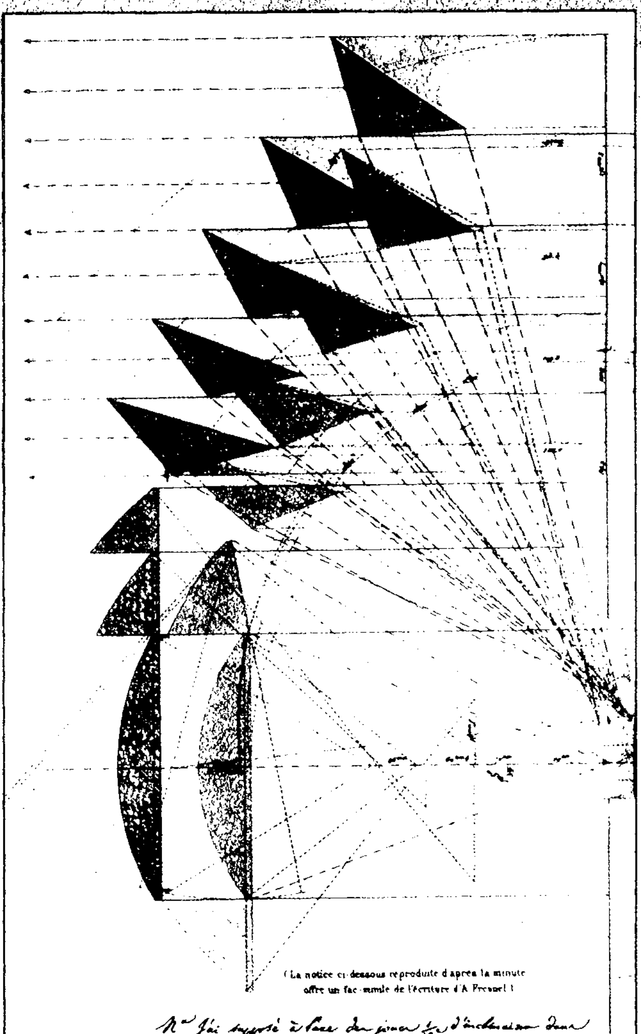
ANNALES
DES PONTS ET CHAUSSÉES
INGÉNIEUR SCIENCE SOCIÉTÉ



INGÉNIEURS-SAVANTS

- Naissance de la notion de travail
- Le raisonnement économique
- Mécanique des fluides et assainissement
- Une culture mathématique

Revue fondée en 1831 nouvelle série N° 82, 1997

FRANÇOIS COSSERAT
ET LE SECRET DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ

Jean-François Pommaret

IL APPARAÎT PARFOIS, TROP RAREMENT PEUT-ÊTRE, DANS LES ARTS OU LES SCIENCES, QUELQUE PERSONNALITÉ ISOLÉE DONT L'ŒUVRE, SURGIE DE NULLE PART, N'EST ATTACHÉE À AUCUNE ÉCOLE DE PENSÉE ET DÉDAIGNE LES HÉRITIERS LORS DE SA MISE AU TOMBEAU. LE SPECTATEUR, TOUT D'ABORD SCEPTIQUE, PRESSENT UN SECRET QUI L'INTRIGUE ET, BIEN PLUS TARD, DEVENU LENTEMENT UN ADMIRATEUR FERVENT, COMPREND ENFIN QU'UN JOUR, UN DIEU DE L'OLYMPE OU D'AILLEURS S'EST AMUSÉ À DESCENDRE SUR TERRE DANS LA PEAU D'UN MORTEL.

Ces rares sursauts de l'esprit, pour étonnants qu'ils soient, sont souvent les vrais moteurs du progrès, et, à ce titre, s'ils ont leurs amis fidèles, ont aussi leurs ennemis jurés. En effet, les spécialistes d'un domaine cerné apprécient les résultats techniques nouveaux mais méprisent volontiers l'idée géniale d'un instant qui réduit en cendre les patientes et timides avancées d'années de tradition.

Mon propos, à l'occasion de cet essai, est de réhabiliter la mémoire d'un « grand ancien » de l'École nationale des ponts et chaussées, François Cosserat (1852-1914), injustement oublié par beaucoup de mécaniciens de cette École et d'ailleurs. Le lecteur intéressé par plus de détails biographiques ou mathématiques peut consulter à ce propos le second livre de la référence [9] qui lui est dédié. Je suis redevable à l'ingénieur général René Malcor (X 26, ENPC 31) de nombreuses informations privées sur la vie et l'œuvre de François Cosserat et de son frère Eugène (1866-1931).

Il me paraît cependant préférable de commencer par une petite histoire qui, pour être personnelle, a néanmoins le mérite de montrer à l'évidence que les voies du destin sont souvent tracées longtemps à l'avance, de façon inattendue.

Un jour de 1962, alors jeune taupin du lycée Louis-le-Grand, j'ai acheté sur un coup de cœur, dans une petite librairie d'occasion de la rue de la Sorbonne, aujourd'hui disparue, le livre « Théorie des corps déformables » publié par les frères Eugène et François Cosserat chez Hermann, un gage de sérieux, en 1909 [4].

