Elasticity in the Context of the Displacement Approach*, soumis à Z. Angew. Math. Mech.
- [25] (AVEC D.S. JERISON), *Towards a counter-example to a conjecture of De Giorgi in high dimensions*, soumis à Annali di Matematica Pura ed Applicata.
- [26] *A new 3d-2d interior error estimate independent on the geometry of a linear elastic plate*, soumis à Asymptotic Analysis.
- [27] (AVEC J. DOLBEAULT), *On a Liouville type theorem for isotropic homogeneous fully nonlinear elliptic equations in dimension two*, soumis à Annali della Scuola Normale Superior di Pisa, Classe di Scienze.
- [28] *On the Regularity of a Free Boundary for a Nonlinear Obstacle Problem Arising in Superconductor Modelling*, soumis aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

- *Articles en préparation*

- [29] (AVEC F. MURAT ET A. SILI), *Estimation d'erreur pour le passage 3d-1d en élasticité linéarisée anisotrope hétérogène.*
- [30] (AVEC F. HAMEL ET J.-M. ROQUEJOFFRE), *Existence, uniqueness and stability of solutions on the whole space for semilinear elliptic equations arising in combustion theory.*
- [31] (AVEC J. DOLBEAULT ET P. FELMER), *Local symmetry and non uniformly elliptic operators.*

- *Divers*

- [32] *Problèmes de frontières libres, EDP elliptiques non linéaires et applications en combustion, supraconductivité et élasticité*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, (1999).
- [33] *Méthodes hybrides couplant atomes et continuum*, rapport interne ENPC-CERMICS, (2001).

Bibliographie

Problèmes à frontières libres et théorie de Nash-Moser

- [34] ACERBI, E. ; FONSECA, I. ; FUSCO N. *Regularity Results for Equilibria in a Variational Model for Fracture*, Proc. Roy. Soc. Edimburgh Sect. A **127** (5), 889-902, (1997).
- [35] ALINHAC, S. ; GÉRARD, P., *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Interéditions / Editions du CNRS (1991).
- [36] ALT, H.W., *The fluid flow through porous media. Regularity of the free surface*, Manuscripta Math. **21**, 255-272, (1977).
- [37] ALT, H.W., *Strömungen durch inhomogene poröse Medien mit freiem Rand*, J. Reine Angew. Math. **305**, 89-115, (1979).
- [38] ALT, H.W. ; CAFFARELLI, L.A., *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, J. Reine Angew. Math. **105**, 105-144, (1981).
- [39] ALT, H.W. ; CAFFARELLI, L.A. ; FRIEDMAN, A., *Axially symmetric jet flows*, Arch. Rat. Mech. Anal. **81**, 97-149, (1983).
- [40] ALT, H.W. ; CAFFARELLI, L.A. ; FRIEDMAN A., *The dam problem with two fluids*, Comm. Pure Appl. Math. **27**, 601-645, (1984).
- [41] ALT, H.W. ; CAFFARELLI, L.A. ; FRIEDMAN A., *Variational Problems with two phases and their free boundaries*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (2), 431-461, (1984).
- [42] ALT, H.W. ; GILARDI, G., *The behaviour of the free boundary for the dam problem*, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa **9**, 571-626, (1981).
- [43] ALT, H.W. ; PHILLIPS, D., *A free boundary problem for semilinear elliptic equations*, J. Reine Angew. Math. **368**, 63-107, (1986).
- [44] ALT, H.W. ; VAN DUIJN, C.J., *A stationary flow of fresh and salt groundwater in a coastal aquifer*, Nonlinear Anal. TMA **14** (8), 625-656, (1990).
- [45] ALT, H.W. ; VAN DUIJN, C.J., *A free boundary problem involving a cusp Part I : Global analysis*, European J. Appl. Math. **4**, 39-63, (1993).
- [46] ALT, H.W. ; VAN DUIJN, C.J., *A free boundary problem involving a cusp Part I : Local Analysis*, preprint.
- [47] ALT, H.W. ; VAN DUIJN, C.J., *A free boundary problem involving a cusp : Breakthrough of Saltwater*, preprint.
- [48] ATHANASOPOULOS, I. ; CAFFARELLI, L.A., *A Theorem of Real Analysis and its Applications to Free Boundary Problems*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (5), 499-502, (1985).
- [49] ATHANASOPOULOS, I. ; CAFFARELLI, L.A. ; SALSA, S., *Caloric functions in Lipschitz domains and the regularity of solutions to phase transition problems*, Ann. of Math. **143**, 413-434, (1996).
- [50] ATHANASOPOULOS, I. ; CAFFARELLI, L.A. ; SALSA, S., *Regularity of the free boundary in parabolic phase-transition problems*, Acta Math. **176**, 245-282, (1996).
- [51] ATHANASOPOULOS, I. ; CAFFARELLI, L.A. ; SALSA, S., *Phase Transition Problems of Parabolic Type : Flat Free Boundaries Are Smooth*, Comm. Pure Appl. Math. **51**, 77-112, (1998).
- [52] BADERKO, E.A., *Schauder estimates for oblique derivative problems*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **326**, 1377-1380, (1998).

- [53] BARENBLATT, G.I., *Fracture in solids as a free boundary problem*, Proceedings of Toledo, Conference on free boundary problems, Coll. Free boundary Problems : theory and application (Toledo, 1993), 20-39, Pitman Res. Notes Math. Ser. **323**. Publication : Longman Sci.Techn., Harlow, (1995).
- [54] BARLES, G. ; SOUGANIDIS, P.E. , *A New Approach to Front Propagation Problems : Theory and Applications*, preprint.
- [55] BECKNER, W. ; KENIG, C. ; PIPHER, J., in preparation.
- [56] BERESTYCKI, H. ; BONNET, A. ; VAN DUJIN, C.J., *The regularity of the free boundary between two fluids in a porous medium*, in preparation.
- [57] BERESTYCKI H. ; NIRENBERG L. ; VARADHAN S.R.S., *The Principle Eigenvalue and Maximum Principle for Second-Order Elliptic Operators in General Domains*, Comm. Pure Appl. Math. **47**, 47-92, (1994).
- [58] BLANK, I., *Sharp Results for the Regularity and Stability of the Free Boundary in the Obstacle Problem*, to appear in Indiana Univ. Math. J..
- [59] BLANK, I., communication personnelle.
- [60] BLAT, J. ; MOREL, J.-M., *Elliptic problems in image segmentation and their relation to fracture theory*, Proceedings of the Int. Conf. on nonlinear elliptic on parabolic problems, Nancy 88, Longman, (1989).
- [61] BONAMI, A. ; HILHORST, D. ; LOGAK, E., *Modified motion by mean curvature : local existence and uniqueness and qualitative properties*, prprint.
- [62] BONNET, A., *On the regularity of edges in image segmentation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (4), 485-528, (1996).
- [63] BONNET, A. ; KAMIN, S., *A stationary flow in a strip*, Nonlinear Anal. TMA **35** (6), 765-780, (1999).
- [64] BONORINO, L., *Regularity of the free boundary for some elliptic and parabolic problems*, NYU Dissertation, (1999).
- [65] BRAUNER, C.M. ; HULSHOF J. ; LUNARDI A., *A general approach to stability in free boundary problems*, preprint.
- [66] BRÉZIS, H. ; KINDERLEHRER, D., *The Smoothness of Solutions to Nonlinear Variational Inequalities*, Indiana Univ. Math. J. **23** (9), 831-844, (1974).
- [67] BREZIS, H. ; STAMPACCHIA, G., *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Soc. Math. France **96**, 153-180, (1968).
- [68] CABRÉ, X. ; CAFFARELLI, L.A., *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Colloquium Publications. Amer. Math. Soc. **43**, (1995).
- [69] CAFFARELLI, L.A., *Free boundary problems : a survey*, (1985).
- [70] CAFFARELLI, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (5), 541-545, (1986).
- [71] CAFFARELLI, L.A., *Free boundary problem in higher dimensions*, Acta Math. **139**, 155-184, (1977).
- [72] CAFFARELLI, L.A., *Compactness Methods in Free Boundary Problems*, Comm. Partial Differential Equations **5**(4), 427-448, (1980).
- [73] CAFFARELLI, L.A., *A remark on the Hausdorff measure of a free boundary, and the convergence of coincidence sets*, Boll. Un. Mat. Ital. A **18** (5), 109-113, (1981).
- [74] CAFFARELLI, L.A., *The Obstacle Problem revisited*, J. Fourier Anal. Appl. **4**, 383-402, (1998).
- [75] CAFFARELLI, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries, Part I : Lipschitz Free Boundaries are $C^{1,\alpha}$* , Rev. Mat. Iberoamericana **3** (2), 139-162, (1987).

- [76] CAFFARELLI, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries, Part II : Flat Free Boundaries are Lipschitz*, Comm. Pure Appl. Math. **42**, 55-78, (1989).
- [77] CAFFARELLI, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries, Part III : Existence Theory, Compactness, and Dependence on X*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **15** (4), 583-602, (1989).
- [78] CAFFARELLI, L.A. ; FABES, E. ; MORTOLA, M. ; SALSA, S., *Boundary behavior of non negative solution of elliptic operators in divergence form*, Indiana Univ. Math. J. **30**, 621-640, (1981).
- [79] CAFFARELLI, L.A. ; KENIG, C.E. ; JERISON, D., *Some new monotonicity theorems with applications to free boundary problems*, preprint.
- [80] CAFFARELLI, L.A. ; KINDERLEHRER, D., *Potential methods in variational inequalities*, J. Anal. Math. **37**, 285-295, (1980).
- [81] CAFFARELLI, L.A. ; RIVIÈRE, N.M., *On the Rectifiability of Domains with Finite Perimeter*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **12**, 177-186, (1975).
- [82] CAFFARELLI, L.A. ; RIVIÈRE, N.M., *Smoothness and Analyticity of Free Boundaries in Variational Inequalities*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **3** (4), 289-310, (1975).
- [83] CAFFARELLI, L.A. ; RIVIÈRE, N.M., *Asymptotic behaviour of free boundaries at their singular points*, Ann. of Math. **106**, 309-317, (1977).
- [84] CAFFARELLI, L.A. ; RIVIÈRE, N.M., *The smoothness of the elastic-plastic free boundary of a twisted bar*, Proc. Amer. Math. Soc. **63**(1), 56-58, (1977).
- [85] CAFFARELLI, L.A. ; SALAZAR, J., *Solutions of fully nonlinear elliptic equations with patches of zero gradient : existence, regularity and convexity of level curves*, preprint.
- [86] CAFFARELLI, L.A. ; SPRUCK, J., *Convexity properties of solutions to some classical variational problems*, Comm. Partial Differential Equations **7** (11), 1337-1379, (1982).
- [87] CARRILLO, J., *On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem*, Nonlinear Anal. TMA, **22** (5), 573-607, (1994).
- [88] CARRILLO, J., *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems*, to appear.
- [89] CARILLO-MENENDEZ, J. ; CHIPOT, M., *On the dam problem*, J. Differential Equations **45**, 234-270, (1982).
- [90] CARILLO-MENENDEZ, J. ; CHIPOT, M., *Sur l'unicité de la solution du problème de l'écoulement à travers une digue*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **292**, 191-194, (1981).
- [91] CHAMBOLLE, A., *Finite-Differences Discretizations of the Mumford-Shah Functional*, preprint.
- [92] CHAPMAN, S.J., *Superheating Field of type-II superconductors*, SIAM J. Appl. Math. **55**, 1233-1258, (1995).
- [93] CHAPMAN, S.J. ; RUBINSTEIN, J. ; SCHATZMAN, M. *A Mean-field Model of Superconducting vortices*, European J. Appl. Math. **7**, 97-111, (1996).
- [94] CHIPOT, M., *Variational inequalities and flow in porous media*, Springer-Verlag 52, ed. (1982/1984).
- [95] CRAIG, W. ; STERNBERG, P., *Symmetry of free-surface flows*, Arch. Rational Mech. Anal. **118**, 1-36, (1992).
- [96] DAHLBERG, B.E.J., *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rational Mech. Anal. **65**, 278-288, (1977).
- [97] DAVID, G., *C^1 arcs for minimizers of the Mumford-Shah functional*, SIAM J. Appl. Math. **56** (3), 783-888, (1996).
- [98] DERVIEUX, A., *A perturbation study of the obstacle problem by means of a generalized implicit function theorem*, Ann. Mat. Pura Appl. **127**, 321-364, (1981).

