

Séminaire de Mathématiques Appliquées du CERMICS



Théorie des erreurs

Nicolas Bouleau (École des Ponts ParisTech)

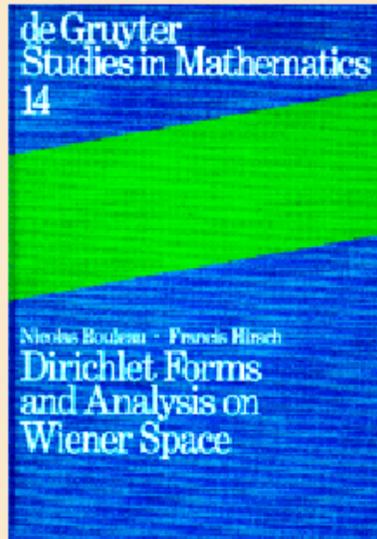
16 janvier 2020

Présentation de *la Théorie des erreurs*

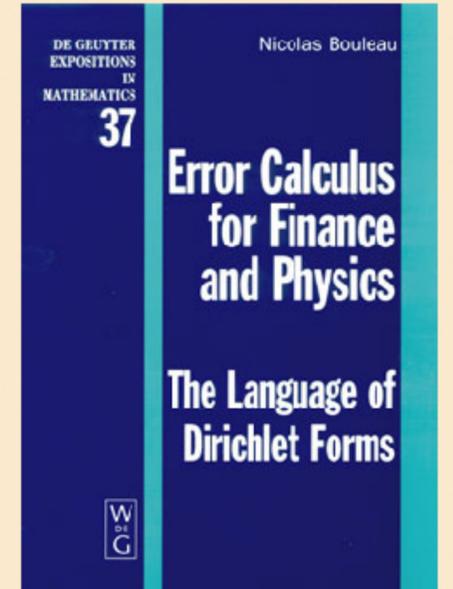
un ouvrage de Nicolas Bouleau

aux éditions Spartacus-idh Cassini

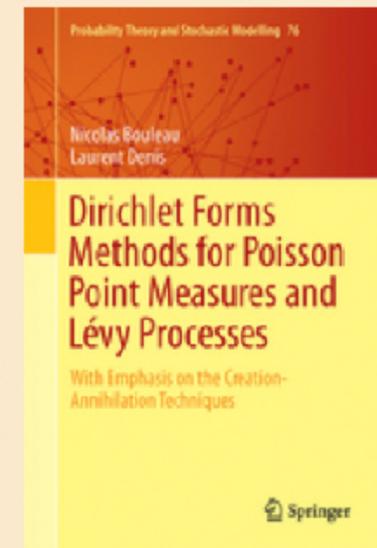
Nouvelles méthodes pour les erreurs



Bouleau-Hirsch
*Dirichlet Forms
 and Analysis on
 Wiener Space*

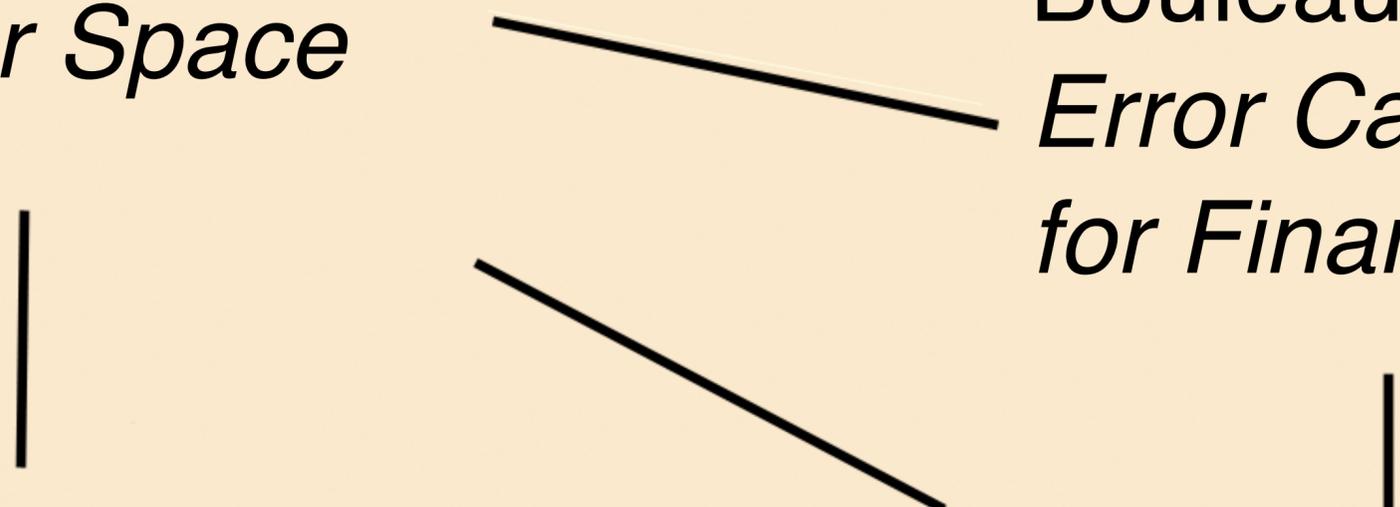
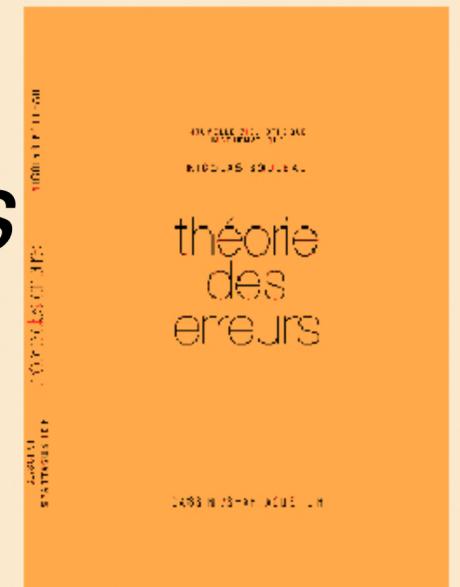


Bouleau
*Error Calculus
 for Finance and Physics*



Bouleau-Denis
*Dirichlet Forms Methods
 for Poisson Point Measures
 and Lévy Processes*

Bouleau
Théorie des erreurs



La présentation peut être
enrichie d'ordres de grandeur

Rapport du jury d'agrégation

Il sera requis de connaître ou de savoir
retrouver rapidement les ordres de
grandeur