A ma sortie de l'École des ponts en 1969, ayant tout à fait oublié ce livre, je suis parti un an aux États-Unis, à Princeton, suivre les cours du mathématicien exceptionnel qu'était Donald C. Spencer et je suis revenu en France pour être attaché à la chaire du Professeur André Lichnerowicz au Collège de France, afin de préparer une thèse de Doctorat. Un livre, publié avec succès en 1978 d'après cette thèse et rapidement traduit en russe, a marqué le début de mon travail de recherche [9].

LE « SECRET » DES FRÈRES COSSERAT

Ne trouvant toujours pas les applications de ces nouvelles méthodes formelles en mécanique et en physique, j'ai donc continué dans la voie des mathématiques pures en développant la théorie de Galois pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles [9]. Dans un dernier chapitre qui présentait quelques développements nouveaux sur la théorie des groupes de transformations, j'avais en particulier obtenu, pour la première fois, des formules explicites pour décrire certains opérateurs liés à ces groupes, qui avaient été introduits par D.C. Spencer en 1972 [6]. En corrigeant les épreuves de ce chapitre, j'ai soudain reconnu que les formules (43) et (44), décrivant sur la page 123 de leur livre ce que les frères Cosserat appelaient « *paramètres différentiels* », était seulement l'exact analogue des formules suivantes :

$$\chi^k_{,i}(x) = g^k_r(x)\partial_i f^r(x) - \delta^k_i = A^k_i(x) - \delta^k_i \quad ,$$
$$\chi^k_{j,i}(x) = g^k_r(x)\partial_i f^r_j(x)$$

cas particulier des formules de la page 573 de (9, 1983) qui décrivent le *premier opérateur de Spencer non-linéaire* mais sont absentes de [6]. Dans ces formules, la transformation $y^k = f^k(x)$ est inversible, on a la relation matricielle $g^k_r(x)\, f^r_i(x) = \delta^k_i$ symbole de Kronecker (1 si $k = i$ et 0 si $k \neq i$) et la matrice $f^k_i(x)$ est orthogonale, c'est-à-dire que $\omega_{kl}(f(x))\, f^k_i(x)\, f^l_j(x) = \omega_{ij}(x)$ lorsque ω est la métrique euclidienne ($\omega_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$). On adopte la *convention d'Einstein* de sommation implicite sur l'indice muet r et tous les indices vont de 1 à n, dimension de l'espace considéré. Il est encore plus remarquable de constater que les formules (4) et (5) de la page 392 de (5) sont alors un cas particulier des formules de ((9, 1983) p 573, (9, 1988) p 233, (9, 1994) p 215) décrivant le *second opérateur de Spencer non-linéaire.*

C'est ainsi que j'ai découvert une partie du secret contenu dans le livre des frères Cosserat. Plus simplement, si en 1975 Spencer avait demandé à un de ses étudiants de calculer les « *opérateurs de Spencer* » contenus dans la référence (6) pour n'importe quel groupe de transformations, en considérant le cas particulier de l'espace ordinaire de dimension 3 et du groupe bien connu des déplacements rigides (3 translations + 3 rotations), cet étudiant aurait retrouvé ligne par ligne, formule après formule, beaucoup des résultats des références [1, 3, 4, 5].

Mais ce n'est pas tout ; mon propos est de montrer que le véritable secret des Cosserat est d'avoir découvert le moyen de passer de la *théorie des groupes* à la *théorie de l'élasticité.* Plus précisément, je voudrais établir (avec le moins de mathématique possible mais de façon assez détaillée cependant pour que le lecteur non-spécialiste puisse découvrir à quel point il semble « *miraculeux* » que des calculs aussi compliqués aient pu être faits à cette époque sans une erreur) le lien qui existe entre les formules précédentes et les *formules fondamentales de l'élastostatique* données par un équilibre de torseur en mécanique des milieux continus :

$$\partial_i \sigma^{ij} = f^j \quad , \quad \partial_r \mu^{rij} + \sigma^{ij} - \sigma^{ji} = m^{ij}$$

dans lesquelles les n^2 quantités σ^{ij}, *non-nécessairement symétriques*, représentent le *tenseur de contrainte,* les $n^2(n-1)/2$ quantités $\mu^{rij} = -\mu^{rji}$ représentent le *tenseur de couple de contrainte*, f^j est la densité volumique de force et $m^{ij} = -m^{ji}$ est la densité volumique de couple. Ces formules sont écrites pour la *première fois* page 137 dans le livre des frères Cosserat (voir encadré p. 62) lorsque $n = 3$, avec la mention :

« Les 18 auxiliaires σ et μ que nous venons d'introduire et les équations qui les lient ne paraissent pas avoir été jusqu'ici envisagées sous une forme aussi générale ; à notre connaissance, elles n'ont été considérées que dans le cas particulier où les 9 quantités μ sont nulles ».