- [99] DE GENNES, P.G. *Superconductivity of Metals and Alloys*, New York and Amsterdam (1966).
- [100] DE GIORGI, E., *Free Discontinuity Problems in Calculus of Variations*, in *Frontiers in pure and applied Mathematics*, a collection of papers dedicated to J.-L. Lions on the occasion of his 60th birthday, R. Dautray ed., 55-61, North Holland, (1991).
- [101] DIAZ, J.I.; KAWOHL, B., *On convexity and Starshapedness of level Sets for Some Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems on Convex Rings*, *J. Math. Anal. Appl.* **177**, 263-286, (1993).
- [102] DOLBEAULT, P., *Analyse complexe*, Collection Maîtrise de Mathématiques Pures, ed. Masson, (1990).
- [103] DOLBEAULT, J.; POUPAUD, F., *A remark on the critical explosion parameter for a semilinear elliptic equation in a generic domain using an explosion time of an ordinary differential equation*, *Nonlinear Anal. TMA* **24** (8), 1149-1162, (1995).
- [104] DU, Q.; GUNZBURGER, M.D.; PETERSEN, J.S., *Analysis and Approximation of the Ginzburg-Landau model of superconductivity*, *SIAM Rev.* **34** (1), 54-81, (1992).
- [105] EVANS, L.C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics **19**, Amer. Math. Soc., (1998).
- [106] FALCONER, K.J., *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, (1985).
- [107] FEDERER, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, (1969).
- [108] FREHSE J., *On the Regularity of the Solution of a Second Order Variational Inequality*, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7) **6** (4), 312-315, (1972).
- [109] FRIEDMAN, A., *Variational Principles and Free Boundary Problems*, Pure and applied mathematics, ISSN 0079-8185, a Wiley-Interscience publication, (1982).
- [110] FRIEDMAN, A.; PHILLIPS, D., *The free boundary of a semilinear elliptic equation*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **282**, 153-182, (1984).
- [111] FRIEDMAN, A.; POZZI G.A., *The free boundary for elastic-plastic torsion problems*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **257** (2), 411-425, (1980).
- [112] FONSECA, I., *Interfacial energy and the Maxwell rule*, *Arch. Rational Mech. Anal.* **106** (1), 63-95, (1989).
- [113] FONSECA, I.; FUSCO, N., *Regularity results for anisotropic image segmentation models*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **24** (3), 463-499 (1997).
- [114] FONSECA, I.; FRANCFORT, G., *Relaxation in BV versus quasiconvexification in $W^{1,p}$; a model for the interaction between fracture and damage*, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **4**, 407-446, (1995).
- [115] GABRIEL, R., *A result concerning convex level surfaces of 3-dimensional harmonic functions*, *J. London Math. Soc.* **32**, 286-294, (1957).
- [116] GINZBURG, V.L.; LANDAU, L.D., *On the theory of superconductivity*, *Soviet Phys., J. Experiment. Theoret. Phys.* **20**, 1064, (1950).
- [117] GIUSTI, E., *Minimal surfaces and functions of bounded variations*, Birkhäuser, Boston, (1984).
- [118] HAMILTON, R.S., *The inverse function theorem of Nash and Moser*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7**, 65-222, (1982).
- [119] HENROT, A.; SHAHGOLIAN, H., *Convexity of free boundaries with bernoulli type boundary conditions*, *Nonlinear Anal. TMA* **28** (5), (1997).
- [120] HENROT, A.; SHAHGOLIAN, H., *Existence of classical solutions to a free boundary problem for the p-Laplace operator : (I) the exterior convex case*, preprint.
- [121] HENROT, A.; SHAHGOLIAN, H., *Existence of classical solutions to a free boundary problem for the p-Laplace operator : (II) the interior convex case*, preprint.

- [122] ILMANEN, T., *Lectures on Mean Curvature Flow and Related equations*, Lecture Notes ICTP, Trieste, (1995).
- [123] ISAKOV, V., *Inverse theorems concerning the smoothness of potentials*, J. Differential Equations **11**, 50-56, (1976).
- [124] JERISON D. ; KENIG C., *Boundary behaviour of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. Math. **46** (1), 80-147, (1982).
- [125] KAUP, B. ; KAUP, L., *Holomorphic Functions of Several Variables*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (1983).
- [126] KAWOHL, B., *When are solutions to nonlinear elliptic boundary value problems convex ?*, Comm. Partial Differential Equations **10**, 1213-1225, (1985).
- [127] KAWOHL, B., *On the convexity and symmetry of solutions to an elliptic free boundary problem*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **42**, 57-68, (1987).
- [128] KAWOHL, B., *On the convexity of level sets for elliptic and parabolic exterior boundary value problems*, Potential theory (Prague, 1987), Plenum, New York-London, 153-159, (1988).
- [129] KAWOHL, B., *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE*, Lecture Notes in Math. **1150**, (1985).
- [130] KAWOHL, B., *Geometrical properties of level sets of solutions to elliptic problems*, Proc. Sympos. Pure Math. **45**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, 25-36, (1986).
- [131] KENIG, C.E., *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **83**. American Mathematical Society, (1994).
- [132] KENIG, C.E. ; TORO, T., *Harmonic measure on locally flat domains*, Duke Math. J. **87** (3), 509-551, (1997).
- [133] KENIG, C.E. ; TORO, T., *Harmonic measures and Poisson Kernels*, preprint.
- [134] KI-AHM LEE, *Obstacle problem for nonlinear second-order elliptic operator*, preprint.
- [135] KINDERLEHRER, D., *The Free Boundary Determined by the Solution to a Differential Equation*, Indiana Univ. Math. J. **25** (2), 195-208, (1976).
- [136] KINDERLEHRER, D., *The coincidence Set of Solutions of Certain Variational Inequalities*, Arch. Rational Mech. Anal. **40**, 231-250, (1971).
- [137] KINDERLEHRER, D., *How a minimal surface leaves an obstacle*, Acta. Math. **130**, 221-242, (1973).
- [138] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L., *Regularity in free boundary problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **4**, 373-391, (1977).
- [139] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L. ; SPRUCK, J., *Régularité dans les les problèmes elliptiques à frontière libre*, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, **286**, 1187-1190, (1978).
- [140] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L. ; SPRUCK, J., *Regularity in elliptic free boundary problems I*, J. Anal. Math. **34**, 86-119, (1978).
- [141] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L. ; SPRUCK, J., *Regularity in elliptic free boundary problems II : Equations of higher order*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **4** (6), 637-683, (1979).
- [142] KINDERLEHRER, D. ; STAMPACCHIA G., *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York, (1980).
- [143] KINDERLEHRER, D. ; STAMPACCHIA G., *A free boundary problem in potential theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25**, 323-344, (1975).
- [144] KNOWLES, J.K., *A note on the energy release rate in quasi-static elastic crack propagation*, SIAM J. Appl. Math. **41**, 401-412, (1981).
- [145] LADYSHENSKAYA, O.A. ; URAL'TSEVA, N.N., *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, New York : Academic Press, (1968).

- [146] LAURENCE, P. ; STREDULINSKY, E., *Existence of Regular Solutions with Levels for Semilinear Elliptic Equations with Nonmonotone L^1 Nonlinearities*, Indiana Univ. Math. J. **39** (4), 1081-1114, (1990).
- [147] LEGER, J.C., *Flatness and Finiteness in the Mumford-Shah problem*, J. Math. Pures Appl. **78**, 431-459, (1999).
- [148] LITTMAN, W. ; STAMPACCHIA, G. ; WEINBERGER, H.F., *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **17** (3), 43-77, (1963).
- [149] LEWY, H., *On the reflection laws of second order differential equations in two independent variables*, Bull. Amer. math. Soc. **65**, 37-58, (1959)
- [150] LEWY, H., *On minimal Surfaces with Partially Free Boundary*, Comm. Pure Appl. Math. **4**, 1-13, (1951).
- [151] LEWY, H., *On a free boundary problem in two dimensions*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **34** (3), 325-336, (1986).
- [152] LEWY, H. ; STAMPACCHIA, G., *On the Regularity of the Solution of a Variational Inequality*, Comm. Pure Appl. Math. **22**, 153-188, (1969).
- [153] LEWY, H. ; STAMPACCHIA, G., *On the smoothness of superharmonics which solve a minimum problem*, J. Anal. Math. **23**, 227-236, (1970).
- [154] LEWY, H. ; ZHIYUAN, T., *On free boundary problems in two dimensions*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **34**, 325-336, (1985).
- [155] LIN, F.H., an unpublished course at Courant Institute of Mathematical Sciences, (1990).
- [156] MCNABB, A., *Strong Comparison Theorems for Elliptic Equations of Second Order*, J. of Math. and Mechanics **10** (3), 431-440, (1961).
- [157] MALLET-PARET, J., *Generic unfoldings and normal forms of some singularities arising in the obstacle problem*, Duke Math. J. **46** (3), 645-683, (1979).
- [158] MOREL, J.-M., *The Mumford-Shah conjecture in image processing*, Sem. N. Bourbaki, exposé 813, (1995/96).
- [159] MOREL, J.-M., SOLIMINI, S., *Variational methods in image segmentation*, Birkhäuser, Boston, (1994).
- [160] MOSER, J., *A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **47**, 1824-1831, (1961).
- [161] MOSER, J., *A rapidly convergent iteration method and non linear partial differential equations I*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **20**, 265-315, (1966).
- [162] MOSER, J., *A rapidly convergent iteration method and non linear partial differential equations II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **20**, 449-535, (1966).
- [163] NASH, J., *The imbedding problem for Riemann manifolds*, Ann. of Math. **63**, 20-63, (1956).
- [164] PHILLIPS, D., *A Minimization Problem and the Regularity of solutions in the Presence of a Free Boundary*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1), (1983).
- [165] PHILLIPS, D., *Hausdorff measure estimates of a free boundary for a minimum problem*, Comm. Partial Differential Equations **8** (13), 1409-1454, (1983).
- [166] PLOTNIKOV, P.I., *A variant of the Nash-Moser theorem*, Dinamika Sploshn. Sredy **162**, 97-107, (1978).
- [167] PROTER, M.H. ; WEINBERGER, H.F., *Maximum Principles in Differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1967).
- [168] REDONDO, J.C., *The penalized obstacle problem. I. Lipschitz regularity of level sets*, Duke Math. J. **69** (1), 43-65, (1993).