Présentation d'un cours
de Physique statistique

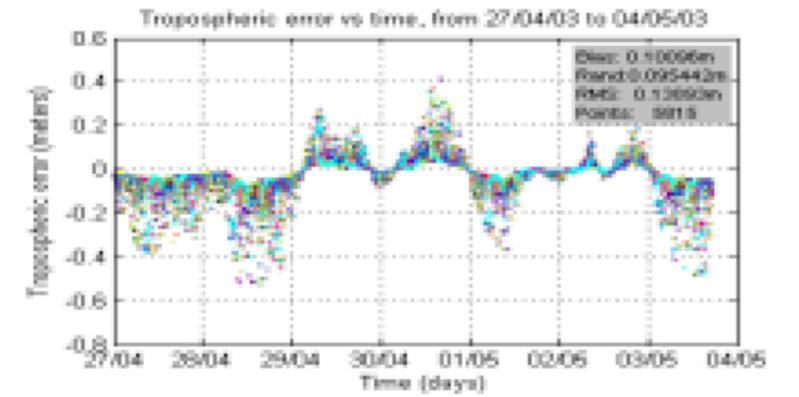
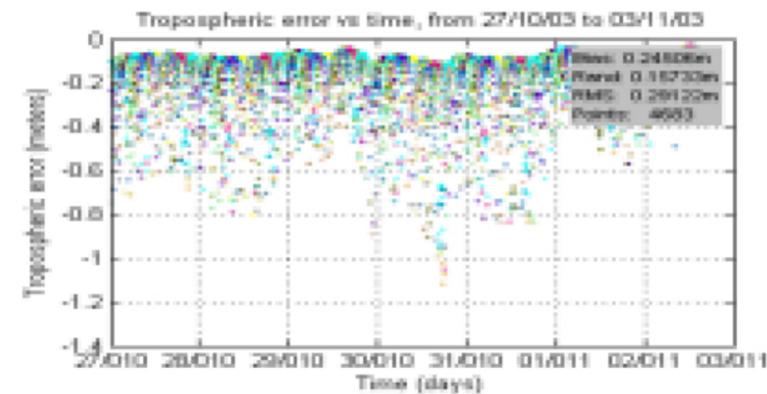
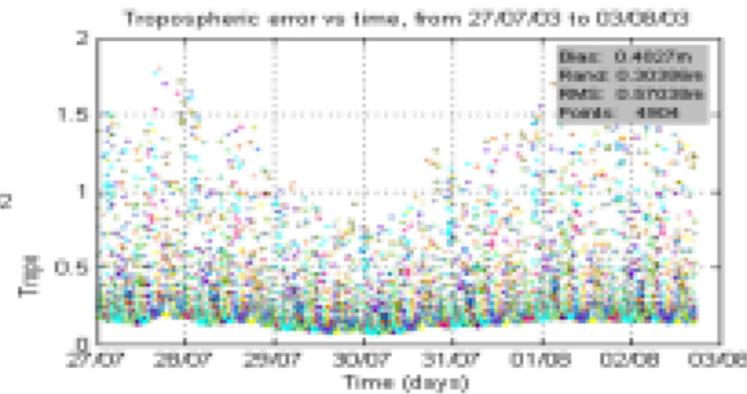
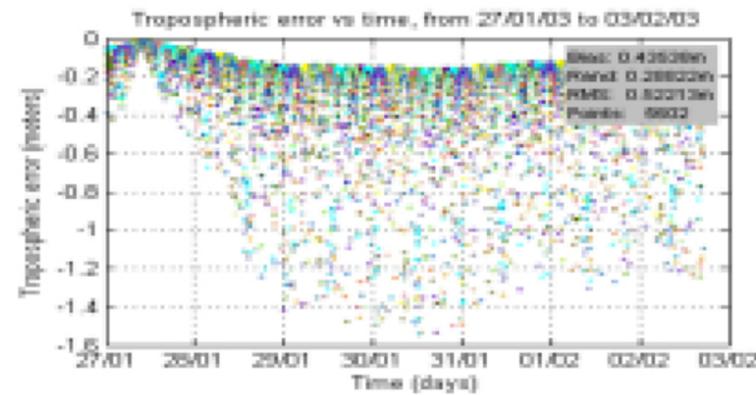
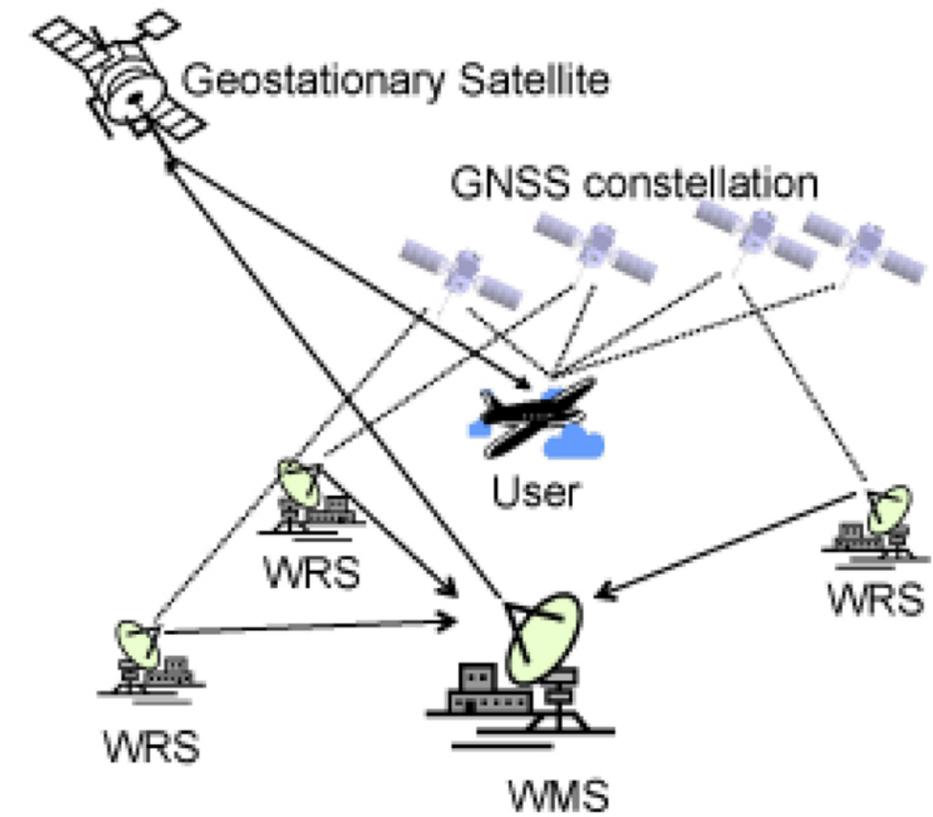
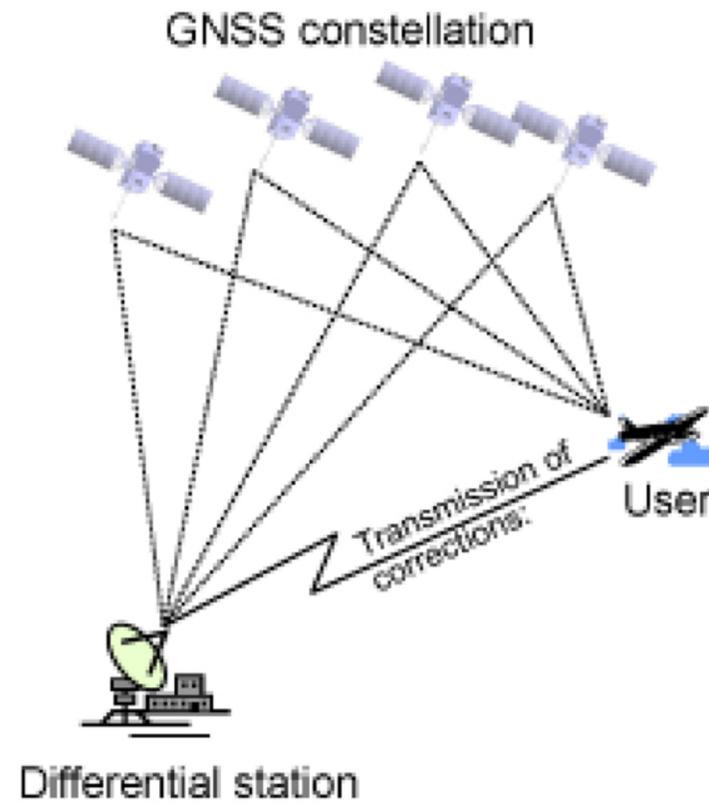
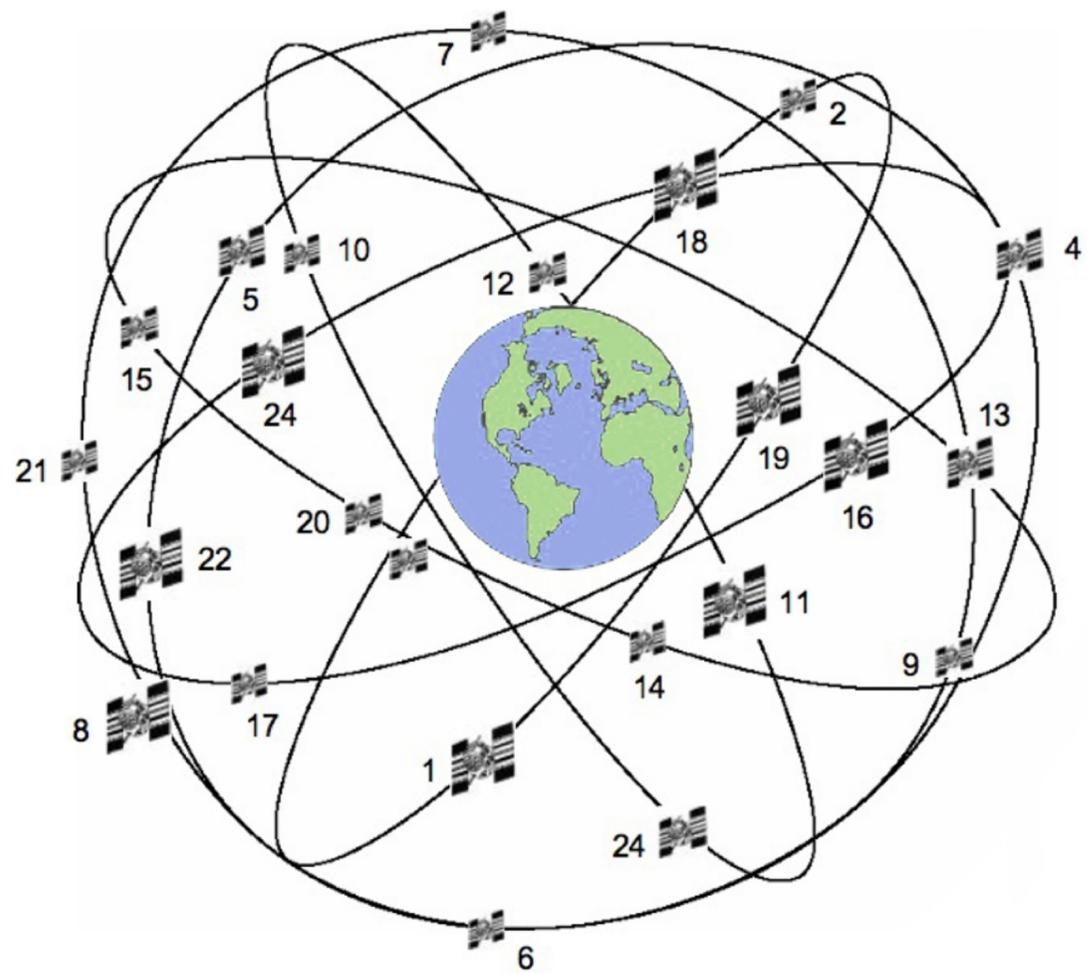
L'intuition ne peut nous guider
en dehors de l'ordre de grandeur
où nous vivons