En même temps, je voudrais présenter les motivations qui ont conduit les frères Cosserat à cette nouvelle approche et qui sont résumées dès le début de l'introduction de leur Note ajoutée au tome 3 du célèbre « Traité de mécanique » de P. Appell [1] :

« La mécanique, comme toutes les sciences qui ont pour objet les faits sensibles, est avant tout expérimentale et inductive, et c'est ce caractère qu'elle possède naturellement dans un Traité classique. Mais on peut aussi essayer de la rattacher à un concept général unique et de lui donner une forme déductive ; de cette manière, on lui confère un pouvoir nouveau de découverte et l'on trouve l'explication des notions déjà acquises inductivement. Telle a été l'œuvre de Lagrange, dans sa *Mécanique analytique,* il y a un siècle ».

« A notre époque, une tentative de ce genre mérite d'être renouvelée, car le domaine des phénomènes qui se trouvent dans une dépendance plus ou moins complète de la Mécanique s'est considérablement élargi. L'une des voies que l'on peut suivre a été indiquée par Helmholtz ; il prend pour point de départ la méthode de l'action variable d'Hamilton, de sorte que la notion d'où doivent se déduire tous les principes inductifs de la Mécanique est celle de l'*action* convenablement conçue. Pour arriver à en donner une définition tout à fait constructive, on peut observer que l'action, telle que Maupertuis l'a introduite dans la Mécanique, est *invariante dans le groupe des déplacements euclidiens.* Ce même caractère se retrouve dans la statique des corps déformables, qui repose sur la considération du ds^2 de l'espace ».

« M. H. Poincaré a écrit que la notion de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance, et s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement. Suivant cette idée philosophique, toute la Mécanique classique et toute la physique théorique paraissent pouvoir se déduire de la notion unique d'*action euclidienne.* C'est ce que nous nous proposons d'établir dans la présente Note, au moins en ce qui concerne les questions qui rentrent dans le cadre habituel de la Mécanique ».

NUL N'EST PROPHÈTE EN SON PAYS

Cependant, *« nul n'est prophète en son pays »* et le travail des frères Cosserat a été largement ignoré en France avant d'être réhabilité aux États-Unis lors de la découverte des cristaux liquides... cinquante ans plus tard. Malheureusement la situation n'a guère évolué puisqu'il ressortira de cet essai que *la théorie mathématique de l'élasticité ne peut être séparée de la théorie des groupes et de la théorie formelle des systèmes d'équations aux dérivées partielles* créée par D.C. Spencer pendant la période 1965-1975, encore fort peu connue aujourd'hui des mathématiciens et *a fortiori* des mécaniciens.

D'un point de vue bibliographique, on notera que l'approche des Cosserat n'est même pas citée dans une étude exhaustive sur le « développement historique des principes de l'énergétique en élastostatique » [7].

D'un point de vue mathématique, on notera que les équations de la contrainte et du couple de contrainte déjà écrites sont *toujours* présentées de façon inductive (phénoménologique) par des équilibres de forces et de couples agissant sur un petit volume ou, par intégration, sur un volume fini (15). *Il n'existe aucune approche déductive moderne* autre que celle des références [9] puisque la suite de cet essai montrera à l'évidence que *le secret du livre des frères Cosserat tient en une seule phrase* dans le théorème suivant et son corollaire :

Théorème

Les équations fondamentales de l'élastostatique sont décrites par l'adjoint formel du premier opérateur de Spencer linéaire.

Corollaire

La structure de ces équations (nombre et forme) ne dépend que de la structure du groupe des déplacements euclidiens (translations et rotations).

Ce qui précède explique pourquoi *ce résultat n'est toujours pas connu des mécaniciens* puisqu'il repose *essentiellement* sur l'usage de l'opérateur de Spencer.

Un ingénieur-mathématicien

François-Nicolas Cosserat est né le 26 novembre 1852 à Douai. Il est élève de l'Ecole polytechnique en 1870 puis de l'École nationale des ponts et chaussées en 1872. Il se marie en 1878 et a une fille, Amélie Adèle, qui se mariera avec Edouard Davaux, le traducteur français du monumental traité de physique de Chowlson [3]. François Cosserat suit ensuite la carrière normale d'un Ingénieur des ponts en construisant des ouvrages d'art liés au chemin de fer et devient ingénieur en chef en 1895. Pendant ce temps, il réfléchit avec son frère cadet Eugène, professeur de géométrie différentielle à l'Université de Toulouse et directeur de l'Observatoire de Toulouse, sur les fondements de la mécanique. Il semble cependant que les idées principales aient été données par François puisqu'après sa mort par maladie, le 22 mars 1914, aucune autre étude, même posthume, ne sera publiée par son frère. Tous ces résultats sont rassemblés dans de longues Notes ajoutées à des traités classiques [1, 3, 5], la plus importante étant publiée séparément sous forme de livre [4]. François Cosserat a aussi été élu vice-président de la Société mathématique de France en 1912 puis président en 1913. Cependant le discours de son successeur, le normalien Ernest Vessiot, reste très vague sur l'originalité de ses travaux.

DES TRAVAUX PRÉCURSEURS

Une monographie tardive [10] ne fait que recopier les formules importantes de (4) et l'usage du calcul tensoriel n'a pas permis d'aller plus loin. Les mécaniciens n'ont donc retenu que les formules fondamentales de la page 137 de (4) en les retrouvant de façon empirique.