- [169] REDONDO, J.C., *The penalized obstacle problem. I. $C^{1,\alpha}$ regularity of level sets*, Duke Math. J. **69** (1), 67-85, (1993).
- [170] REIFENBERG, E.R., *An isoperimetric inequality related to the analyticity of minimal surfaces*, Ann. Math. **80**, 1-14, (1964).
- [171] REIFENBERG, E.R., *Solution of the Plateau Problem for m -dimensional surfaces of varying topological type*, Acta Math. **104**, 1-92, (1960).
- [172] RODRIGUES, J.-F., *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, North-Holland, (1987).
- [173] RODRIGUES, J.-F.; YI, F., *On a two-phase continuous casting Stefan problem with nonlinear flux*, European J. Appl. Math. **1**, 259-278, (1990).
- [174] RODRIGUES, J.-F.; ZALTZMANN, B., *On classical solutions of the two-phase steady-state Stefan problem in strips*, Nonlinear Anal. TMA **19** (3), 207-208, (1992).
- [175] RODRIGUES, J.-F.; ZALTZMANN, B., *Regular solutions of a Stefan problem in strips*, preprint, Universidade de Lisboa, (1994).
- [176] SANDIER, E.; SERFATY, S., *A Rigorous Derivation of a Free-Boundary Problem Arising in Superconductivity*, preprint.
- [177] SCHAEFFER, D.G., *An Example of Generic Regularity for a Non-Linear Elliptic Equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **57**, 134-141, (1974).
- [178] SCHAEFFER, D.G., *A Stability Theorem for the Obstacle problem*, Adv. Math. **16**, 34-47, (1975).
- [179] SCHAEFFER, D.G., *Some Examples of Singularities in a Free Boundary*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **4** (4), 131-144, (1976).
- [180] SCHAEFFER, D.G., *The capacitor problem*, Indiana Univ. Math. J. **24**, 1143-1167, (1975).
- [181] SCHAEFFER, D.G., *One-sided Estimates for the Curvature of the Free Boundary in the Obstacle Problem*, Adv. Math. **24**, 78-98, (1977).
- [182] SCHWARTZ, J., *On Nash's implicit functional theorem*, Comm. Pure Appl. Math. **13**, 509-530, (1960).
- [183] SERGERAERT, F., *Une généralisation du théorème des fonctions implicites de Nash*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **270**, 861-863, (1970).
- [184] SERGERAERT, F., *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de fréchet et quelques applications*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Ser. 5, **4**, 599-660, (1972).
- [185] SIMON, L., *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **3**, (1983).
- [186] SPRUCK, J., *Regularity in elliptic boundary problems*, Recent methods in non-linear analysis, Proc. int. Meet., Rome 1978, 73-81, (1979).
- [187] STOJANOVIC, S., *Perturbation formula for regular free boundaries in elliptic and parabolic obstacle problems*, SIAM J. Control Optim. **35** (6), 2086-2100, (1997).
- [188] TALENTI, G., *Some estimates of solutions to Monge-Ampère type equations in dimension two*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **8**, 183-230, (1981).
- [189] TORO, T., *Geometric conditions and existence of bi-Lipschitz parametrizations*, Duke Math. J. **77** (1), 193-227, (1995).
- [190] TORO, T., *Doubling and flatness : geometry of measures*, Notices Amer. Math. Soc. **44** (9), 1087-1094, (1997).
- [191] WEISS, G.S., *A homogeneity improvement approach to the obstacle problem*, Invent. Math. **138**, 23-50, (1999).
- [192] YI F.; ZHANG J., *Classical existence of the flow of two immiscible fluids with equiviscosity in a two-dimensional porous medium*, SIAM J. Appl. Math. ???, ??? (1997).

- [193] ZALTZMANN, B., *Multidimensional two-phase quasistationary Stefan problem*, Manuscripta Math. **78**, 287-301, (1993).
- [194] ZEHNDER, E., *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems, Part. I*, Comm. Pure Appl. Math. **28**, 91-140, (1975).

Formes de flames et propriétés qualitatives des EDP elliptiques

- [195] AFTALION, A. ; BUSCA, J., *Radial symmetry of overdetermined problems in exterior domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **143**, 195-206, (1998).
- [196] AGMON, S. ; NIRENBERG, L. *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space*, Comm. Pure Appl. Math. **16**, 121-239, (1963).
- [197] ALAMA, S. ; BRONSARD, L. ; GUI, C., *Stationary layered solutions in \mathbb{R}^n for an Allen-Cahn system with multiple well potential*, Calc. Var. Partial Differential Equations **5**, 359-390, (1997).
- [198] ALESSIO, F. ; JEANJEAN, L. ; MONTECCHIARI, P., *Stationary layered solutions in \mathbb{R}^2 for a class of non-autonomous Allen-Cahn equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **11**, 177-202, (2000).
- [199] ALESSIO, F. ; JEANJEAN, L. ; MONTECCHIARI, P., *Existence of infinitely many stationary layered solutions in \mathbb{R}^2 for a class of periodic Allen-Cahn equations*, preprint.
- [200] ALEXANDROFF, A.D., *Uniqueness theorem for surfaces in the large*, Vestnik Leningrad Univ. Math. **11**, 5-17, (1956).
- [201] ALEXANDROFF, A.D., *A characteristic property of the spheres*, Ann. Mat. Pura Appl. **58**, 303-354, (1962).
- [202] AMBROSIO, L. ; CABRÉ, X., *Entire solutions of semilinear elliptic equations in \mathbb{R}^3 and a conjecture of De Giorgi*, J. Amer. Math. Soc. **13**, 725-739, (2000).
- [203] ALBERTI, G. ; AMBROSIO, L. ; CABRÉ, X., *On a long-standing conjecture of E. De Giorgi : old and recent results*, preprint.
- [204] AMICK, C.I. ; FRAENKEL, L.E., *The uniqueness of Hill's spherical vortex*, Arch. Rational Mech. Anal. **92**, 91-119, (1986).
- [205] ANDREUCCI, D. ; GIANNI, R., *Classical solutions to a multidimensional free boundary problem arising in combustion theory*, Comm. Partial Differential Equations **19**, 803-826, (1994).
- [206] ANGENENT, S.B., *Uniqueness of the solution of a semilinear boundary value problem*, Math. of Ann. **272**, 129-138, (1985).
- [207] ARONSON, D.G. ; WEINBERGER, H.F., *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation*, In : Part. Diff. Eq. and related topics, Lectures Notes in Math. **446**, Springer, New York, 5-49, (1975).
- [208] ARONSON, D.G. ; WEINBERGER, H.F., *Multidimensional nonlinear diffusions arising in population genetics*, Adv. Math. **30**, 33-76, (1978).
- [209] BANDLE, C. ; ESSEN, M., *On positive solutions of Emden equations in cone-like domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **112**, 319-338, (1990).
- [210] BARLOW, M.T., *On the Liouville property for divergence form operators*, Canad. J. Math. **50**, 487-496, (1998).
- [211] BARLOW, M.T. ; BASS, R. ; GUI, C., *The Liouville Property and a Conjecture of De Giorgi*, Comm. Pure Appl. Math. **53**, 1007-1038, (2000).
- [212] BERESTYCKI, H., *Qualitative properties of semilinear elliptic equations in unbounded domains*, to appear.
- [213] BERESTYCKI, H. ; CAFFARELLI, L.A. ; NIRENBERG, L., *Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **25**, 69-94, (1997).
- [214] BERESTYCKI, H. ; CAFFARELLI, L.A. ; NIRENBERG, L., *Inequalities for second order elliptic equations with applications to unbounded domains I*, Duke Math. J. **81**, 467-494, (1996).

- [215] BERESTYCKI, H. ; CAFFARELLI, L.A. ; NIRENBERG, L., *Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipschitz domains*, Comm. Pure Appl. Math. **50**, 1089-1111, (1997).
- [216] BERESTYCKI, H. ; CAFFARELLI, L.A. ; NIRENBERG, L., *Symmetry for elliptic equations in a half space*, in Boundary value problems for partial differential equations and applications, ed. by J.-L. Lions et al., RMA Res. Notes Appl. Math., Masson, Paris, 27-42, (1993).
- [217] BERESTYCKI, H. ; CAFFARELLI, L.A. ; NIRENBERG, L., *Singular limits in nonlinear elliptic equations and free boundary problems*, in preparation (2000).
- [218] BERESTYCKI, H. ; CAFFARELLI, L.A. ; NIRENBERG, L., *Uniform estimates for regularisation of free boundary problems*, In : Anal. and Part. Diff. Eq., C. Sadosky & M. Decker eds, 567-617, (1990).
- [219] BERESTYCKI, H. ; CAFFARELLI, L.A. ; NIRENBERG, L., *Inequalities for second-order equations with applications to unbounded domains II : Symmetry in infinite strips*, preprint.
- [220] BERESTYCKI, H. ; LARROUTUROU, B., *Planar travelling front solutions of reaction-diffusion problems*, preprint.
- [221] BERESTYCKI, H. ; LARROUTUROU, B., *Quelques aspects mathématiques de la propagation des flammes prémélangées*, In : Nonlinear p.d.e. and their applications, Collège de France seminar **10**, Brézis and Lions eds, Pitman Longman, Harbow, UK, (1990).
- [222] BERESTYCKI, H. ; LARROUTUROU, B. ; LIONS, P.L., *Multidimensional traveling-wave solutions of a flame propagation model*, Arch. Rational Mech. Anal. **111**, 33-49, (1990).
- [223] BERESTYCKI, H. ; LARROUTUROU, B. ; ROQUEJOFFRE, J.-M., *Stability of Travelling Fronts in a Model for Flame Propagation, Part I : Linear Analysis*, Arch. Rational Mech. Anal. **117**, 97-117, (1992).
- [224] BERESTYCKI, H. ; NICOLAENKO, B. ; SCHEURER, B., *Travelling waves solutions to combustion models and their singular limits*, SIAM J. Math. Anal. **16**, 1207-1242, (1985).
- [225] BERESTYCKI, H. ; NIRENBERG, L., *Some qualitative properties of solutions of semilinear elliptic equations in a cylinder*, in Analysis Et Cetera (P. RABINOWITZ et al., Editors), Academic Press, Boston, 115-164, (1990).
- [226] BERESTYCKI, H. ; NIRENBERG, L., *Asymptotic Behaviour via Harnack Inequality*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 135-144, (1991).
- [227] BERESTYCKI, H. ; NIRENBERG, L., *On the method of moving planes and the sliding method*, Bol. Soc. Braseleira Mat. (N.S.) **22**, 1-37, (1991).
- [228] BERESTYCKI, H. ; NIRENBERG, L., *Travelling fronts in cylinders*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **9**, 497-572, (1992).
- [229] BERNSTEIN, S., *Über ein geometrosches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom ellipschen Typus.*, Math. Zeit. **26**, 551-558 (1927), (translation of the original version in Comm. de la Soc. Math. de Kharkov 2-ème sér. **15**, 38-45, (1915-1917).
- [230] BOMBIERI, E. ; DE GIORGI, E. ; GIUSTI, E., *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7**, 243-268, (1969).
- [231] BONNET, A. ; HAMEL, F., *Existence of non-planar solutions of a simple model of premixed Bunsen flames*, SIAM J. Math. Anal. **31**, 80-118, (1999).
- [232] BRAUNER, C.-M. ; LUNARDI, A., *Instability of a free boundary in a two-dimensional combustion model*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **330**, 77-81, (2000).
- [233] BRAUNER, C.-M. ; LUNARDI, A. ; SCHMIDT-LAINÉ, CL., *Une nouvelle formulation de modèles de fronts en problèmes totalement non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **311**, 597-602, (1990).