Gaston Bachelard

Essai sur la connaissance approchée 1928

Ce n'est pas évident de comprendre
les ordres de grandeur,
et les échelles de temps.

Jean-Marc Jancovici nov. 2005



Seasonal variations for tropospheric error

A. Calculs à la Gauss

D. Structures d'erreurs dans les applications

B. Modèles probabilistes et fonctionnels

E. Éléments historiques et thèmes de recherche

C. Les subtilités de la notion de biais

A. Calculs à la Gauss

1. Les diverses approches
2. Exemples en dimension finie
3. Introduction intuitive aux structures d'erreur
4. Erreurs faiblement et fortement aléatoires

B. Modèles probabilistes et fonctionnels

C. Les subtilités de la notion de biais

D. Structures d'erreurs dans les applications

E. Éléments historiques et thèmes de recherche

A. Calculs à la Gauss

1. Les diverses approches
2. Exemples en dimension finie
3. Introduction intuitive aux structures d'erreur
4. Erreurs faiblement et fortement aléatoires

B. Modèles probabilistes et fonctionnels

5. Semi-groupes fortement continus et formes de Dirichlet
6. Structures d'erreur
7. Images et produits de structures d'erreur
8. Le gradient et le dièse et autres outils
9. Structures d'erreur sur les espaces fondamentaux

C. Les subtilités de la notion de biais

D. Structures d'erreurs dans les applications

E. Éléments historiques et thèmes de recherche

A. Calculs à la Gauss

1. Les diverses approches
2. Exemples en dimension finie
3. Introduction intuitive aux structures d'erreur
4. Erreurs faiblement et fortement aléatoires

B. Modèles probabilistes et fonctionnels

5. Semi-groupes fortement continus et formes de Dirichlet
6. Structures d'erreur
7. Images et produits de structures d'erreur
8. Le gradient et le dièse et autres outils
9. Structures d'erreur sur les espaces fondamentaux

C. Les subtilités de la notion de biais

10. Approximations et opérateurs de biais
11. Calculs par méthodes de simulation

D. Structures d'erreurs dans les applications

E. Éléments historiques et thèmes de recherche

A. Calculs à la Gauss

1. Les diverses approches
2. Exemples en dimension finie
3. Introduction intuitive aux structures d'erreur
4. Erreurs faiblement et fortement aléatoires

B. Modèles probabilistes et fonctionnels

5. Semi-groupes fortement continus et formes de Dirichlet
6. Structures d'erreur
7. Images et produits de structures d'erreur
8. Le gradient et le dièse et autres outils
9. Structures d'erreur sur les espaces fondamentaux

C. Les subtilités de la notion de biais

10. Approximations et opérateurs de biais
11. Calculs par méthodes de simulation

D. Structures d'erreurs dans les applications

12. Identification statistique des structures d'erreur
13. Structure instantanée d'un processus
14. Modèles inspirés de la finance
15. Exemples en physique
16. Principe des fonctions arbitraires et structures d'erreur

E. Éléments historiques et thèmes de recherche

A. Calculs à la Gauss

1. Les diverses approches
2. Exemples en dimension finie
3. Introduction intuitive aux structures d'erreur
4. Erreurs faiblement et fortement aléatoires

B. Modèles probabilistes et fonctionnels

5. Semi-groupes fortement continus et formes de Dirichlet
6. Structures d'erreur
7. Images et produits de structures d'erreur
8. Le gradient et le dièse et autres outils
9. Structures d'erreur sur les espaces fondamentaux

C. Les subtilités de la notion de biais

10. Approximations et opérateurs de biais
11. Calculs par méthodes de simulation

D. Structures d'erreurs dans les applications

12. Identification statistique des structures d'erreur
13. Structure instantanée d'un processus
14. Modèles inspirés de la finance
15. Exemples en physique
16. Principe des fonctions arbitraires et structures d'erreur