Pour mieux comprendre le cheminement scientifique des frères Cosserat, il faut savoir que, dès la moitié du siècle dernier, de nombreux savants et non des moindres ont rêvé d'unifier les théories mathématiques de l'élasticité, de la chaleur et de l'électromagnétisme, ainsi que leurs couplages respectifs (thermoélasticité, thermoélectricité, piézoélectricité, photoélasticité). Le *schéma analogique* est celui qui, un siècle plus tard, servira de guide aux méthodes d'éléments finis relatives, séparément, à chacune des trois colonnes du diagramme suivant, organisé selon les chapitres successifs des traités scolaires correspondants :

Déplacement	Température	Potentiel EM
Déformation	Gradient	Champ EM
Conditions de compatibilité	Rotationnel	Équations des champs
Contrainte	Flux de chaleur	Induction EM
Équations de la contrainte	Équation de la chaleur	Équations des inductions
Loi de Hooke	Loi de Fourier	Loi de Minkowski
Principe variationnel		

Dans ce diagramme, seule la première colonne semble liée à la géométrie et à la théorie des groupes en particulier, puisqu'il est bien connu qu'un corps déformé conserve la même déformation par translation ou rotation. Le point de départ des frères Cosserat a été de comprendre l'impasse dans laquelle se trouvait cette présentation classique de l'élasticité datant de Cauchy et encore en usage maintenant.

Soit x la position initiale et y la position finale d'un point d'un corps déformable. La loi de déformation $y = f(x)$ peut être écrite $y = x + \xi(x)$ en introduisant le vecteur *déplacement* de composantes $(\xi^1(x),\ldots, \xi^n(x))$ dans un espace à n dimensions (le lecteur peu averti peut prendre $n = 2$ dans tout ce qui suit). En se limitant au cas habituel du génie civil, pour lequel les déplacements sont petits devant les dimensions du corps, on introduira le *tenseur de (petite) déformation,* matrice symétrique d'élément :

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2}(\omega_{rj}(x)\partial_i\xi^r(x) + \omega_{ir}(x)\partial_j\xi^r(x) + \xi^r(x)\partial_r\omega_{ij}(x))$$

Dans le cas d'une métrique euclidienne avec $\omega_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$, posant $\xi_i = \omega_{ir}\xi^r$, on obtient :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i\xi_j + \partial_j\xi_i)$$

Un calcul sans difficulté conduit aux $n^2(n^2 - 1)/12$ *conditions de compatibilité* parmi lesquelles on a :

$$\partial_{11}\varepsilon_{22} + \partial_{22}\varepsilon_{11} - 2\partial_{12}\varepsilon_{12} = 0$$

Une approche énergétique introduira l'énergie libre :

$$F = \int \varphi(\varepsilon_{ij})\, dx$$

en sommant la densité volumique d'énergie libre sur l'élément de volume $dx = dx^1 \ldots dx^n$ du corps non-déformé. Comme $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, on peut distinguer les $n(n + 1)/2$ différents ε en supposant $i \leq j$. Ainsi, si $n = 2$, on a l'énergie de déformation locale $\varphi(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22})$. La variation de F s'écrit alors :

$$\delta F = \int \sigma^{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dx$$

en posant $\sigma^{ij} = \partial\varphi/\partial\varepsilon_{ij}$ pour $i \leq j$ *seulement.* Utilisant alors la relation $\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i\delta\xi_j + \partial_j\delta\xi_i)$ pour une variation $\delta\xi$ du déplacement ξ, la contraction précédente ne prend une forme simple que si l'on complète les σ ainsi trouvés pour former une matrice symétrique en supposant vérifiées *a priori* les relations $\sigma^{ij} - \sigma^{ji} = 0$ pour toutes les valeurs de i et j maintenant. On obtient :

$$\delta F = \int \sigma^{ij}\partial_i\delta\xi_j dx = -\int (\partial_i\sigma^{ij})\,\delta\xi_j dx + \ldots$$

en intégrant par partie et l'on reconnaît dans l'intégrale le travail virtuel $f^j\delta\xi_j$ d'une force, ce qui conduit alors aux équations de la contrainte.

On est donc placé devant la situation suivante :

- *Si l'on part de la contrainte* en l'introduisant de façon purement phénoménologique (tétraèdre de Cauchy), on peut *démontrer* les relations de symétrie $\sigma^{ij} - \sigma^{ji} = 0$, mais en supposant l'absence de couple de contrainte surfacique et de moment volumique, puis en faisant appel à un équilibre de torseur érigé comme un principe additionnel et empirique qui ne peut être décrit par un principe variationnel.
- *Si l'on part de la déformation* comme précédemment, il n'existe pas de principe variationnel justifiant la symétrie de la contrainte ou l'introduction du couple de contrainte.
- *Si l'on ne garde que la partie dissymétrique* $\partial_i\xi_j$ dans la définition de la déformation, on perd toute référence au groupe des déplacements euclidiens et on oublie que la déformation doit être un invariant différentiel de ce groupe.