- [234] BRAUNER, C.-M. ; LUNARDI, A. ; SCHMIDT-LAINÉ, CL., *Stability of travelling waves with interface conditions*, Nonlinear Anal. TMA **19**, 455-474, (1992).
- [235] BRAUNER, C.-M. ; LUNARDI, A. ; SCHMIDT-LAINÉ, CL., *Multidimensional stability analysis of planar travelling waves*, Appl. Math. Lett. **7** 5, 1-4, (1994).
- [236] BRAUNER, C.-M. ; NOOR EBAD, S. ; SCHMIDT-LAINÉ, CL., *Nonlinear stability analysis of singular travelling waves in combustion : a one-phase problem*, Nonlinear Anal. TMA **16**, 881-892, (1991).
- [237] BROCK, F., *Continuous Steiner symmetrization*, Math. Nachr. **172**, 25-48, (1995).
- [238] BROCK, F., *Continuous rearrangements and symmetry of solutions of elliptic problems*, Preprint.
- [239] BUCKMASTER, J.D., *A mathematical description of open and closed flame tips*, Comb. Sci. Tech. **20**, 33-40, (1979).
- [240] BUCKMASTER, J.D., *Polyhedral flames, an exercise in bimodal bifurcation analysis*, SIAM J. Appl. Math. **44**, 40-55, (1982).
- [241] BUCKMASTER, J.D. ; LUDFORD, G.S.S., *Lectures on Mathematical Combustion*, In : CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math. **43**, (1983).
- [242] BUCKMASTER, J.D. ; LUDFORD, G.S.S., *The mathematics of combustion*, Frontiers Appl. Math. **2**, SIAM, (1985).
- [243] BUSCA, J. ; SIRAKOV, B., *Symmetry results for semilinear elliptic systems in the whole space*, preprint.
- [244] CAFFARELLI, L.A. ; CORDOBA, A., *Uniform Convergence of a Singular perturbation Problem*, Comm. Pure Appl. Math. **48**, 1-12, (1995).
- [245] CAFFARELLI, L.A. ; CORDOBA, A., *Phase transition : Uniform regularity of the transition layers*, preprint.
- [246] CAFFARELLI, L.A. ; GAROFALO N. ; SEGALA, F., *A gradient bound for entire solutions of quasi-linear equations and its consequences*, Comm. Pure Appl. Math. **47**, 1457-1473, (1994).
- [247] CAFFARELLI, L.A. ; LEDERMAN, C. ; WOLANSKI, N., *Uniform estimates and limits for a two phase parabolic singular perturbation problem*, Indiana Univ. Math. J. **46**, 453-490, (1997).
- [248] CAFFARELLI, L.A. ; VAZQUEZ, J.L., *A free-boundary problem for the heat equation arising in flame propagation*, Trans. Amer. Math. Soc. **347**, 411-441, (1995).
- [249] CHEN, W. ; LI, C., *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. **63**, 615-622, (1991).
- [250] CLÉMENT, P. ; SWEERS, G., *Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **14**, 97-121, (1987).
- [251] CORTÁZAR, C. ; ELGUETA, M ; FELMER, P., *On a semilinear elliptic problem in \mathbb{R}^N with a non-Lipschitzian non-linearity*, Adv. Differential Equations **1**, 199-218, (1996).
- [252] CRAIG, W. ; STERNBERG, P., *Symmetry of free-surface flows*, Arch. Rational Mech. Anal. **118**, 1-36, (1992).
- [253] DACOROGNA, B., *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Applied Mathematical Sciences **78**, Springer, (1978).
- [254] DAL MASO, G. ; MODICA, L., *A general theory of variational functionals*, In : Topics in Functional Analysis 1980/1981, Quaderno Scuola Normale Superiore Pisa, 149-221, (1981).
- [255] DAMASCELLI, L., *Some remarks on the method of moving planes*, Differential Integral Equations **11**, 493-501, (1998).

- [256] DAMASCELLI, L., *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **15**, 493-516, (1998).
- [257] DAMASCELLI, L. ; PACELLA, F., *Monotonicity and symmetry of solutions of p -Laplace equation, $1 < p < 2$, via the moving plane method*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **26**, 689-707, (1998).
- [258] DAMASCELLI, L. ; PACELLA, F. ; RAMASWAMY, M., *Symmetry of ground states of p -Laplace equations via the moving plane method*, Arch. Rational Mech. Anal. **148**, 291-308, (1999).
- [259] DAMASCELLI, L. ; RAMASWAMY, M., *Symmetry of C^1 solutions of p -Laplace equations in \mathbb{R}^N* , preprint (1999).
- [260] D. DANIELLI, N. GAROFALO, *Properties of entire solutions of non-uniformly elliptic equations arising in geometry and in phase transitions*, preprint.
- [261] DAUGE, M., *Elliptic boundary value problems on corners domains. Smoothness and asymptotics of solutions*, Lecture Notes in Math. **1341**, (1988).
- [262] DE GIORGI, E., *Convergence problems for functionals and operators*, in Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Rome 1978, E. De Giorgi et al. (eds), Pitagora, Bologna, 131-188, (1979).
- [263] DI BENEDETTO, E., *$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Non-linear Anal. TMA **7**, 827-850, (1983).
- [264] DOLBEAULT, J. ; FELMER, P., *Symétrie des solutions d'équations semi-linéaires elliptiques [Symmetry of the solutions of semilinear elliptic equations]*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **329**, 677-682, (1999).
- [265] DOLBEAULT, J. ; FELMER, P., *Symmetry and monotonicity properties for positive solutions of semi-linear elliptic PDE's*, Comm. Partial Differential Equations **25** (5-6), 1153-1169, (2000).
- [266] DOLBEAULT, J. ; FELMER, P., *Monotonicity and Symmetry of positive solutions to nonlinear elliptic equations : local Moving Planes and Unique Continuation*, submitted.
- [267] ESTEBAN, M. ; LIONS, P.-L., *Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **93**, 1-14, (1982).
- [268] FARINA, A., *Propriétés de monotonie et de symétrie unidimensionnelle pour les solutions de $\Delta u + f(u) = 0$ avec des fonctions f éventuellement discontinues*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **330**, 973-978, (2000)
- [269] FARINA, A., *Monotonicity and one-dimensional symmetry for the solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in \mathbb{R}^N with possibly discontinuous nonlinearity*, preprint, (2001).
- [270] FARINA, A., *One-dimensional symmetry for solutions of quasilinear equations in \mathbb{R}^2* , preprint.
- [271] FARINA, A., *Some Remarks on a Conjecture of De Giorgi*, Calc. Var. Partial Differential Equations **8** (3), 233-245, (1999).
- [272] FARINA, A., *Symmetry for solutions of semilinear elliptic equations in \mathbb{R}^n and related conjectures*, Ricerche Mat. **48**, 129-154, (1999).
- [273] FARINA, A. ; AKOPIAN, V., *Sur les solutions radiales de l'équation $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$ dans \mathbb{R}^n ($N \geq 3$)*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **325**, 601-604, (1997).
- [274] FIFE, P.C. ; MCLEOD, J.B., *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **65**, 335-361, (1977).
- [275] FISHER, R.A., *The advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics **7**, 335-369, (1937).
- [276] FLEMING, W.H., *On the oriented Plateau problem*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **9**, 69-89, (1962).
- [277] FRANCHI, B. ; LANCONELLI E. ; SERRIN, J., *Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in \mathbb{R}^N* , Adv. Math. **118**, 177-243, (1996).

- [278] FRANKEL, M.L. ; SIVASHINSKY, G.I., *On the equation of curved flame front*, Physica D **30**, 28-42, (1988).
- [279] GALAKTIONOV, V.A. ; HULSHOF, J. ; VAZQUEZ, J.L., *Extinction and focusing behaviour of spherical and annular flames described by a free boundary problem*, J. Math. Pures Appl. **76**, 563-608, (1997).
- [280] GIDAS, B ; NI, W.M. ; NIRENBERG, L., *Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle*, Commun. Math. Phys. **68**, 209-243, (1979).
- [281] GIDAS, B ; NI, W.M. ; NIRENBERG, L., *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in \mathbb{R}^n* , In : Math. Anal. Appl. Part A, Advances in Math. Suppl. Studies **7A**, 369-402, (1981).
- [282] GIDAS, B. ; SPRUCK, J. , *Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **34**, 525-598, (1981).
- [283] GIAQUINTA, M. ; HILDEBRANDT, S., *Calculus of Variations I*, Grundlehren Math. Wiss. **310**, Springer, (1996).
- [284] GILBARG, D. ; SERRIN, J., *On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations*, J. Anal. Math. **4**, 309-340, (1956).
- [285] GILBARG, D. ; TRUDINGER, N.S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag, (1997).
- [286] GHOUSSOUB, N. ; GUI, C., *On a conjecture of De Giorgi and some related problems*, Math. Ann. **311**, 481-491, (1998).
- [287] GHOUSSOUB, N. ; GUI, C., *On De Giorgi's Conjecture in Dimensions 4 and 5*, preprint.
- [288] GLANGETAS, L. , *Étude d'une limite singulière d'un modèle intervenant en combustion*, Asymptot. Anal. **5**, 317-342, (1992).
- [289] GRISVARD, P. , *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, (1985).
- [290] HADELER, K.P. ; ROTHE, F. , *Travelling fronts in nonlinear diffusion equations*, J. Math. Biol. **2**, 251-263, (1975).
- [291] HAMEL, F., *Formules min-max pour les vitesses d'ondes progressives multidimensionnelles*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **8**, 259-280, (1999).
- [292] HAMEL, F. ; NADIRASHVILI, N., *Travelling waves and entire solutions of the Fisher-KPP equation in \mathbb{R}^N* , Arch. Rational Mech. Anal., to appear.
- [293] HEINZE, S. ; PAPANICOLAOU, G. ; STEVENS, A., *Variational principles for propagation speeds in inhomogeneous media*, preprint.
- [294] HENROT, A. ; PHILIPPIN, G.A., *Some overdetermined boundary value problems with elliptical free boundaries*, SIAM J. Math. Anal. **29**, 309-320, (1998).
- [295] HUTCHINSON, J.E. ; TONEGAWA, Y., *Convergence of phase interfaces in the Van Der Waals-Cahn-Hilliard theory*, Calc. Var. Partial Differential Equations, forthcoming.
- [296] HILHORST, D. ; HULSHOF, J., *A free boundary focusing problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **121**, 1193-1202, (1994).
- [297] JOULIN, G. , *Dynamique des fronts de flammes*, In : Modélisation de la combustion, Images des Mathématiques, CNRS, (1996).
- [298] KANEL', YA.I., *Certain problems of burning-theory equations*, Sov. Math. Dokl. **2**, 48-51, (1961).
- [299] KANEL', YA.I., *The stationary solution of the set of equation in the theory of combustion*, Dokl. Phys. Chem. **149**, 241-243, (1963).