E. Éléments historiques et thèmes de recherche

17. Calculs d'erreurs depuis Gauss et Laplace
18. Prolongements et questions ouvertes

Partie A

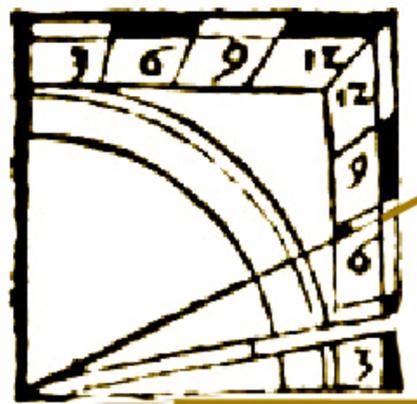
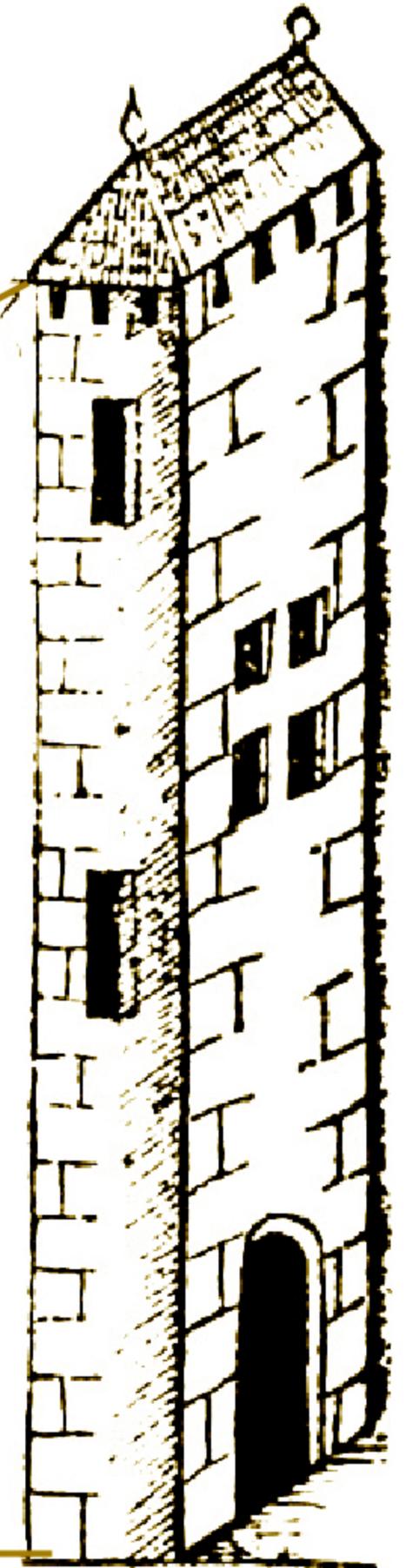
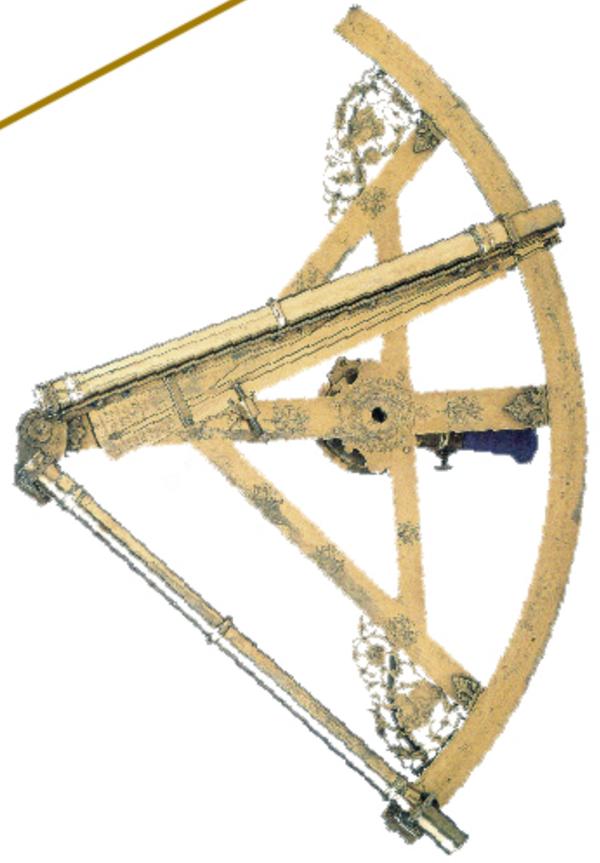
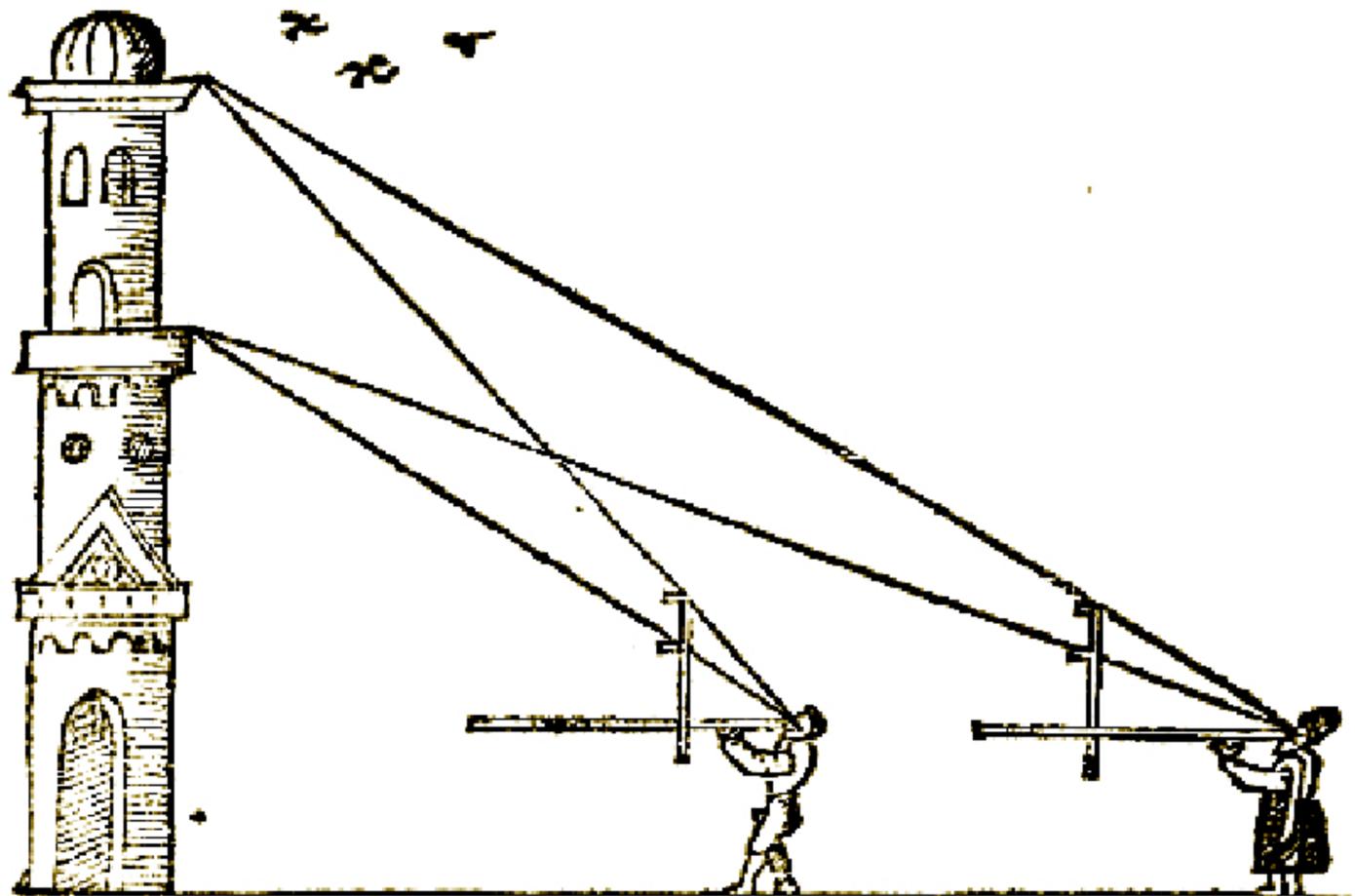
Approche élémentaire, exemples simples,
· notion intuitive de structure d'erreur

De Gauss à Joseph Bertrand...

- Ce qui est enseigné ordinairement et sa critique
- Classification des calculs d'erreur.
- Calculs à la Gauss

La «loi des erreurs» de Gauss (1809)

Si on suppose que les valeurs mesurées sont conditionnellement indépendantes sachant la vraie grandeur et que la meilleure valeur à prendre en compte est la moyenne arithmétique alors l'erreur suit une loi normale



Divers types de calcul d'erreur

	erreurs infinitésimales	erreurs finies
Approches déterministes	Analyse de sensibilité déterministe : dérivation par rapport aux paramètres du modèle	Calcul d'intervalles
Approches probabilistes	Calcul d'erreur par formes de Dirichlet calcul du premier ordre sur les variances seules	calcul du second ordre sur les variances et les biais Théorie des probabilités

formule de transport pour les petites erreurs :

$$\begin{cases} \text{variance}_2 = g'^2(f(x))\text{variance}_1 + \varepsilon^3 O(1) \\ \text{biais}_2 = g'(f(x))\text{biais}_1 + \frac{1}{2}g''(f(x))\text{variance}_1 + \varepsilon^3 O(1) \end{cases}$$