COMPLEXITÉ OPÉRATOIRE... ET SIMPLICITÉ CONCEPTUELLE

Il ne restait plus qu'une seule issue : *changer le point de départ géométrique tout en conservant le même groupe de transformations.* Il est curieux de constater que c'est exactement, mais pour des raisons très différentes, le même point de vue qui a été adopté par D.C. Spencer dans son étude des groupes de transformations, vis-à-vis de l'usage systématique des invariants différentiels par l'inventeur de ces groupes en 1890, le mathématicien norvégien Sophus Lie. De nouveaux outils mathématiques (théorie des jets, algèbre homologique) ont été nécessaires pour résoudre ce problème [6, 9]. Il n'est pas dans mon intention de les détailler mais je voudrais maintenant faire comprendre au lecteur, à la fois la *complexité opératoire* (il lui suffira d'ouvrir au hasard l'une quelconque des références précitées) mais aussi la *simplicité conceptuelle* de la *« machine »* qui, à partir de n'importe quel groupe de transformations d'un espace, produit une *« théorie »*. Le fait que le groupe des déplacements euclidiens détermine toute l'élastostatique (à l'exclusion de la valeur numérique des coefficients d'élasticité) est lié à la nature même du monde physique et... Dieu seul connaît la raison de Son choix !

• *Le premier point clef* du travail des Cosserat est d'établir la prépondérance de l'*action* sur l'*énergie*, semblable à celle de l'*énergie libre* sur l'*énergie interne* en thermostatique selon les vues de Helmholtz qui concluront cet essai. Ainsi, dans le cas de la vibration libre d'une barre de longueur l, de section S, de masse volumique ρ et de module d'Young E, avec un déplacement $\xi(x,t)$ maintenant fonction du temps, on doit faire varier l'intégrale double :

$$W = \int\int_0^l \left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \right] S dx dt$$

pour obtenir les équations fondamentales de l'élastodynamique : $$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

On remarque que le signe « – » dans l'action devient un signe « + » dans l'énergie et le cas de l'électromagnétisme est très semblable [11].

• *Le second point clef*, lié comme je l'ai déjà dit à la théorie des groupes développée par Spencer, est de choisir une action de la forme :

$$W = \int w(\chi^k_{,i}, \chi^k_{j,i})\, dx$$

Le lien avec la théorie classique résulte alors de la relation ((4), formule (45)):

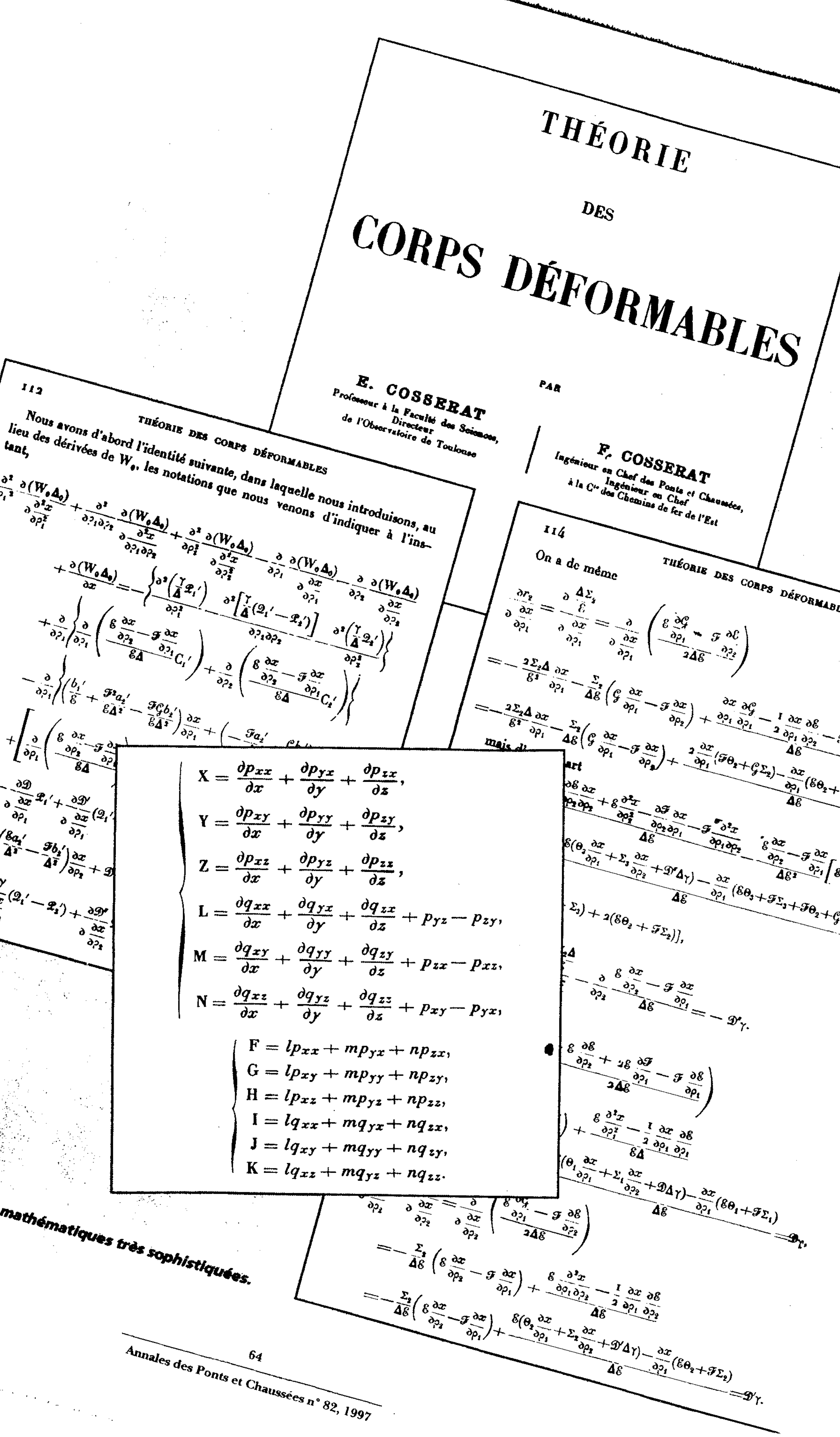
$$\omega_{rs}(x)\, A^r_i(x)\, A^s_j(x) = \omega_{kl}\, (f(x))\partial_i f^k(x)\, \partial_j f^l(x)$$