- [300] KOLMOGOROV, A.N. ; PETROVSKY, I.G. ; PISKUNOV, N.S., *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bulletin Université d'Etat à Moscou (Bjul. Moskovskogo Gos. Univ.), Série internationale **A 1**, 1-26, (1937).
- [301] KONDRAT'EV, V.A., *Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc. **16**, 227-313, (1967).
- [302] KOZLOVSKY, G. ; SIVASHINSKY, G.I., *On open and closed tips of Bunsen burner flames*, Theor. Comput. Fluid Dyn. **6**, 181-192, (1994).
- [303] LEDERMAN, C. ; WOLANSKI, N., *Viscosity solutions and regularity of the free boundary for the limit of an elliptic two phase singular perturbation problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **27**, 253-288, (1998).
- [304] LEWIS, B. ; VON ELBE, G., *Combustion, flames and explosions of gases*, Academic Press, New York, London, (1961).
- [305] LI, C., *Monotonicity and symmetry of solutions of fully nonlinear elliptic equations on unbounded domains*, Comm. Partial Differential Equations **16**, 585-615, (1991).
- [306] LI, Y. ; NI, W.-N., *On the asymptotic behaviour and radial symmetry of positive solutions of semilinear equations in \mathbb{R}^n , I : asymptotic behaviour, II : radial symmetry*, Arch. Rational Mech. Anal. **118**, 195-222 ; 223-243, (1992).
- [307] LIÑAN, A., *The structure of diffusion flames*, In : Fluid dynamical aspects of combustion theory, Pitman Res. Notes Math. Ser. **223**, Longman Sci. Tech., Harlow, 11-29, (1991).
- [308] LUCKHAUS, S. ; MODICA, L., *The Gibbs-Thompson relation within the gradient theory of phase transitions*, Arch. Rational Mech. Anal. **107**, 71-83, (1989).
- [309] MATKOWSKY, B.J. ; SIVASHINSKY, G.I., *An asymptotic derivation of two models in flame theory associated with the constant density approximation*, SIAM J. Appl. Math **37**, 686-699, (1979).
- [310] MAZ'YA, V.G. ; PLAMENEVSKII, B.A., *On the coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary-value problems near conical points*, Sov. Math. Dokl. **15**, 1574-1575, (1974).
- [311] MICHELSON, D., *Steady solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation*, Physica D **19**, 89-111, (1986).
- [312] MICHELSON, D., *Bunsen flames as steady solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation*, SIAM J. Math. Anal. **23**, 364-386, (1991).
- [313] MIRANDA, M., *Superfici minime illimitate*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **4**, 313-322, (1977).
- [314] MIRANDA, M., *Maximum principle and minimal surfaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **25**, 667-681, (1997).
- [315] MODICA, L., *Γ -convergence to minimal surfaces problem and global solutions of $\Delta u = 2(u^3 - u)$* , in Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Rome 1978, E. De Giorgi et al. (eds), Pitagora, Bologna, (1979).
- [316] MODICA, L., *A gradient bound and a Liouville theorem for nonlinear Poisson equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38**, 679-684, (1985).
- [317] MODICA, L., *Gradient theory of phase transitions with boundary contact energy*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **4**, 487-512, (1987).
- [318] MODICA, L., *The Gradient Theory of Phase Transitions and the Minimal Interface Criterion*, Arch. Rational Mech. Anal. **98**, 123-142, (1987).
- [319] MODICA, L., *Monotonicity of the energy for entire solutions of semilinear elliptic equations*, Partial differential equations and the calculus of variations, Vol. II., Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 2, Birkhäuser, Boston, 843-850, (1989).

- [320] MODICA, L.; MORTOLA, S., *Un esempio di Γ^- -convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital. B (5) **14**, 285-299, (1977).
- [321] MODICA, L.; MORTOLA, S., *Some entire solutions in the plane of nonlinear Poisson equations*, Boll. Un. Mat. Ital. **5**, 614-622, (1980).
- [322] MONTENEGRO, M., *Strong maximum principles for supersolutions of quasilinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. TMA **37**, 431-448, (1999).
- [323] MORREY, C.B. *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer-Verlag, (1966).
- [324] MORGAN, F., *Area minimizing surfaces, faces of Grassmannians, and calibrations*, Amer. Math. Monthly **95**, 813-822, (1988).
- [325] MORGAN, F., *Calibrations and new singularities in area-minimizing surfaces : a survey*, In : Variational Methods (H. Berestycki et al. eds.), Progress in Nonlinear Differential Equations and Applications **4**, Birkhäuser, Boston, 329-342, (1990).
- [326] OWEN, N.C.; RUBINSTEIN, J.; STERNBERG, P., *Minimizers and gradient flows for singularly perturbed bi-stable potentials with a Dirichlet condition*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **429**, 533-554, (1990).
- [327] REICHEL, W., *Radial symmetry for elliptic boundary-value problems on exterior problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **137**, 381-394, (1997).
- [328] ROQUEJOFFRE, J.-M., *Eventual monotonicity and convergence to travelling fronts for the solutions of parabolic equations in cylinders*, preprint.
- [329] ROQUEJOFFRE, J.-M., *Stability of Travelling Fronts in a Model for Flame Propagation, Part II : Nonlinear Stability*, Arch. Rational Mech. Anal. **117**, 119-153, (1992).
- [330] SERRIN, J., *A symmetry problem in potential theory*, Arch. Rational Mech. Anal. **43**, 304-318, (1971).
- [331] SERRIN, J.; ZOU, H., *Symmetry of Ground States of quasilinear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **148**, 265-290, (1999).
- [332] SIMON, L., *Entire solutions of the minimal surface equation*, J. Differential Geom. **30**, 643-688, (1989).
- [333] SIMON, L., *The minimal surface equation*, preprint.
- [334] SIVASHINSKY, G.I., *The diffusion stratification effect in Bunsen flames*, J. Heat Transfer **11**, 530-535, (1974).
- [335] SIVASHINSKY, G.I., *The structure of Bunsen flames*, J. Chem. Phys. **62**, 638-643, (1975).
- [336] SIVASHINSKY, G.I., *Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar flames, I : Derivation of basic equations*, Acta Astro. **4**, 1177-1206, (1977).
- [337] SIVASHINSKY, G.I., *On flame propagation under conditions of stoichiometry*, SIAM J. Appl. Math. **39**, 67-82, (1980).
- [338] TOLKSDORF, P., *Everywhere-regularity for some quasilinear systems with lack of ellipticity*, J. Differential Equations **51**, 126-150, (1984).
- [339] TON, B.A., *On a free-boundary problem arising in the study of flame propagation*, Math. Methods Appl. Sci. **15**, 479-493, (1992).
- [340] TON, B.A., *On a steady state free boundary problem arising in combustion theory*, Differential Integral Equations **5**, 181-191, (1992).
- [341] VAZQUEZ, J.L., *A strong Maximum Principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12**, 191-202, (1984).
- [342] VEGA, J.M., *On the uniqueness of multidimensional travelling fronts of some semilinear equations*, J. Math. Anal. Appl. **177**, 481-490, (1993).

- [343] WILLIAMS, F., *Combustion Theory*, Addison-Wesley, Reading MA, (1983).
- [344] ZELDOVICH, Y.B.; BARENBLATT, G.I.; LIBOVICH, V.B.; MACKVILADZE, G.M., *The mathematical theory of combustion and explosions*, Cons. Bureau, New York, (1985).
- [345] ZELDOVICH, J.B.; FRANK-KAMENETSKII, D.A., *A theory of thermal propagation of flame*, Acta physiochimica URSS **9**, 341-350, (1938). English translation : In *Dynamics of curved fronts*, R. Pelcé ed., Perspectives in Physics Series, Academic Press, New York, 131-140, (1988).

Elasticité et estimations elliptiques

- [346] AGMON, S.; DOUGLIS, A.; NIRENBERG, L., *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math. **12**, 623-727, (1959).
- [347] AGMON, S.; DOUGLIS, A.; NIRENBERG, L., *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. II*, Comm. Pure Appl. Math. **17**, 35-92 (1964).
- [348] AMROUCHE, C.; GIRAULT, V.; GIROIRE, J., *Weighted Sobolev Spaces for Laplace's equation in \mathbb{R}^n* , J. Math. Pures Appl., Ser. 73, **9** (6), 579-606, (1994).
- [349] AMROUCHE, C., Thèse d'habilitation.
- [350] ANTMAN, S.S., *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer-Verlag, (1995).
- [351] ANTMAN, S.S., *Ordinary differential Equations of Non-Linear Elasticity I : Foundations of the Theories of Non-Linearly Elastic Rods and Shells*, Arch. Rational Mech. Anal. **61**, 307-351, (1976).
- [352] ANTMAN, S.S., *Ordinary differential Equations of Non-Linear Elasticity II : Existence and Regularity Theory for Conservative Boundary Value Problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **61**, 353-393, (1976).
- [353] ANZELLOTTI, G.; BALDO, S.; PERCIVALE, D., *Dimension reduction in variational problems, asymptotic development in Γ -convergence and thin structures in elasticity*, Asymptot. Anal. **9** (1), 61-100, (1994).
- [354] ARNOLD, D.N.; FALK, R., *The Boundary Layer for the Reissner-Mindlin Plate Model*, SIAM J. Math. Anal. **21**, 281-312, (1990).
- [355] BALL, J., *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **63**, 337-403, (1977).
- [356] BABUSKA, I.; SCHWAB, C., *A posteriori error estimation for hierarchic models of elliptic boundary value problems on thin domains*, SIAM J. Numer. Anal. **33**, 221-246, (1996).
- [357] BOURQUIN, F.; SCHWAB, C., *Exact controlability of the (1, 1, 2) plate model*, Proceedings of the 1rst Conference on Structural Control, Barcelona, (1996).
- [358] BRENNER, S.C.; SCOTT, L.R., *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Texts in Applied Mathematics. **15**, Springer-Verlag, New York, (1994).
- [359] BREZIS, H., *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Ed. Masson, (1993).
- [360] BREZIS H.; NIRENBERG, H., *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **317**, 465-472, (1993).
- [361] CAILLERIE, D., *Thin Elastic and Periodic Plates*, Math. Methods Appl. Sci. **6**, 159-191, (1984).
- [362] CAILLERIE, D., *Homogénéisation des équations de la diffusion stationnaire dans les cylindres aplatis*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **15**, 295-319, (1981).
- [363] CAMPANATO, S., *Equazioni ellittiche del secondo ordine e spazi $\mathcal{L}^{2,\lambda}$* , Ann. Mat. Pura Appl. **69**, 321-380, (1965).
- [364] CHAPELLE, D., *Etude des phénomènes de verrouillage numérique pour les problèmes de coques minces*, Thèse de Doctorat, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, (1996).
- [365] CHEN, Y.-Z.; WU, L.-C., *Second Order Elliptic Equations and Elliptic Systems*, Translations of Mathematical Monographs **174**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1998).
- [366] CIARLET, P.G., *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures : An Asymptotic Analysis.*, R.M.A. **14**. Masson and Springer-Verlag, Paris and Heidelberg, (1990).

- [367] CIARLET, P.G., *Elasticité tridimensionnelle*, RMA 1, Ed. Masson, (1986).
- [368] CIARLET, P.G., *Mathematical Elasticity, Vol I : Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam.
- [369] CIARLET, P.G., *Mathematical Elasticity, Vol II : Theory of Plates*, Studies in Mathematics and its Applications, 27, North-Holland, Amsterdam, (1998).
- [370] CIARLET, P.G., *Mathematical Elasticity, Vol III : Theory of Shells*, North-Holland, Amsterdam.
- [371] CIARLET, P.G.;DESTUYNDER, P., *A justification of the two-dimensional plate model*, J. Mécanique **18**, 315-344, (1979).
- [372] CIARLET, P.G. ; LODS, V., *Asymptotic Analysis of Linearly Elastic Shells. I. Justification of Membrane Shell Equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **136**, 119-161, (1996).
- [373] CIARLET, P.G. ; LODS, V. ; MIARA, B., *Asymptotic Analysis of Linearly Elastic Shells. II. Justification of Flexural Shell Equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **136**, 163-190, (1996).
- [374] CIARLET, P.G. ; LODS, V. ; MIARA, B., *Analyse Asymptotique des coques linéairement élastiques. II. Coques "en flexion"*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **319**, 95-100, (1994).
- [375] CIARLET, P.G. ; MIARA, B., *Justification of the Two-Dimensional Equations of a Linearly Elastic Shallow Shell*, Comm. Pure Appl. Math. **45**, 327-360, (1992).
- [376] CIORANESCU, D. ; SAINT JEAN PAULIN, J., *Conductivity problems for thin tall structure depending on several small parameters*, Adv. Math. Sci. Appl. **5**, 287-320, (1995).
- [377] COUTAND, D., *Analyse mathématique de modèles de plaques et de coques en élasticité non linéaire*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, (2000).
- [378] DAMLAMIAN, A. ; VOGELIUS, M., *Homogenization limits of the equations of elasticity in thin domains*, SIAM J. Math. Anal. **18**, 435-451, (1987).
- [379] DAUGE, M. ;GRUAI, I., *Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastrée*, Note C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **321**, 375-380, (1995).
- [380] DAUGE, M. ;GRUAI, I., *Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate, I. Optimal error estimates*, Asymptot. Anal. **13**, 197-197, (1996).
- [381] DAUGE, M. ;GRUAI, I., *Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate, II. Analysis of the boundary layer terms*, Asymptot. Anal. **16**, 99-124, (1998).
- [382] DAUGE, M. ;GRUAI, I., *Edge layers in thin elastic plates*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **157**, 335-347, (1998).
- [383] DAUGE, M. ;GRUAI, I., RÖSSLE, A., *The Influence of Lateral Boundary Conditions on the Asymptotics in Thin Elastic Plates I*, Prépublication 97-28, IRMAR, Rennes (1997).
- [384] DAUGE, M. ;GRUAI, I., RÖSSLE, A., *The Influence of Lateral Boundary Conditions on the Asymptotics in Thin Elastic Plates II*, Prépublication 97-29, IRMAR, Rennes (1997).
- [385] DAUGE, M. ; DJURDJEVIC, I. ; RÖSSLE, A., *Higher Order Bending and Membrane Responses of Thin Linearly Elastic Plates*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **326** (4), 519-524, (1998).
- [386] DESTUYNDER, P., *A Classification of Thin Shell Theories*, Acta Appl. Math. **4**, 15-63, (1985).
- [387] DESTUYNDER, P. ; SALAUN, M., *Mathematical Analysis of Thin Plate Models*, Mathématiques & Applications **24**, SMAI, Springer (1996).
- [388] DESTUYNDER, P., *Comparaison entre les modèles tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité.*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **15**, 331-369, (1981).
- [389] DESTUYNDER, P., *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, (1980).
- [390] DESTUYNDER, P., *Estimations d'erreur explicites pour les modèles de plaques de Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **325**, 233-238, (1997).