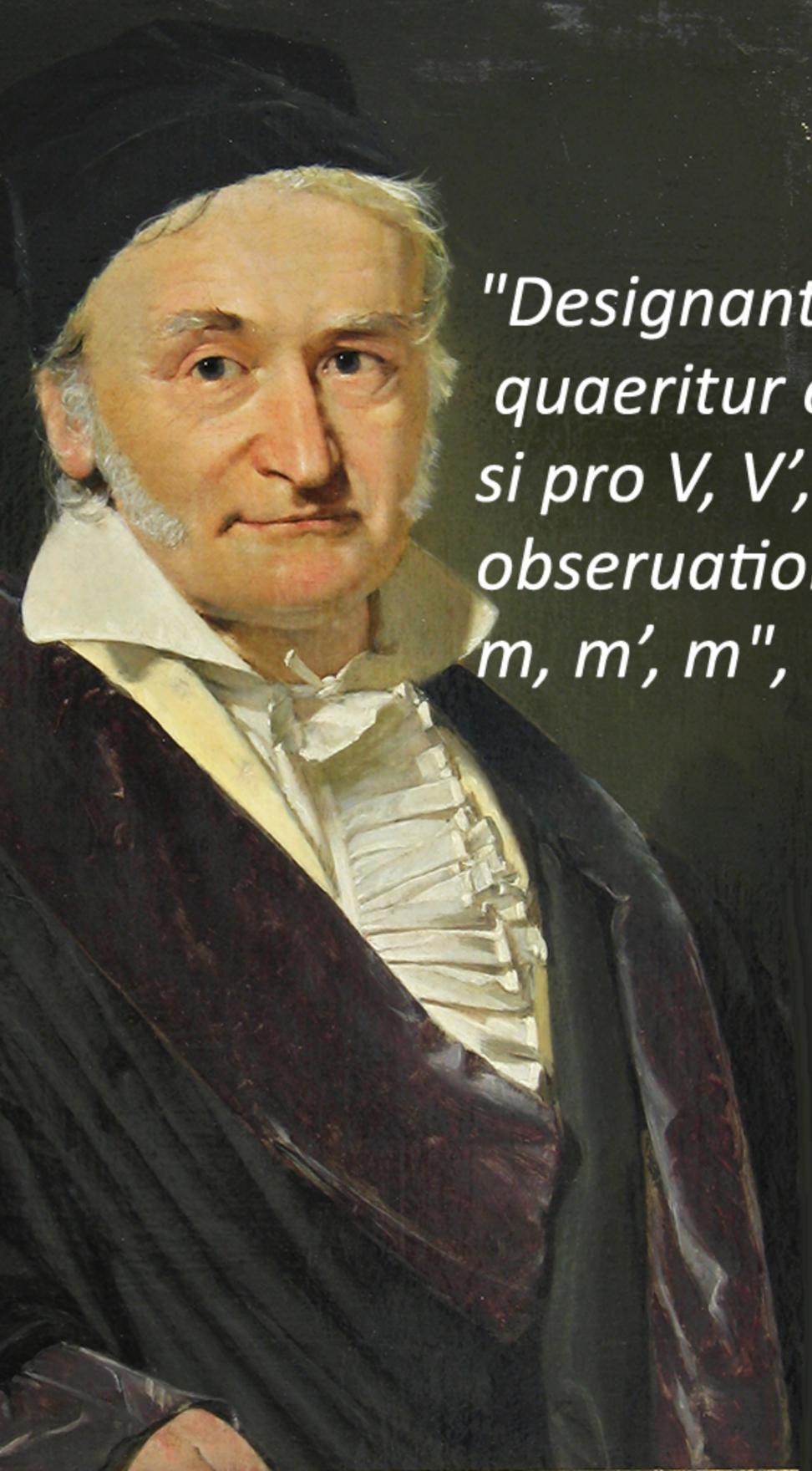


Theoria Motus Corporum Coelestium
in sectionibus conicis solem ambientium

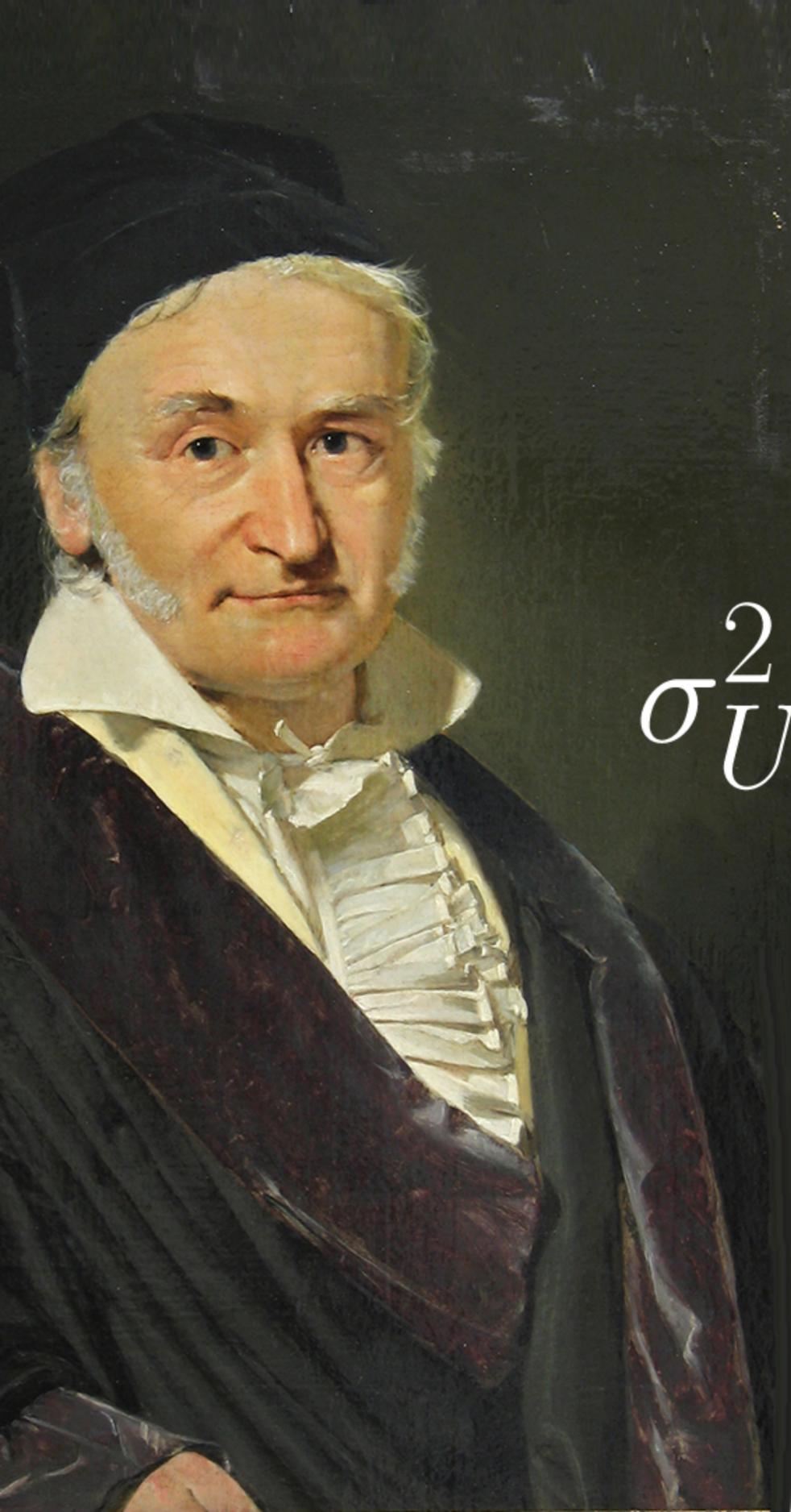
1809

(loi des erreurs)

