Projet BOUM: Fluctuations dans les systèmes de particules

Oriane Blondel, Charles-Édouard Bréhier, Clément Érignoux, Cyril Labbé,
Éric Luçon, Christophe Poquet, Julien Reygner et Marielle Simon

Notre projet a rassemblé, les 21 et 22 mars 2016, un groupe de huit jeunes chercheurs provenant de Lille, Lyon et Paris pour deux jours d'exposés à l'Institut Henri Poincaré, autour du thème de la conjecture faible d'universalité de KPZ. Cette rencontre a reçu le soutien financier de la SMAI au travers d'un projet BOUM, et bénéficié du support logistique du CERMICS.

Le thème de cette rencontre se situe à l'intersection des probabilités, de la physique mathématique et de l'analyse des équations aux dérivées partielles. Commençons par rappeler que l'équation KPZ, du nom des trois physiciens Kardar, Parisi et Zhang qui l'ont introduite en 1986, est l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS)

$$\partial_t h(t,x) = \partial_{xx} h(t,x) + (\partial_x h(t,x))^2 + \xi(t,x), \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

et qu'elle décrit formellement l'évolution d'une interface entre deux milieux (comme par exemple un front de flamme ou une tache de café). Cette équation non-linéaire est singulière car elle fait intervenir un terme source aléatoire $\xi(t,x)$ très irrégulier, appelé bruit blanc espace-temps : l'irrégularité de ce terme source est, a priori, incompatible avec la non-linéarité de l'équation. Jusqu'à récemment, cette équation était étudiée de façon indirecte au travers d'une transformation non-linéaire, appelée transformée de Hopf-Cole, qui envoie formellement l'équation KPZ sur l'équation de la chaleur stochastique multiplicative — cette dernière équation étant bien posée. Cependant, la notion de solution pour l'équation KPZ est restée mystérieuse jusqu'aux travaux récents de Martin Hairer [10, 11], qui, au moyen de techniques de renormalisation et en s'appuyant sur la théorie des chemins rugueux ("*rough paths*"), fondée par Terry Lyons et développée en particulier par Massimiliano Gubinelli, a construit une théorie des solutions de l'équation KPZ ainsi que d'une vaste classe d'EDPS présentant une singularité de même nature. Ces travaux lui ont valu la médaille Fields en 2014.

Au cours des vingt dernières années, la notion de *classe d'universalité KPZ* a émergé : elle désigne un ensemble de modèles discrets ou continus (typiquement, de croissance d'interfaces ou de systèmes de particules) dont les fluctuations autour de la moyenne ne sont pas décrites par un théorème de type "limite centrale", et n'appartiennent donc pas à la classe d'universalité dite *gaussienne*. Le lien entre classe d'universalité KPZ et équation KPZ est énoncé de la manière suivante : en temps long, le comportement de la solution de l'équation KPZ (lois marginales, exposants d'échelle) tombe dans la classe d'universalité KPZ.

Une composante importante des travaux portant sur l'équation KPZ vient en fait de modèles discrets motivés par la mécanique statistique. Un des résultats fondateurs de ce domaine est dû à Lorenzo Bertini et Giambattista Giacomin en 1997 [1] : la limite d'échelle des fluctuations d'un modèle discret faiblement asymétrique — appelé processus d'exclusion simple — est donnée par la solution de l'équation KPZ (interprétée via la transformée de Hopf-Cole). La preuve de cette convergence est très spécifique au système de particules considéré. Il est cependant conjecturé que ce résultat n'est pas limité au seul processus d'exclusion simple, mais s'étend à une vaste classe de modèles discrets présentant une asymétrie faible : il s'agit de la conjecture faible d'universalité de KPZ. La difficulté principale dans la preuve de cette conjecture est que l'approche de Bertini et Giacomin ne s'étend pas à l'ensemble des modèles concernés.

Récemment, Patricia Gonçalves et Milton Jara ont introduit une notion de solution dite "d'énergie" pour l'équation KPZ, qui généralise dans certains cas la solution donnée par la transformée de Hopf-Cole, et ont montré la convergence des fluctuations de systèmes de particules généraux vers ces solutions [6]. Ces résultats ont été complétés par une preuve très récente de l'unicité de telles solutions par Massimiliano Gubinelli et Nicolas Perkowski [9], caractérisant ainsi complètement cette convergence. De plus, la solution ainsi trouvée correspond bien à la solution obtenue par Hairer.