- [391] DESTUYNDER, P. ; MÉTIVET, B., *Estimation d'erreur explicite dans une méthode d'éléments finis conforme*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **323**, 679-684, (1996).
- [392] EULER, L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, (1744). Appendix I, *De curvis elasticis*, Bousquet, Lausanne and Geneva. English Translation : Oldfather W.A., Ellis C.A., Brown D.M., *Isis* **20**, 72-160, (1993).
- [393] FIFE, P., *Nonlinear deflection of thin elastic plates under tension*, *Comm. Pure Appl. Math.* **14**, 81-112, (1961).
- [394] FOX, D. ; RAOULT, A. ; SIMO, J.C., *Modèles asymptotiques invariants pour les structures minces élastiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **315**, 235-240, (1992).
- [395] FOX, D. ; RAOULT, A. ; SIMO, J.C., *A justification of Nonlinear Properly Invariant Plate Theories*, *Arch. Rational Mech. Anal.* **124**, 157-199, (1993).
- [396] FRIESECKE, G. ; JAMES, R.D. ; MÜLLER, S., *Rigorous derivation of nonlinear plate theory and geometric rigidity*, preprint.
- [397] GALDI, G.P., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol. 1, Linearized steady problems.*, Springer Tracts in Natural Philosophy. **38**, Springer-Verlag, New York, (1994).
- [398] GAUDIELLO, A ; GUSTAFSSON, B. ; LEFTER, C. ; MOSSINO J., *Asymptotic analysis for monotone quasilinear problems in thin multidomains*, preprint.
- [399] GAUDIELLO, A ; GUSTAFSSON, B. ; LEFTER, C. ; MOSSINO J., *Asymptotic analysis of a class of minimization problems in a thin multidomain*, preprint.
- [400] GENEVEY, K., *Remarks on Nonlinear Membrane Shell Problems*, *Math. Mech. Solids* **2**, 215-237, (1997).
- [401] GEYMONAT, G. ; KRASUCKI, F. ; MARIGO, J.-J., *Stress distribution in anisotropic elastic composite beams.*, In *Applications of Multiple Scalings in Mechanics*, P.G. Ciarlet and E. Sanchez Palencia eds., Masson, Paris, 118-133, (1987).
- [402] GIAQUINTA, M., *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, *Annals. Math. Studies* **105**, Princeton Univ. Press, (1983).
- [403] GIAQUINTA, M., *Introduction to regularity theory of non-linear elliptic systems*, *Lectures in Mathematics*, ETH Zürich. Birkhäuser, Basel, (1993).
- [404] GILBARG, D. ; TRUDINGER, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag (1997).
- [405] GRISVARD, P., *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Advanced Publishing Program, (1985).
- [406] GRISVARD, P., *Singularities in boundary value problems*, *Research Note in Applied Math. RMA* **22**, Masson, Springer-Verlag, (1992).
- [407] GUICHARDET, A., *Théorie de la représentation des groupes*, cours de l'Ecole Polytechnique, (1992).
- [408] GUIDUGLI, P.P., *Mathematical problems in the constitutive theory of finite elasticity*, *Rend. Sem. Math. Univ. Politec. Torino* **53** (1), 1-12, (1995).
- [409] HAMILTON, R.S., *The inverse function theorem of Nash and Moser*, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **7**, 65-222, (1982).
- [410] HILL, J.M. ; ARRIGO, D.J., *Transformations and Equation Reductions in Finite Elasticity I : Plane Strain Deformations*, *Math. Mech. Solids* **1**, 155-175, (1996).
- [411] HÖRMANDER, L., *On the theory of partial differential operators*, *Acta. Math.* **94**, 161-248, (1955).

- [412] JOHN, F., *Estimates for the Derivatives of the Stress in a Thin Shell and Interior Shell Equations*, Comm. Pure Appl. Math. **18**, 235-267, (1965).
- [413] JOHN, F., *Refined Interior Equations For Thin Elastic Shells*, Comm. Pure Appl. Math. **24**, 583-615, (1971).
- [414] JOHN, F., *Estimates for the error in the equations of non-linear plate theory*, New York Univ., Courant Inst. Math. Sci. , Res. Rep. IMM-NYU 308, (1963).
- [415] JOHN, F., *Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type*, Comm. Pure Appl. Math. **13**, 239-296, (1960).
- [416] KIRCHHOFF, G., *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Schibe*, J. Reine Angew. Math. **40**, 51-58, (1850).
- [417] KOZLOV, V.A. ; MAZ'YA, V.G. ; SCHWAB, C., *On Singularities of Solutions of the Displacement Problem of Linear Elasticity near the Vertex of a Cone*, Arch. Rational Mech. Anal. **119**, 197-227, (1992).
- [418] KOZLOV, V.A. ; MA'ZYA, V.G. ; MOVCHAN, A.B., *Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure.*, Asympt. Anal. **11**, 343-415, (1995).
- [419] KOZLOV, V.A. ; MAZ'YA, V.G. ; ROSSMANN J., *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Points Singularities*, Mathematical Surveys and Monographs **52**, American Mathematical Society, (1997).
- [420] KONDRATIEV, V.A. ; OLEINIK, O.A., *Hardy's and Korn's type inequalities and their applications*, Rend. Mat. (7) **10**, 641-666, Roma (1990).
- [421] KOZLOV, V.A. ; MAZ'YA, V.G. ; SCHWAB, C., *On singularities of solutions to the Dirichlet problem of hydrodynamics near the vertex of a cone*, J. Reine Angew. Math. **456**, 65-97, (1994).
- [422] KRILOV, N.V., *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*, Graduate studies in Mathematics **12**, American Mathematical Society, (1996).
- [423] LE DRET, H., *Convergence of displacements and stress in linearly elastic slender rods as the thickness goes to zero.*, Asympt. Anal. **10**, 367-402, (1995).
- [424] LE DRET, H. ; RAOULT, A., *The Membrane Shell Model in Nonlinear Elasticity : A Variational Asymptotic Derivation*, J. Nonlinear Sci. **6**, 59-84 (1996).
- [425] LE DRET, H. ; RAOULT, A., *The quasiconvex envelope of the Saint Venant-Kirchhoff stored energy function*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **125**, 1179-1192, (1995).
- [426] LE DRET, H. ; RAOULT, A., *The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity*, J. Math. Pures Appl. **74**, 549-578, (1995).
- [427] LE TALLEC, *Numerical Methods for Nonlinear Three-Dimensional Elasticity*, Handbook of Numerical Analysis, Elsevier, (??).
- [428] LIBAI, A. ; SIMMONDS, J.G., *The Nonlinear Theory of Elastic shells. One spatial Dimension*, Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, (1988).
- [429] LIONS, J.-L., *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*, Lecture Notes in Math. **323**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1973).
- [430] LODS, V. ; MIARA, B., *Nonlinear Elastic Shell Models : A Formal Asymptotic Approach II : The Flexural Model*, Arch. Rational Mech. Anal. **142**, 355-374, (1998).
- [431] LOVE, A.E.H., *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Fourth Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, (1934). Reprinted by Dover Publications, New York, (1944).
- [432] MALÝ, J. ; ZIEMER, W.P., *Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs **51**, American Math. Soc., (1997).

- [433] MARDARE, C., *Analyse asymptotique et modèles bi-dimensionnels des coques linéairement rigides*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Maris Curie, (1997).
- [434] MAZ'YA, V. ; NAZAROV, S. ; PLAMENEVSKIJ, B., *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singular Perturbed Domains, I*, Operator Theory, Advances and Applications **111**, Birkhäuser, (2000).
- [435] MAZ'YA, V. ; NAZAROV, S. ; PLAMENEVSKIJ, B., *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singular Perturbed Domains, II*, Operator Theory, Advances and Applications **112**, Birkhäuser, (2000).
- [436] MIARA, B. ; SANCHEZ-PALENCIA, E., *Asymptotic analysis of linearly elastic shells*, Asymptot. Anal. **12**, 41-54, (1996).
- [437] MIARA, B. ; VALENTE, V., *Contrôlabilité exacte d'une coque de Koiter par action sur sa frontière*, preprint (1997).
- [438] MIARA, B., *Nonlinear Elastic Shell Models : A Formal Asymptotic Approach I : The Membrane Model*, Arch. Rational Mech. Anal. **142**, 331-353, (1998).
- [439] MIELKE, A., *On the Justification of Plate Theories in Linear Elasticity Theory Using Exponential Decay Estimates*, J. Elasticity **38**, 165-208, (1995).
- [440] MIELKE, A., *On Saint-venant's problem for an elastic strip*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **110A**, 161-181, (1988).
- [441] MIELKE, A., *Saint-Venant's Problem and Semi-Inverse Solutions in Nonlinear Elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **102 (3)**, 205-229 (1988).
- [442] MIELKE, A., *Corrigendum to : "Saint-Venant's problem and semi-inverse solutions in nonlinear elasticity"*, Arch. Rational Mech. Anal. **110 (4)**, 351-352 (1990).
- [443] MIELKE, A., *Reduction of PDEs on domains with several unbounded directions : A first step towards modulations equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43**, 449-470, (1992).
- [444] MORGENSTERN, D., *Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie*, Arch. Rational Mech. Anal. **4**, 145-152, (1959).
- [445] MORREY, C.B., *Second order elliptic systems of differential equations*, Ann. of Math. Studies **33**, Princeton Univ. Press, 101-159, (1954).
- [446] MORREY, C.B., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1966).
- [447] MURAT, F. ; SILI, A., *Problèmes monotones dans les cylindres de faible diamètre*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **319**, 567-572, (1994).
- [448] MURAT, F. ; SILI, A., *Problèmes monotones dans les cylindres de faible diamètre formés de matériaux hétérogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **320**, 1199-1204, (1995).
- [449] MURAT, F. ; SILI, A., *Comportement asymptotique des solutions du système de l'élasticité linéarisée anisotrope hétérogène dans les cylindres minces*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **328**, 179-184, (1999).
- [450] MURAT, F. ; SILI, A., *Anisotropic, heterogeneous, linearized elasticity problems in thin cylinders*, en préparation.
- [451] NIRENBERG, L., *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat., Ser. **3 123**, 115-162 (1959).
- [452] NIRENBERG, L., *Variational and Topological methods in nonlinear problems*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **4 (3)**, 267-302, (1981).
- [453] NIRENBERG, L., WALKER, H., *The Null Space of Elliptic Partial Differential Operators in \mathbb{R}^n* , J. Math Anal. Appl. **42**, 271-301, (1973).