• *Le troisième point clef*, de loin le plus délicat, est de varier correctement l'action précédente (voir l'Appendice). On calcule d'abord la variation des champs χ contenus dans l'action w à l'aide des χ et des variations des fonctions $(f^k(x), f^k_i(x))$ définissant le repère mobile ainsi que de leurs dérivées. On intègre alors par partie comme en mécanique analytique, mais les équations d'Euler-Lagrange obtenues sont beaucoup trop compliquées pour pouvoir être utilisées. Un changement de variables « miraculeux », découvert par les frères Cosserat (4, p 131-136) et semblable au passage des coordonnées de Lagrange au coordonnées d'Euler en mécanique des milieux continus, permet alors de simplifier tellement les formules qu'il ne reste plus qu'un opérateur linéaire de forme très simple par rapport aux nouvelles variations et à leurs dérivées que l'on intègre par partie pour retrouver les équations de la contrainte et du couple de contrainte déjà décrites. La raison conceptuelle d'une telle procédure ne peut être comprise sans des mathématiques **très sophistiquées** [9]. Les frères Cosserat ont donc eu quand même beaucoup de chance de pouvoir arriver au bout de leurs calculs sans une erreur, ceci d'autant plus que, chaque fois qu'une matrice 3x3 antisymétrique intervient, ils l'ont toujours décrite par le vecteur correspondant, ce qui leur interdisait un passage à la dimension 4 (espace-temps) car cet artifice n'est alors plus possible.

CURIEUX PARALLÈLES

Les frères Cosserat ont aussi essayé d'étendre ces méthodes à la chaleur et à l'électromagnétisme dans le cadre d'une hypothétique « Théorie des températures » ((4), p. 6, 147, 187, 211) dont il ne reste apparemment plus de trace, en utilisant deux analogies [2, 3, 8, 9] fort peu connues, même encore aujourd'hui, bien qu'elles aient été découvertes par d'illustres savants.

L'*analogie de Helmholtz* établit un parallèle curieux entre la mécanique analytique et la thermodynamique en tentant de décrire la température absolue



THÉORIE

DES

CORPS DÉFORMABLES

PAR

E. COSSERAT
Professeur à la Faculté des Sciences,
Directeur
de l'Observatoire de Toulouse

F. COSSERAT
Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées,
Ingénieur en Chef
à la C^ie des Chemins de fer de l'Est

112 THÉORIE DES CORPS DÉFORMABLES

Nous avons d'abord l'identité suivante, dans laquelle nous introduisons, au lieu des dérivées de W_0, les notations que nous venons d'indiquer à l'instant,

114 THÉORIE DES CORPS DÉFORMABLES

On a de même

$$\left\{\begin{aligned}
X &= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z},\\
Y &= \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z},\\
Z &= \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z},\\
L &= \frac{\partial q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zx}}{\partial z} + p_{yz} - p_{zy},\\
M &= \frac{\partial q_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zy}}{\partial z} + p_{zx} - p_{xz},\\
N &= \frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zz}}{\partial z} + p_{xy} - p_{yx},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
F &= lp_{xx} + mp_{yx} + np_{zx},\\
G &= lp_{xy} + mp_{yy} + np_{zy},\\
H &= lp_{xz} + mp_{yz} + np_{zz},\\
I &= lq_{xx} + mq_{yx} + nq_{zx},\\
J &= lq_{xy} + mq_{yy} + nq_{zy},\\
K &= lq_{xz} + mq_{yz} + nq_{zz}.
\end{aligned}\right.$$

mathématiques très sophistiquées.

comme un « champ » classique, c'est-à-dire à partir des dérivées d'un « potentiel », de façon à pouvoir faire des intégrations par partie comme avec la déformation en mécanique des milieux continus.
L'*analogie de Mach-Lippmann* établit un autre parallèle aussi curieux entre la température absolue et le potentiel électrique.