Theoria Combinationis Observatorum Erroribus Minimis Obnoxiae 1823

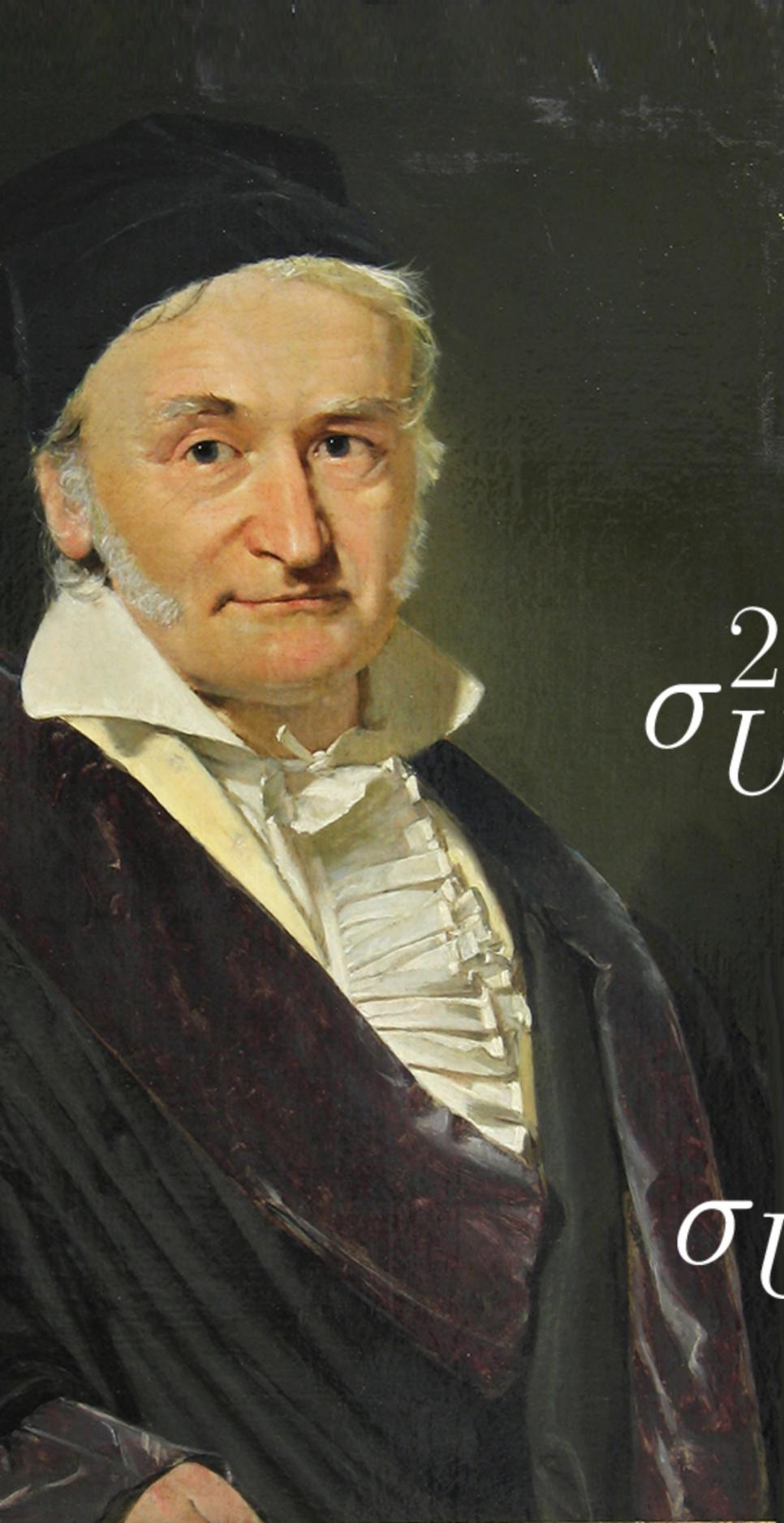


"Designante U functionem datam quantitatum incognitarum V, V', V'' , etc., quaeritur error medius M in determinatione valoris ipsius U metuendus, si pro V, V', V'' , etc. adoptentur non valores veri, sed ii, qui ex observationibus ab invicem independentibus, erroribus mediis m, m', m'' , etc. resp. obnoxiiis prodeunt."



$$U = F(V_1, V_2, \dots)$$

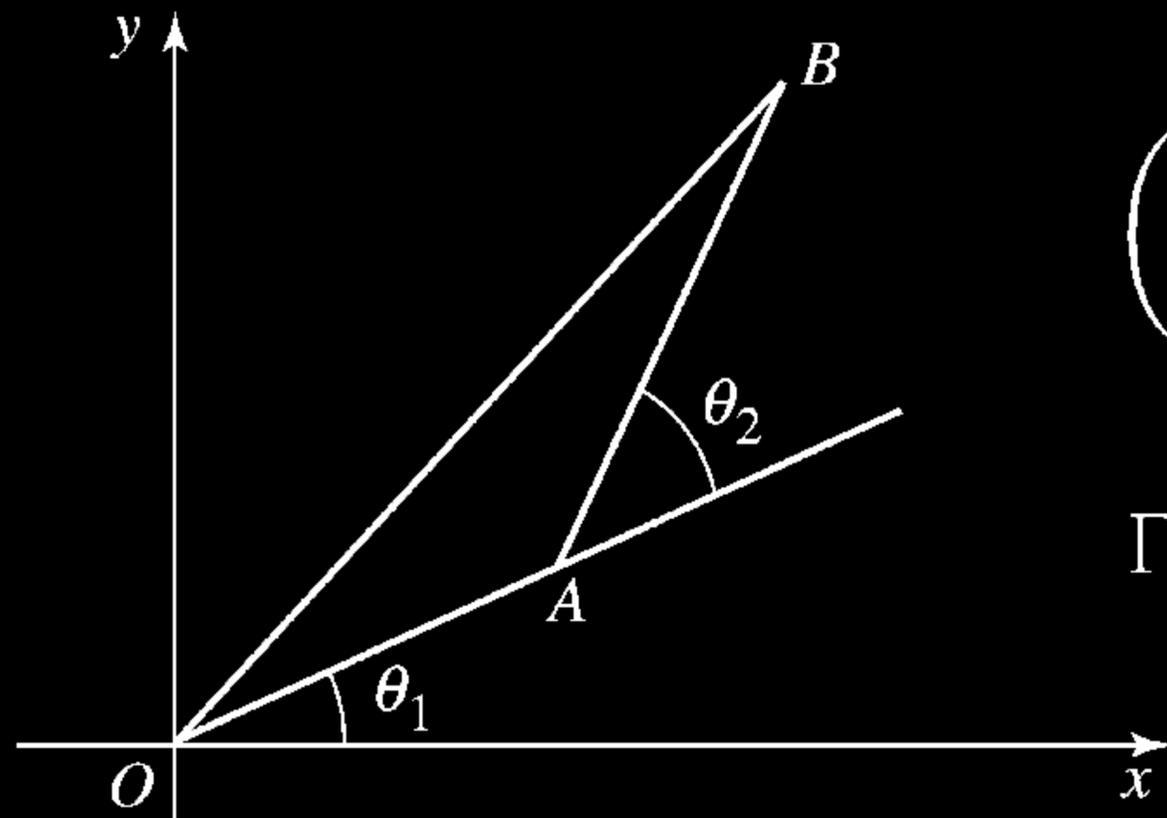
$$\sigma_U^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial V_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial V_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots$$



$$U = F(V_1, V_2, \dots)$$

$$\sigma_U^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial V_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial V_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots$$

$$\sigma_U = \left|\frac{\partial U}{\partial V_1}\right| \sigma_1 + \left|\frac{\partial U}{\partial V_2}\right| \sigma_2 + \dots$$



$$\left((0, L)^2 \times (0, \pi)^2, \mathcal{B}((0, L)^2 \times (0, \pi)^2), \frac{d\ell_1}{L} \frac{d\ell_2}{L} \frac{d\theta_1}{\pi} \frac{d\theta_2}{\pi}, \mathbb{D}, \Gamma \right)$$

$$\Gamma[f, g] = \ell_1^2 \frac{\partial f}{\partial \ell_1} \frac{\partial g}{\partial \ell_1} + \frac{1}{2} \ell_1 \ell_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \ell_1} \frac{\partial g}{\partial \ell_2} + \frac{\partial f}{\partial \ell_2} \frac{\partial g}{\partial \ell_1} \right) + \ell_2^2 \frac{\partial f}{\partial \ell_2} \frac{\partial g}{\partial \ell_2} + \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \frac{\partial g}{\partial \theta_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1} \frac{\partial g}{\partial \theta_2} + \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \frac{\partial g}{\partial \theta_1} \right) + \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \frac{\partial g}{\partial \theta_2}.$$

$$\Gamma[\text{aire}(OAB)] = \frac{1}{4} \ell_1^2 \ell_2^2 (1 + 2 \sin^2 \theta_2).$$

$$\frac{(\Gamma[\text{aire}(OAB)])^{1/2}}{\text{aire}(OAB)} = \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_2} + 2 \right)^{1/2}$$

$$OB^2 = \ell_1^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos \theta_2 + \ell_2^2,$$