- [454] NITSCHKE, J.A., *On Korn's second inequality*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **15** (3), 237-248, (1981).
- [455] PAUMIER, J.-C., *Existence and convergence of the expansion in the asymptotic theory of elastic thin plates*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **25** (3), 371-391, (1991).
- [456] PAUMIER, J.-C., *Analyse de certains problèmes non linéaires : modèles de plaques et de coques*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, (1985).
- [457] PAUMIER, J.-C., *Existence theorems for nonlinear elastic plates with periodic boundary conditions*, J. Elasticity **23**, 233-252, (1990).
- [458] PAUMIER, J.-C. ; CHENAIS, D., *On the locking phenomenon for a class of elliptic problems*, Numer. Math. **67**, 427-440, (1994).
- [459] PAUMIER, J.-C. ; RAOULT, A., *Asymptotic consistency of the polynomial approximation in the linearized plate theory : application to the Reissner-Mindlin model*, Rapport technique 164 LMC-IMAG Grenoble, (1996).
- [460] SAFONOV, M.V., *On the classical solution of Bellman's elliptic equation*, Dohl. Akad. Nauk SSSR **278** (1984). English trans. : Sov. Math. Dokl. **30**, 482-485, (1984).
- [461] SANCHEZ-PALENCIA, E., *Statique et dynamique des coques minces I. Cas de flexion pure non inhibée*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **309**, 411-417, (1989).
- [462] SANCHEZ-PALENCIA, E., *Statique et dynamique des coques minces II. Cas de flexion pure inhibée - Approximation membranaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **309**, 411-417, (1989).
- [463] SANCHEZ-PALENCIA, E., *Surfaces et coques élastiques minces : problèmes et défis*, La vie des Sciences, **12** (3), 239-258, (1995).
- [464] SCHECHTER, M., *Modern methods in partial differential equations*, McGraw-Hill, (1977).
- [465] SCHWAB, C., *Boundary Layer resolution in Hierarchical Plate Modelling*, Math. Methods Appl. Sci. **18**, 345-370, (1995).
- [466] SCHWAB, C., *A-posteriori modeling error estimation for hierachic plate models*, Numer. Math. **74**, 221-259, (1996).
- [467] SHOIKHET, B.A., *An energy identity in physically nonlinear elasticity and error estimates of the plate equations*, Prikl. Matem. Mekhan. **40** (2) (1976) 317-326. English translation J. Appl. Math. Mech. 291-301, (1976).
- [468] SIMON, L., *Schauder estimates by scaling*, Calc. Var. Partial Differential Equations **5**, 391-407, (1997).
- [469] SLICARU, S.L., *Quelques Résultats dans la théorie des coques linéairement élastiques à surface moyenne uniformément elliptique ou compacte sans bord*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, (1998).
- [470] STOKER, J.J., *Nonlinear Elasticity*, Notes on Math. and its Applications, Gordon and Breach, Science publishers, New York, London, Paris, (1968).
- [471] STOKER, J.J., *Topics in Non-linear Elasticity*, Notes by R.W. Dickey, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, (1964).
- [472] STRUWE, M., *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, 2nd ed., Springer, (1996).
- [473] TEMAM, R., *Problèmes Mathématiques en Plasticité*, Gauthier-Villar, Paris (1983). English translation : *Mathematical Problems in Plasticity*, Gauthier-Villar, Paris, (1985).
- [474] TOUPIN, R.A., *Saint-Venant's Principle*, Arch. Rational Mach. Anal. **18**, 83-96, (1964).
- [475] TRABUCHO, L. ; VIANO, J.M., *Mathematical modelling of rods*, Handbook of Numerical Analysis **4**, North-Holland, Amsterdam, (1996).

- [476] TRUDINGER, N., *A new approach to the Schauder estimates for linear elliptic equations*, Volume 14 of Proceedings of the CMA, pages 52-59. Australian National University, Canberra, (1986).
- [477] TRUDINGER, N., *Lectures on nonlinear second order elliptic equations*, Nankai Institute of Mathematics, Tianjin, China (1985).
- [478] VALENT, T., *A property of Multiplication in Sobolev Spaces. Some Applications*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **74**, 61-73, (1985).
- [479] VALENT, T., *Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **60**, 165-181, (1978).
- [480] VALENT, T., *Sulla differenziabilità di un operatore legato a una classe di sistemi differenziali quasi-lineari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **57**, 311-323, (1977).
- [481] VALENT, T., *Sulla differenziabilità dell'operatore di Nemyisky*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **65**, 311-323, (1978).
- [482] VALENT, T., *Boundary Value Problems of Finite Elasticity. Local theorems on existence, uniqueness, and analytic dependence on data.*, Springer Tracts in Natural Philosophy, **31**, New York etc. : Springer-Verlag, (1988).
- [483] VALENT, T., *Local theorems of existence and uniqueness in finite elastostatics*, in Finite elasticity, (D.E. Carlson, R.T. Shield, Editors), Proc. IUTAM Symp., Bethlehem, 401-422, (1982).
- [484] VOGELIUS, M. ; BABUSKA, I., *On a Dimensional reduction method I. The Optimal Selection of Basis Functions*, Math. Comp. **37** (155), 31-68 , (1981).

Dernière partie

Supraconducteurs

- [485] AFTALION, A. *On the Minimizers of the Ginzburg-Landau Energy for High Kappa : the One-dimensional Case*, European J. Appl. Math. **8**, 331-345, (1997).
- [486] AFTALION, A. *On the Minimizers of the Ginzburg-Landau Energy for High Kappa : the Axially Symmetric Case*, preprint of Ecole Normale Supérieure Paris, (1996).
- [487] AFTALION, A., *Convergence of minimizers of the Ginzburg-Landau energy in one dimension*, preprint.
- [488] BERESTYCKI, H., BONNET, A., CHAPMAN S.J., *A Semi-elliptic System Arising in the Theory of type-II Superconductivity*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **1**, 1-21, (1994).
- [489] BETHUEL, F. ; BRÉZIS, H. ; HELEIN, F., *Ginzburg-Landau vortices*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **13**, Boston, Birkhaeuser, (1994).
- [490] BOLLEY, C. ; HELFFER, B., *Rigorous results for the Ginzburg-Landau equations associated to a superconducting film in the weak κ limit*, Rev. Math. Phys. **8**, 43-83, (1996).
- [491] CHAPMAN, S.J., *Superheating Field of type II superconductors*, SIAM J. Appl. Math. **55**, 1233-1258, (1995).
- [492] CHAPMAN, S.J. ; HOWISON, S.D. ; OCKENDON, J.R., *Macroscopic Models of Superconductivity*, SIAM Rev. **34**, 529-560, (1992).
- [493] CHAPMAN, S.J. ; RUBINSTEIN J. ; SCHATZMAN, M., *A Mean-field Model of Superconducting vortices*, European J. Appl. Math. **7**, 97-111, (1996).
- [494] DE GENNES, P.G., *Superconductivity of Metals and Alloys*. New York and Amsterdam, (1966).
- [495] DU, Q. ; GUNZBURGER, M.D. ; PETERSEN, J.S., *Analysis and Approximation of the Ginzburg-Landau model of superconductivity*, SIAM Rev. **34**, 1, 54-81, (1992).
- [496] DAUTRAY, R., LIONS, J.-L., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Coll. du CEA, Masson, Tome 2, (1985).
- [497] GINZBURG, V.L. ; LANDAU, L.D., *On the theory of superconductivity*, Soviet Phys., JETP **20**, 1064, (1950).
- [498] GIRAULT, V., RAVIARD, P.-A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, (1986).
- [499] LIN, F.H., *Complex Ginzburg-Landau equations and dynamics of vortices, filaments and codimension-2 submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (4), 385-441, (1998).
- [500] MORREY, C.B., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Die Grundlehrender Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen **130**, Springer-Verlag N.Y., (1966).
- [501] SANDIER, E. ; SERFATY, S., *A Rigorous Derivation of a Free-Boundary Problem Arising in Superconductivity*, preprint.
- [502] SANDIER, E. ; SERFATY, S., *High Kappa Limit of the Ginzburg-Landau equations of Superconductivity*, preprint.
- [503] SERFATY, S., *Etude mathématique de l'équation de Ginzburg-Landau de la supraconductivite*, Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, (1999).
- [504] SERFATY, S., *Stable Configurations in Superconductivity : Uniqueness, Multiplicity and Vortex-Nucleation*, preprint of University of Paris-Sud, (1997).

- [505] SERFATY, S., *Local Minimizers for the Ginzburg-Landau Energy near Critical Magnetic Field*, preprint of University of Paris-Sud, (1997).

Thomas-Fermi-von-Weizsäcker theory of atoms

- [506] ALLAIRE, G. *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal. **23** (6), 1482-1518, (1992).
- [507] AVRON, J.E.; HERBST, L.W., *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect*, Comm. Math. Phys. **52**, 239-254, (1977).
- [508] BALBÁS, L.C.; BARRANCO, M.; GARCÍAS, F.; MAÑANES, A.; NAVARRO, J.; RUBIO, A.; SERRA, L., *The static polarisability of metal clusters and spheres in an improved Thomas-Fermi approximation*, J. Phys. : Condens. Matter **1**, 10391-10405, (1989).
- [509] BAUER, D.; CORNOLTI, F.; MACCHI, A.; PITRELLI, D., *Ionization of the Thomas-Fermi atom in intense laser fields : the static limit revisited*, J. Phys. B **33**, 829-842, (2000).
- [510] BENGURIA, R.; BRÉZIS, H.; LIEB, E.H., *The Thomas-Fermi-von Weizsäcker theory of atoms and molecules*, Comm. Math. Phys., **79**, 167-180, (1981).
- [511] BENGURIA, R.; LIEB, E.H., *The most negative ion in the Thomas-Fermi-von-Weizsäcker theory of atoms and molecules*, J. Phys. B **18**, 1045-1059, (1985).
- [512] BLANC, X.; LE BRIS, C., *Thomas-Fermi type models for polymers and thin films*, Adv. Differential Equations **5**(7-9), 977-1032, (2000).
- [513] BRÉZIS, H., *Semilinear Equations in \mathbf{R}^N Without Conditions at Infinity*, Appl. Math. Optim. **12**, 271-282, (1984).
- [514] CATTO, I.; LE BRIS, C.; LIONS, P.-L., *Mathematical theory of thermodynamics limits, Thomas-Fermi type models*, Oxford Mathematical Monographs, (1998).
- [515] CATTO, I.; LE BRIS, C.; LIONS, P.-L., *Limite thermodynamique pour les modèles de type Thomas-Fermi [Thermodynamic limit for Thomas-Fermi type models]*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **322**, 357-364, (1996).
- [516] LIEB, E.H.; NARNHOFER, H., *The thermodynamic limit for Jellium*, J. Stat. Phys. **12**, 291-310, (1975).
- [517] NGUETSSENG, G., *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal. **20** (3), 608-623, (1989).
- [518] PARR, R.G.; YANG, W., *Density-Functional Theory of Atoms and Molecules*, Oxford University Press, (1989).
- [519] SOLOVEJ, J.P., *Universality in the Thomas-Fermi-von Weizsäcker model of atoms and molecules*, Comm. Math. Phys. **129**, 561-598, (1990).

Dynamique Moléculaire

- [520] ANDERSEN, J.U.; BONERUP, E.; HANSEN, K., *On the concept of temperature for a small isolated system*, J. Chem. Phys. **114** (15), 6518-6525, (2001).
- [521] CAO, J.; MARTYNA, G.J., *Adiabatic path integral molecular dynamics methods. 2. Algorithms*, J. Chem. Phys. **104**, 2028, (1996).