Analogie de Helmholtz

Si $L(t, q, \dot{q})$ est le *Lagrangien* d'un système mécanique de coordonnées généralisées q et de vitesses généralisées correspondantes $\dot{q}$, on définit l'*Hamiltonien* par la formule bien connue $H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$. De même, en thermostatique, si F est l'*énergie libre* d'un système, on définit, *en général*, l'*énergie interne* par la formule $U = F - T\frac{\partial F}{\partial T}$ où T est la température absolue. Par exemple, dans le cas d'un gaz parfait (volume V, pression P, entropie S) on a $dU = -PdV + TdS$ et $dF = -PdV - SdT$. Ainsi la thermostatique et la mécanique analytique admettent le même schéma si, posant $L = -F$, on peut trouver une variable q telle que $\dot{q} = T$.

Analogie de Mach-Lippmann

Pour une *machine thermique* décrivant un cycle de Carnot entre les températures absolues T_1 et $T_2 > T_1$, échangeant le travail δW et la chaleur δQ avec l'extérieur, le *premier principe* de la thermostatique donne $dU = \delta W + \delta Q$ et on a :

$$\int_{cycle}(\delta W + \delta Q) = \int_{cycle} dU = 0 \Rightarrow W + Q_1 + Q_2 = 0$$

Le *second principe* $\delta Q = TdS$ donne alors :

$$\int_{cycle}\frac{\delta Q}{T} = \int_{cycle} dS = 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

c'est-à-dire la formule de Clausius. On en déduit le *rendement* maximum théorique :

$$\rho = \frac{|W|}{|Q_2|} = \frac{-W}{Q_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} > 0$$

De même, dans une *machine électrique* décrivant un cycle de charge et de décharge entre les potentiels électriques V_1 et $V_2 > V_1$, échangeant le travail mécanique δW et le travail électrique $\delta W'$ avec l'extérieur lorsque la charge électrique q varie, le *principe de conservation de l'énergie* donne $dE = \delta W + \delta W'$ et on a :

$$\int_{cycle}(\delta W + \delta W') = \int_{cycle} dE = 0 \Rightarrow W + W_1' + W_2' = 0$$

Le *principe de conservation de l'électricité* $\delta W' = Vdq$ donne alors :

$$\int_{cycle}\frac{\delta W'}{V} = \int_{cycle} dq = 0 \Rightarrow \frac{W_1'}{V_1} + \frac{W_2'}{V_2} = 0$$

On en déduit le *rendement* maximum théorique :

$$\rho = \frac{|W|}{|W_2'|} = \frac{-W}{W_2'} = \frac{W_1' + W_2'}{W_2'} = \frac{V_2 - V_1}{V_2} > 0$$

et il existe ainsi une analogie formelle entre la température absolue T et le potentiel électrique V. Ce résultat se retrouve au niveau de leurs gradients respectifs dans le phénomène de la thermoélectricité découvert par Seebeck en 1821.

UNION ENTRE GÉOMÉTRIE ET PHYSIQUE

Malheureusement, François Cosserat est mort avant d'avoir achevé sa tâche et il ne semble pas que les héritiers, séparés par des divorces, aient gardé des papiers posthumes. La tentative de H. Weyl [12] pour lier l'électromagnétisme à la théorie des groupes et celle de L. de Broglie [2] pour utiliser l'analogie de Helmholtz ont ensuite ouvert la voie à des recherches récentes [9] essayant d'unifier les théories mathématiques de l'élasticité, de la chaleur et de l'électromagnétisme.
Les frères Cosserat ont découvert beaucoup plus qu'une structure additionnelle ou « microstructure » de certains matériaux. Ils ont uni *pour la première fois* **géométrie** et **physique** en fondant une théorie physique sur un modèle mathématique issu de la théorie des groupes. Le seul cheminement analogue avait été réalisé par H. Poincaré et A. Einstein avec la « relativité restreinte » et « l'électrodynamique des corps en mouvement » de 1905. Il est certain que cette coïncidence a masqué l'aspect visionnaire du travail des frères Cosserat en détournant (peut-être à juste titre) l'attention des chercheurs sur la physique microscopique au détriment de la physique macroscopique dont elle n'est cependant pas séparable.

APPENDICE

Nous explicitons les calculs en utilisant des notations condensées modernes et retrouvons, une à une, toutes les formules de (4). Définissant les variations :

$$\delta f^k(x) = \eta^k(f(x)) \quad , \quad \delta f_i^k(x) = f_i^r(x)\, \eta_r^k(f(x))$$

et utilisant le fait que la métrique est invariante dans la variation puisqu'elle est donnée, on obtient après remplacement :

$$\omega_{rl}(y)\, \eta_k^r(y) + \omega_{kr}(y)\, \eta_l^r(y) + \eta^r(y)\, \partial_r \omega_{kl}(y) = 0$$

Dans notre cas, posant $\eta_{kl} = \omega_{kr}\eta_l^r$, on a simplement $\eta_{kl} + \eta_{lk} = 0$. Il vient alors, après un calcul élémentaire mais fastidieux dans lequel $\eta^l_{rs} = 0$:

$$\delta\chi_{,i}^k = g_l^k \left(\frac{\partial \eta^l}{\partial y^r} - \eta_r^l \right) \partial_i f^r \ ,$$

$$\delta\chi_{j,i}^k = g_l^k f_j^s \left(\frac{\partial \eta_s^l}{\partial y^r} - \eta_{rs}^l \right) \partial_i f^r$$