$$\frac{\Gamma[OB]}{OB^2} = 1 - \frac{\ell_1 \ell_2 \cos \theta_2}{OB^2}$$

Structures d'erreur

Le concept de structure d'erreur

Définir un calcul d'erreur intrinsèque et avec outil d'extension

Structures d'erreur : Définition fondamentale

Calculs fonctionnels lipschitziens, existence de densité

espaces de Hilbert

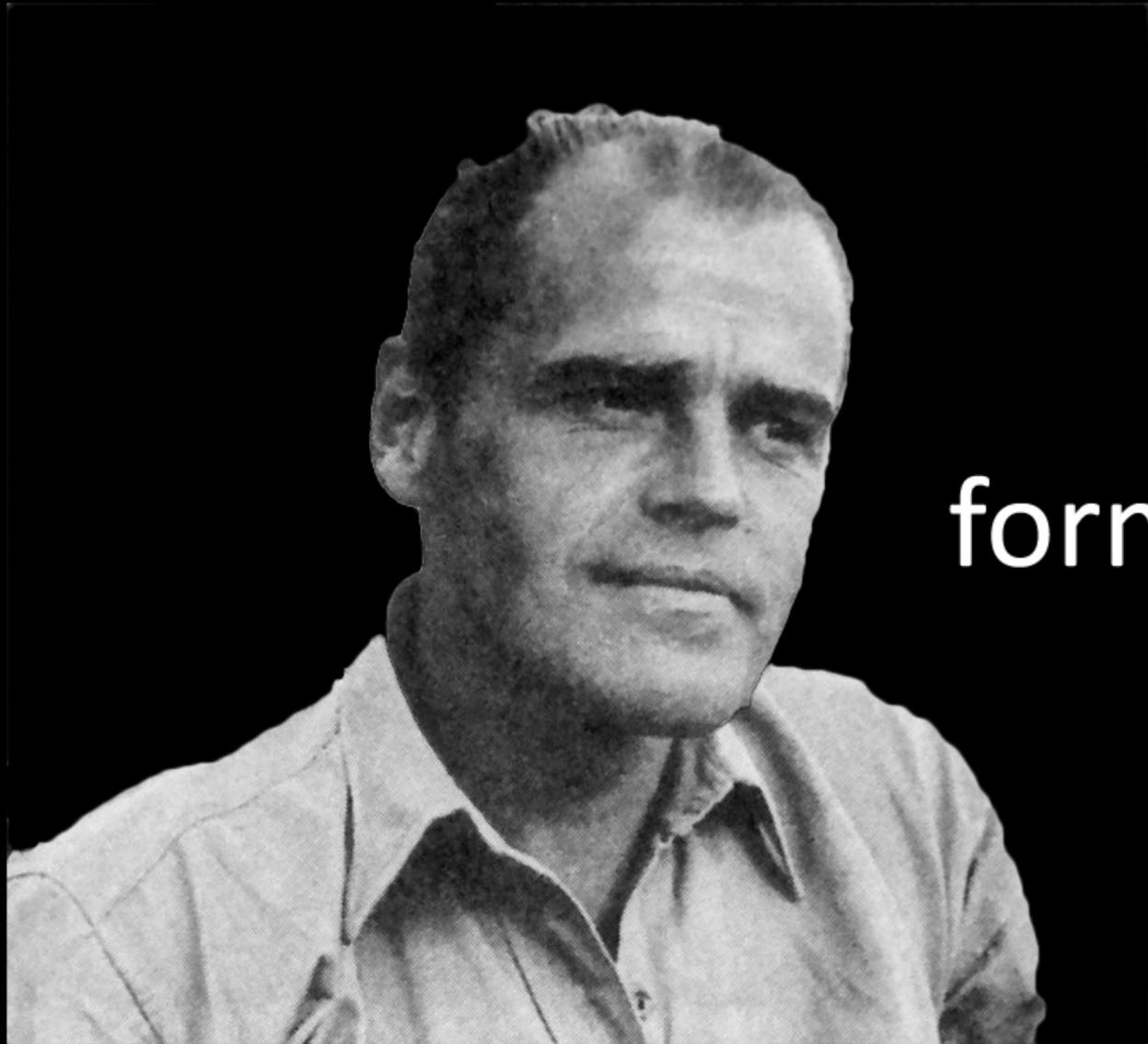
espaces de Banach

probabilités sigma-additives

espaces de Hilbert

espaces de Banach

probabilités sigma-additives



forme de Dirichlet



Définition 6.1.

Une structure d'erreur est un terme

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$$

où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, et :

- (1) \mathbb{D} est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (aussi noté $L^2(\mathbb{P})$);
- (2) Γ est une application bilinéaire symétrique positive de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ dans $L^1(\mathbb{P})$ satisfaisant « le calcul fonctionnel de classe $\mathcal{C}^1 \cap \text{Lip}$ ». Cette expression signifie

$$\forall u \in \mathbb{D}^m, \quad \forall v \in \mathbb{D}^n, \quad \forall F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

avec F, G de classe \mathcal{C}^1 et lipschitziennes, alors $F(u) \in \mathbb{D}, G(v) \in \mathbb{D}$ et

$$\Gamma[F(u), G(v)] = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial x_i}(u) \frac{\partial G}{\partial x_j}(v) \Gamma[u_i, v_j] \quad \mathbb{P}\text{-p.s.};$$

- (3) la forme bilinéaire $\mathcal{E}[u, v] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[\Gamma[u, v]]$ est « fermée ». Ceci signifie que l'espace \mathbb{D} muni de la norme (appelée norme de Dirichlet)

$$\|u\|_{\mathbb{D}} = \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{P})}^2 + \mathcal{E}[u, u] \right)^{1/2}$$

est complet.

- (4) Si en outre la fonction constante 1 appartient à \mathbb{D} (ce qui implique $\Gamma[1] = 0$ par la propriété (2)), nous dirons que la structure d'erreur est markovienne.

Γ
est l'opérateur
carré du champ
(ou opérateur
quadratique
de Gauss)

la forme \mathcal{E}
est fermée

extension du
calcul de Gauss

Un calcul d'erreur pour les processus

Images.

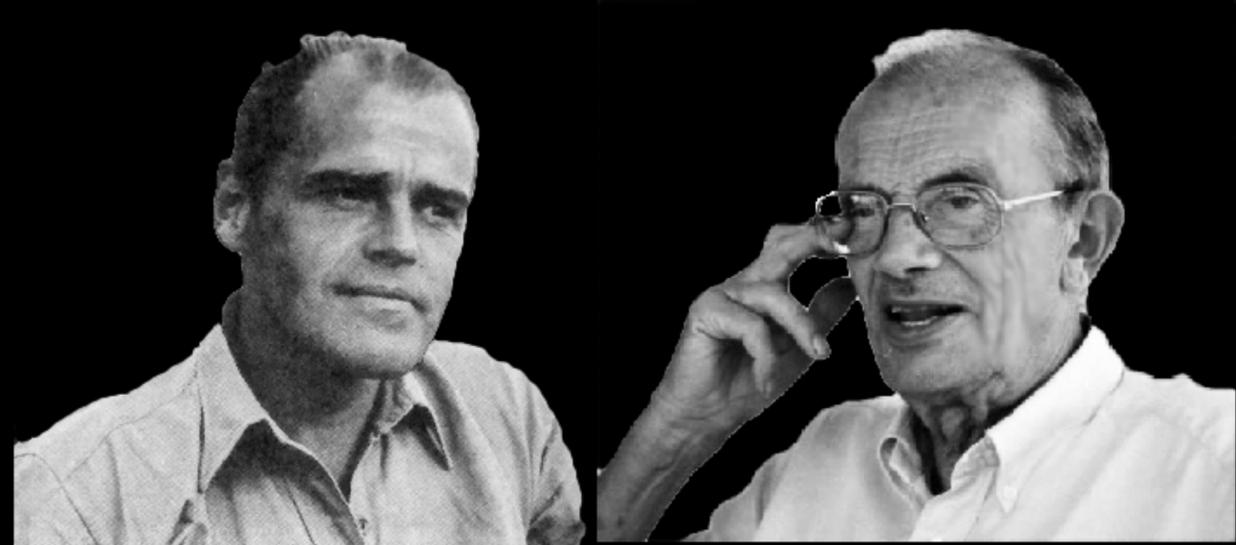
Produits finis

Produits infinis

Structures d'erreur sur l'espace de Wiener

sur l'espace de Monte Carlo

sur l'espace de Poisson



forme de Dirichlet



calcul d'Ito



calcul de Malliavin

La structure d'Ornstein-Uhlenbeck (=calcul de Malliavin)
est une perturbation transversale du mouvement brownien

$$P_t[F] = \hat{E}[F(e^{-t/2}B + \sqrt{1 - e^{-t}}\hat{B})]$$

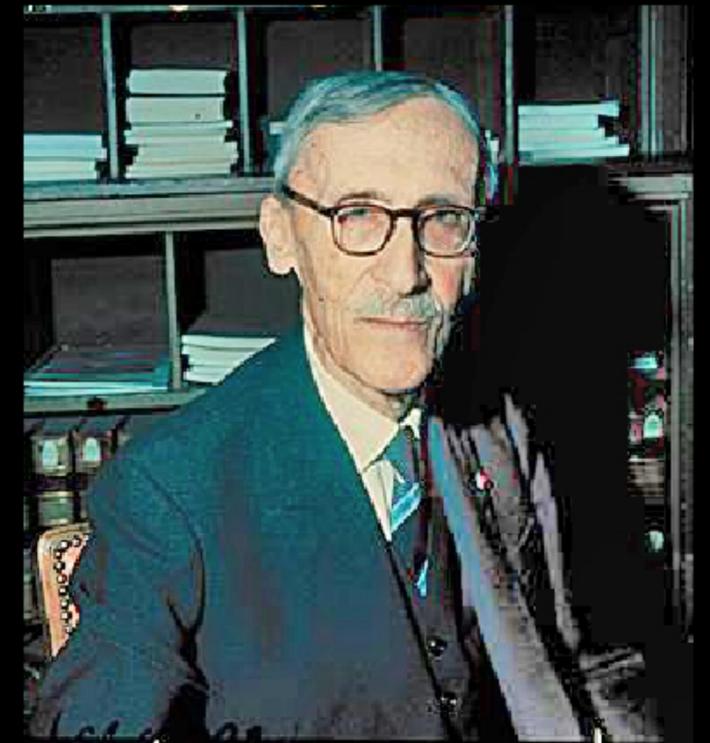
$$\omega \longrightarrow e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\omega + \sqrt{1 - e^{-\varepsilon}}\hat{\omega}$$