Ce thème est aujourd'hui l'objet d'une intense activité dans la communauté probabiliste. Outre la conjecture faible d'universalité de KPZ, d'autres questions se posent. En particulier, il est conjecturé qu'après remise à l'échelle (selon les exposants caractéristiques de cette classe), tout modèle d'interface dans la classe d'universalité KPZ converge vers une sorte de *point fixe*. Des candidats possibles pour cet objet encore mystérieux ont récemment été proposés par Ivan Corwin, Jeremy Quastel et Daniel Remenik [3].

Les exposés du projet BOUM ont été organisés en quatre grandes thématiques, chacune d'elles s'appuyant sur un ou deux articles :

(1) **Énoncer quelques conjectures liées à la classe d'universalité KPZ** : exposants d'échelle, résolution explicite de certains modèles en fonction des conditions initiales, calcul de caractéristiques associées aux lois marginales [2, 4] ;

(2) **Étudier la convergence vers la solution de Hopf-Cole de l'équation KPZ** : cas particulier du WASEP (Weakly Asymmetric Simple Exclusion Process), apparition de la transformée de Hopf-Cole au niveau microscopique, étude approfondie d'un système de particules en interaction [1, 5] ;

(3) **Comprendre une nouvelle approche de convergence, sans utilisation de la transformée de Hopf-Cole** : extension du *principe de Boltzmann-Gibbs*, projection des fluctuations spatio-temporelles sur le champ associé à l'unique quantité conservée du système, puis étude du premier terme de correction à cette projection, et application à une grande classe de systèmes de particules [6, 7] ;

(4) **Analyser la notion de solution d'énergie de l'équation KPZ** : apparition d'une définition de solution via la nouvelle approche de convergence et le principe de Boltzmann-Gibbs de second ordre, nouvelles conditions requises sur les trajectoires, unicité des solutions prouvée très récemment, et adéquation avec celles précédemment obtenues [8, 9].

En conclusion, les exposés que nous avons préparés et les échanges que nous avons eus au cours de ces deux jours nous ont non seulement permis d'approfondir notre connaissance de ce sujet très actuel dans notre communauté, mais également de mettre en perspective nos propres travaux liés aux thèmes abordés, et de renforcer certaines collaborations déjà en cours parmi les membres du groupe.

Références

[1] L. Bertini et G. Giacomin. Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems. *Commun. Math. Phys.* 183(3), pages 571–607, 1997.

[2] I. Corwin. The Kardar-Parisi-Zhang equation and universality class. *Random Matrices Theory Appl.* 1(1), 2012.

[3] I. Corwin, J. Quastel et D. Remenik. The renormalization fixed point of the Kardar-Parisi-Zhang universality class. *J. Stat. Phys.* 160, pages 815–834, 2015.

[4] M. Jara et P. Gonçalves. Scaling limits of additive functionals of interacting particle systems. *Commun. Math. Phys.* 66(5), pages 649–677, 2013.

[5] J. Gärtner. Convergence towards Burger's equation and propagation of chaos for weakly asymmetric exclusion processes. *Stoch. Proc. Appl.* 27, pages 233–260, 1988.

[6] P. Gonçalves et M. Jara. Nonlinear fluctuations of weakly asymmetric interacting particle systems. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 212(3), pages 597–644, 2014.

[7] P. Gonçalves, M. Jara et S. Sethuraman. A stochastic Burgers equation from a class of microscopic interactions. *Ann. Probab.* 43(1), pages 286–338, 2015.

[8] M. Gubinelli et M. Jara. Regularization by noise and stochastic Burgers equations. *Stoch. PDE: Anal. Comp.* 1, pages 325–350, 2013.

[9] M. Gubinelli et N. Perkowski. Energy solutions of KPZ are unique. `http://arxiv.org/abs/1508.07764`.

[10] M. Hairer. Solving the KPZ equation. *Ann. of Math. (2)* 178(2), pages 559–664, 2013.

[11] M. Hairer. A theory of regularity structures. *Invent. Math.* 198(2), pages 269–504, 2014.