Définissant successivement ((4), p 130) :

$$\mathfrak{X}_k^{,i} = \frac{\partial w}{\partial \chi_{,i}^k} \ , \mathfrak{X}_k^{j,i} = \frac{\partial w}{\partial \chi_{j,i}^k}$$

et introduisant ensuite les nouvelles quantités ((4), p 136) :

$$\Delta \mathfrak{Y}_l^{,r} = g_l^k \mathfrak{X}_k^{,i} \partial_i f^r \ , \Delta \mathfrak{Y}_l^{s,r} = g_l^k f_j^s \mathfrak{X}_k^{j,i} \partial_i f^r$$

avec $\Delta(x) = det(\partial_i f^k(x))$, on obtient finalement la formule définissant la variation sur l'élément de volume déformé $dy = \Delta dx$:

$$\delta W = \int \left[\mathfrak{Y}_l^{,r} \left(\frac{\partial \eta^l}{\partial y^r} - \eta_r^l \right) + \mathfrak{Y}_l^{s,r} \left(\frac{\partial \eta_s^l}{\partial y^r} - 0 \right) \right] dy$$

Cette formule fait apparaître pour la première fois, entre les parenthèses, l'opérateur de Spencer relatif aux variables indépendantes y. Montant et descendant les indices grâce à la métrique ω comme pour le déplacement, on peut alors écrire :

$$\delta W = \int \left[\mathfrak{Y}^{k,l} \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial y^l} - \eta_{kl} \right) + \mathfrak{Y}^{kl,r} \frac{\partial \eta_{kl}}{\partial y^r} \right] dy$$

Il faut cependant remarquer que la première sommation est faite sur tous les indices (k,l) alors que la seconde sommation est faite seulement sur les indices $(k < l)$. Regroupant les termes, on a donc, comme sur la page 136 de (4) :

$$\delta W = -\int \left[\frac{\partial \mathfrak{Y}^{k,l}}{\partial y^l} \eta_k + \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}^{kl,r}}{\partial y^r} + \mathfrak{Y}^{k,l} - \mathfrak{Y}^{l,k} \right) \eta_{k<l} \right] dy + \ldots$$

et on retrouve *exactement* les équations fondamentales de l'élastostatique avec seulement des notations légèrement différentes.

Il suffit donc de multiplier les composantes de l'opérateur de Spencer par les « fonctions test » $\mathcal{Y}$ et d'intégrer par partie. Ceci est *exactement* la façon de construire l'adjoint formel d'un opérateur différentiel linéaire. ■

Références bibliographiques

[1] P. Appell, *Traité de mécanique*, Gauthier-Villars, 1909 (t III, Note sur la théorie de l'action euclidienne, par E. et F. Cosserat, p 557-629).

[2] L. de Broglie, *La thermodynamique de la particule isolée*, Gauthier-Villars, 1964.

[3] O.D. Chwolson, *Traité de physique*, Hermann, 1914 (t I, Note sur la dynamique du point et du corps invariable, par E. et F. Cosserat, p 236-273).

[4] E. et F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, Hermann, 1909, 226 pp.

[5] G. Koenigs, *Leçons de cinématique*, Hermann, 1897 (Note sur la cinématique d'un milieu continu, par E. et F. Cosserat, p 391-417).

[6] A. Kumpera, D.C. Spencer, *Lie Equations*, Annals of Mathematics Studies 73, Princeton University Press, 1972, 293pp.

[7] L. Mc Lean, G.A. Oravas, « Historical Development of Energetical Principles in Elastomechanics », *Applied Mechanics Reviews*, 19, 8, 1966, p 647-658 ; 19, 11, 1966, p 919-933.

[8] G. Lippmann, C.R. Acad. Sc. Paris, 82, 1876, p 1425 ; « Uber die analogie zwischen absoluter temperatur un elektischen potential » (Erwiederung an F.W. Adler), *Ann. der Physik*, 23, 1907, p 994.

[9] J.F. Pommaret, *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*, Gordon and Breach, 1978, 411 pp. (MIR, Moscou, 1983) ; *Differential Galois Theory*, Gordon and Breach, 1983, 760pp. ; *Lie Pseudogroups and Mechanics*, Gordon and Breach, 1988, 590 pp. ; *Partial Differential Equations and Group Theory, New perspectives for applications*, Kluwer, 1994, 1996, 470 pp. ; « The Mach-Lippmann analogy between heat and electricity », in *« Gabriel Lippmann (1845-1912) »*, Publications de l'Institut Grand-Ducal de Luxembourg, Section des Sciences, 1997 (à paraître).

[10] J. Sudria, *L'action euclidienne de déformation et de mouvement*, Mémorial des Sciences Mathématiques 29, Gauthier-Villars, 1935, 56 pp.

[11] P.P. Teodorescu, *Dynamics of Linear Elastic Bodies*, Editura Academiei, Bucuresti, Romania ; Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, England, 1975, 411 pp.

[12] H. Weyl, *Space, Time, Matter*, Springer, Berlin, 1918, 234 pp. ; traduction, Blanchard, Paris, 1958, 290 pp.