- [522] CHALLACOMBE, M.; WHITE, C.; HEAD-GORDON, M., *Periodic boundary conditions and the fast multipole method*, J. Chem. Phys. **107** (23), 10131-10140, (1997).
- [523] ERCOLESSI, F.; ADAMS, J.B., *Interatomic Potentials from First-Principles Calculations : the Force-Matching Method*, Europhys. Lett. **26** (8), 583-588, (1994).
- [524] HAIRER, E.; LUBICH, CHR.; WANNER, G., *Geometric Numerical Integration, Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, (2002).
- [525] HOOVER, W.G., Phys. Rev. A **31**, 1695, (1985).
- [526] HUMPHREYS, D.D.; FRIESNER, R.A.; BERNE, B.J., *A Multiple-Time-Step Molecular Dynamics Algorithm for Macromolecules*, J. Phys. Chem. **98**, 6885-6892, (1994).
- [527] HUTTER, J.; TUCKERMAN, M.E.; PARINELLO, M., *Integrating the Car-Parrinello equations. III. Techniques for ultrasoft pseudopotentials*, J. Chem. Phys. **102** (2), 859-871, (1995).
- [528] JANG, S.; VOTH, G., *Simple reversible molecular dynamics algorithms for Nosé-Hoover chain dynamics*, J. Chem. Phys. **107** (22), 9514-9526, (1997).
- [529] JANG, S.; VOTH, G., *Response to "Comment on 'Simple reversible molecular dynamics algorithms for Nosé-Hoover chain dynamics'"*[J. Chem. Phys. **110**, 3623 (1999)], J. Chem. Phys. **110** (7), 3626-3628, (1999).
- [530] LIU, Y.; TUCKERMAN, M.E., *Generalized Gaussian moment thermostating : A new continuous dynamical approach to the canonical ensemble*, J. Chem. Phys. **112** (4), 1685-1700, (2000).
- [531] MARTONAK, R.; MOLTENI, C.; PARRINELLO, M., *A new constant-pressure ab initio/classical molecular dynamics method : simulation of pressure-induced amorphization in a Si₃₅H₃₆ cluster*, Computational Materials Science **20**, 293-299, (2001).
- [532] MARTYNA, G.J.; HUGHES, A.; TUCKERMAN, M.E., *Molecular dynamics algorithms for path integrals at constant pressure*, J. Chem. Phys. **110** (7), 3275-3290, (1999).
- [533] MARTYNA, G.J.; KLEIN, M.L.; TUCKERMAN, M.E., *Nosé-Hoover chains : The canonical ensemble via continuous dynamics*, J. Chem. Phys. **97** (4), 2635-2643, (1992).
- [534] MARTYNA, G.J.; TUCKERMAN, M.E., *A new reciprocal space based method for treating long range forces in clusters*, J. Chem. Phys. **110**, 2810, (1999).
- [535] MARTYNA, G.J.; TUCKERMAN, M.E., *Symplectic reversible integrators : Predictor-corrector methods*, J. Chem. Phys. **102** (20), 8071-8077, (1995).
- [536] MARTYNA, G.J.; TUCKERMAN, M.E.; TOBIAS, D.J.; KLEIN, M.L., *Explicit reversible integrators for extended systems dynamics*, Mol. Phys. **87** (5), 1117-1157, (1996).
- [537] MATUBAYASI, N.; NAKAHARA, M., *Reversible molecular dynamics for rigid bodies and hybrid Monte Carlo*, J. Chem. Phys. **110** (7), 3291-3301, (1999).
- [538] NAKANO, A., *Parallel multilevel preconditioned conjugate-gradient approach to variable-charge molecular dynamics*, Comp. Phys. Comm. **104**, 59-69, (1997).
- [539] NOSÉ, S., J. Chem. Phys. **81**, 561, (1985).
- [540] PAYNE, M.C.; TETER, M.P.; ALLAN, D.C.; ARIAS, T.A.; JOANNOPOULOS, J.D., *Iterative minimization techniques for ab initio total-energy calculations : molecular dynamics and conjugate gradients*, Reviews of Modern Physics **64** (4), 1045-1096, (1992).
- [541] PARRINELLO, M.; RAHMAN, A., *Strain fluctuations and elastic constants*, J. Chem. Phys. **76** (5), 2662-2666, (1982).
- [542] PROCACCI, P.; BERNE, B.J., *Multiple time scale methods for constant pressure molecular dynamics simulations of molecular systems*, Mol. Phys. **83** (2), 255-272, (1994).
- [543] PROCACCI, P.; BERNE, B.J., *Computer simulation of solid C₆₀ using multiple time-step algorithms*, J. Chem. Phys. **101** (3), 2421-2431, (1994).

- [544] RAY, J.R. ; MOODY, M.C. ; RAHMAN, A., *Molecular dynamics calculation of elastic constants for a crystalline system in equilibrium*, Phys. Rev. B **32** (2), 733-735, (1985).
- [545] RYCKAERT, J.P. ; ARIALDI, G. ; MELCHIONNA, S., *Molecular dynamics of polymer with explicit but frozen hydrogens*, Mol. Phys. **99** (3), 155-165, (2001).
- [546] SAMUELSON, S. ; MARTYNA, G.L., *Two dimensional umbrella sampling techniques for the computer simulation study of helical peptides at thermal equilibrium : The 3K(I) peptide in vacuo and solution*, J. Chem. Phys. **109**, 11061, (1998).
- [547] SANZ-SERNA, J.M. ; CALVO M.P., *Numerical Hamiltonian Problems*, Applied Mathematics and Mathematical Computation **7**, Chapman and Hall, London, (1994).
- [548] SCHLICK, T. ; FIGUEROA, S. ; MEZEI, M., *A molecular dynamics simulation of a water droplet by the implicit-Euler/Langevin scheme*, J. Chem. Phys. **94** (3), 2118-2129, (1991).
- [549] SMARGIASSI, E., *Defect properties and diffusion in sodium using ab initio molecular dynamics*, Computational Materials Science **20**, 416-422, (2001).
- [550] STUART, S.J. ; ZHOU, R. ; BERNE, B.J., *Molecular dynamics with multiple time scales : The selection of efficient reference system propagators*, J. Chem. Phys. **105** (4), 1426-1436, (1996).
- [551] TOXVAERD, S., *Comment on : reversible multiple time scale molecular dynamics*, J. Chem. Phys. **99** (3), 2277, (1993).
- [552] TUCKERMAN, M.E., *Designing molecular dynamics methods and integration algorithms*, submitted to J. Phys. Chem.
- [553] TUCKERMAN, M.E. ; BERNE, B.J., *Molecular dynamics in systems with multiple time scales : Systems with stiff and soft degrees of freedom and with short and long range forces*, J. Chem. Phys. **95** (11), 8362-8364, (1991).
- [554] TUCKERMAN, M.E. ; BERNE, B.J., *Stochastic molecular dynamics in systems with multiple time scales and memory friction*, J. Chem. Phys. **95** (6), 4389-4396, (1991).
- [555] TUCKERMAN, M.E. ; BERNE, B.J. ; MARTYNA, G.J., *Reversible multiple time scale molecular dynamics*, J. Chem. Phys. **97** (3), 1990-2001, (1992).
- [556] TUCKERMAN, M.E. ; BERNE, B.J. ; MARTYNA, G.J., *Reply to Comment on : Reversible multiple time scale molecular dynamics*, J. Chem. Phys. **99** (3), 2278-2279, (1993).
- [557] TUCKERMAN, M.E. ; BERNE, B.J. ; MARTYNA, G.J., *Molecular dynamics algorithm for multiple time scales : Systems with long range forces*, J. Chem. Phys. **94** (10), 6811-6815, (1991).
- [558] TUCKERMAN, M.E. ; BERNE, B.J. ; ROSSI, A., *Molecular dynamics algorithm for multiple time scales : Systems with disparate masses*, J. Chem. Phys. **94**(2), 1465-1469, (1991).
- [559] TUCKERMAN, M.E. ; MARTYNA, G.J., *Understanding Molecular Dynamics : Techniques and Applications*, J. Phys. Chem. B **104**, 159-178, (2000).
- [560] TUCKERMAN, M.E. ; MARTYNA, G.J., *Comment on "Simple reversible molecular dynamics algorithms for Nosé-Hoover chain dynamics"[J. Chem. Phys. 107, 9514 (1997)]*, J. Chem. Phys. **110** (7), 3623-3625, (1999).
- [561] TUCKERMAN, M.E. ; MARTYNA, G.J. ; BERNE, B.J., *Molecular dynamics algorithm for condensed systems with multiple time scales*, J. Chem. Phys. **93** (2), 1287-1291, (1990).
- [562] TUCKERMAN, M.E. ; MARTYNA, G.J. ; KLEIN, M.L. ; BERNE, B.J., *Efficient molecular dynamics and hybrid monte carlo algorithms for path integrals*, J. Chem. Phys. **99**, 2796, (1993).
- [563] TUCKERMAN, M.E. ; MARX, D. ; KLEIN, M.L. ; PARINELLO, M., *Efficient and general algorithms for path integral Car-Parrinello molecular dynamics*, J. Chem. Phys. **104** (14), 5579-5588, (1996).
- [564] TUCKERMAN, M.E. ; MUNDY, C.J. ; KLEIN, M.L., *Toward a Statistical Thermodynamics of Steady States*, Phys. Review Letters **78** (11), 2042-2045.

- [565] TUCKERMAN, M.E. ; MUNDY, C.J. ; MARTYNA, G.J., *On the classical statistical mechanics of non-Hamiltonian systems*, Europhys. Lett. **45**, 149, (1999).
- [566] TUCKERMAN, M.E. ; PARINELLO, M., *Integrating the Car-Parrinello equations. I. Basic integration techniques*, J. Chem. Phys. **101** (2), 1302-1315, (1994).
- [567] TUCKERMAN, M.E. ; PARINELLO, M., *Integrating the Car-Parrinello equations. II. Multiple time scale techniques*, J. Chem. Phys. **101** (2), 1316-1329, (1994).
- [568] TUCKERMAN, M.E. ; UNGAR, P.J. ; VON ROSENVINGE, T. ; KLEIN, M.L., *Ab Initio Molecular Dynamics Simulations*, J. Chem. Phys. **100**, 12878-12887, (1996).
- [569] TUCKERMAN, M.E. ; VON ROSENVINGE, T. ; HUGHES, A. ; MARTYNA, G.J., *Molecular dynamics algorithms for path integral at constant pressure*, submitted to Mol. Phys. (received Jan. 1997).
- [570] TUCKERMAN, M.E. ; YARNE, D.A. ; SAMUELSON, S.O. ; HUGHES, A.L. ; MARTYNA, G.J., *Exploiting multiple levels of parallelism in Molecular Dynamics based calculations via modern techniques and software paradigms*, Comp. Phys. Comm. **128**, 333, (2000).
- [571] ZHOU, R. ; STUART, S.J. ; BERNE, B.J., *Molecular dynamics for nonequilibrium systems in which there are a small number of very hot particles in a bath : Reference system propagator methods*, J. Chem. Phys. **105** (1), 235-239, (1996).

La Méthode Quasicontinue

- [572] TADMOR, E.B. ; ORTIZ, M. ; PHILLIPS, R., *Quasicontinuum analysis of defects in solids*, Phil. Mag. A **73**, 1529, (1996).
- [573] SHENOY, V.B. ; MILLER, R. ; TADMOR, E.B. ; RODNEY, D. ; PHILLIPS, R. ; ORTIZ, M., *An Adaptive Finite Element Approach to Atomic-Scale Mechanics-The Quasicontinuum Method*, J. Mech. Phys. Solids **47**, 611, (1999).