formule de type Mehler généralisée

$$P_t F = \hat{E}\left[F\left(\int_0^\infty (p_{\frac{t}{2}}\mathbb{1}_{[0,\cdot]}) (u) dB_u + \int_0^\infty (\sqrt{1 - p_t}\mathbb{1}_{[0,\cdot]}) (v) d\hat{B}_v\right)\right]$$



espace de Poisson



processus de Lévy

Le biais

$$A[F(u)] = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(u) A[u_i] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(u) \Gamma[u_i, u_j] \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

calcul fonctionnel pour le biais

(sous hypothèses sur F et sur u)

$$\begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{ il existe } \bar{A}[\varphi] \in L^2(E, \mathcal{F}, \mathbb{P}_Y) \text{ t.q. } \forall \chi \in \mathcal{D} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \mathbb{E}[(\varphi(Y_n) - \varphi(Y))\chi(Y)] = \mathbb{E}_Y[\bar{A}[\varphi]\chi]. \end{cases} \quad \text{(H1)}$$

$$\begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{ il existe } \underline{A}[\varphi] \in L^2(E, \mathcal{F}, \mathbb{P}_Y) \text{ t.q. } \forall \chi \in \mathcal{D} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \mathbb{E}[(\varphi(Y) - \varphi(Y_n))\chi(Y_n)] = \mathbb{E}_Y[\underline{A}[\varphi]\chi]. \end{cases} \quad \text{(H2)}$$

$$\begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{ il existe } \tilde{A}[\varphi] \in L^2(E, \mathcal{F}, \mathbb{P}_Y) \text{ t.q. } \forall \chi \in \mathcal{D} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \mathbb{E}[(\varphi(Y_n) - \varphi(Y))(\chi(Y_n) - \chi(Y))] = -2\mathbb{E}_Y[\tilde{A}[\varphi]\chi]. \end{cases} \quad \text{(H3)}$$

Théorème 10.3.

Sous l'hypothèse **(H3)**

a) la limite

$$\tilde{\mathcal{E}}[\varphi, \chi] = \lim_n \frac{\alpha_n}{2} \mathbb{E}[(\varphi(Y_n) - \varphi(Y))(\chi(Y_n) - \chi(Y))], \quad \varphi, \chi \in \mathcal{D}$$

définit une forme bilinéaire positive fermable dont la plus petite extension fermée est notée $(\mathcal{E}, \mathbb{D})$;

b) $(\mathcal{E}, \mathbb{D})$ est une forme de Dirichlet;

c) $(\mathcal{E}, \mathbb{D})$ admet un opérateur quadratique de Gauss Γ satisfaisant, $\forall \varphi, \chi \in \mathcal{D}$,

$$\Gamma[\varphi] = \tilde{A}[\varphi^2] - 2\varphi\tilde{A}[\varphi]$$

$$\mathbb{E}_Y[\Gamma[\varphi]\chi] = \lim_n \alpha_n \mathbb{E}[(\varphi(Y_n) - \varphi(Y))^2(\chi(Y_n) + \chi(Y))/2]$$

d) $(\mathcal{E}, \mathbb{D})$ est locale si et seulement si, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\lim_n \alpha_n \mathbb{E}[(\varphi(Y_n) - \varphi(Y))^4] = 0.$$

Identification
et
applications

$$J(\theta) = \left[\int \frac{\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_j}}{f(x, \theta)} d\mu(x) \right]_{0 \leq i, j \leq d}$$



$$\Gamma [I] = J^{-1}$$

CALCUL
DES
PROBABILITÉS

PAR
H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,



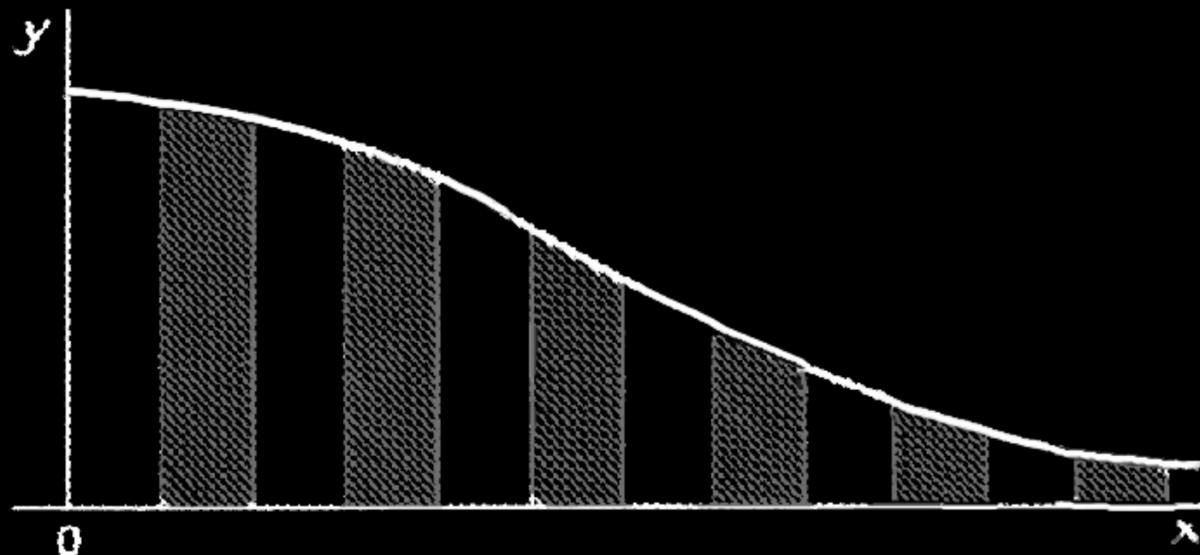
"Avec un mètre divisé en millimètres, on ne pourra jamais, si souvent qu'on répète les mesures, déterminer une longueur à un millionième de millimètre près."

CALCUL
DES
PROBABILITÉS

PAR
H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,



principe des fonctions arbitraires



Considérons un grand nombre de *planètes*, dont les orbites soient sensiblement circulaires . . .



Historique

Laplace P. S., *Théorie analytique des probabilités* Paris 1812.

Gauss C. F., *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* 1821.

physique statistique

mécanique quantique

théorie des semi-groupes d'opérateurs

Théorie des erreurs

Prolongements et questions ouvertes

IHP février-mars 2011

1. Questions liées aux applications

1.1 Extension ds méthodes statistiques

Théorie des erreurs = Théorie des probabilités avec des v. a. infiniment petites tout en conservant leurs deux premiers moments

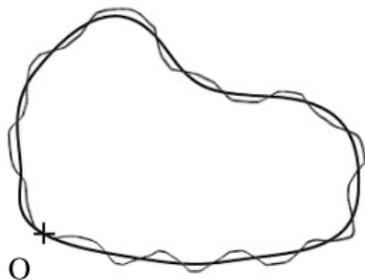
Les structures d'erreur conservent beaucoup de propriétés des modèles probabilistes

Quid des grandes méthodes statistiques ?

- Lien avec l'information de Fisher (Bouleau-Chorro)
- maximum de vraisemblance
- séries temporelles, filtrage
- théorie des tests
- statistique paramétrique et non paramétrique

1. Questions liées aux applications

1.2 Problèmes aux limites



Les structures d'erreurs permettent d'étudier des problèmes aux limites avec une erreur sur la forme de la frontière.

Ce genre de problème avait déjà été abordé par Hadamard dès 1908

1. Questions liées aux applications

1.3 Endomorphismes de structures d'erreurs

Situations analogues à celles des systèmes dynamiques, si θ conserve la mesure et multiplie Γ par un facteur λ

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma) \xrightarrow{\theta} (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \lambda\Gamma)$$

par exemple le décalage sur

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma) = \prod_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu, \mathbf{d}, \lambda^n G)$$

(cf thèse de Guillaume Poly)

1. Questions liées aux applications

1.4 Physique statistique et quantique

Les physiciens font des calculs qui ressemblent à l'usage de structures d'erreurs sans le dire, notamment pour les calculs de fluctuations.

Je cite un passage du fameux traité de Landau et Lifschitz, où on a vraiment l'impression qu'ils font un calcul de carré du champ sur un pont brownien muni de la structure d'Ornstein-Uhlenbeck.

C'est semble-t-il assez général.

2. Approfondissements et prolongements de la théorie des erreurs

2.1 Méthode de simulation par paquets

La détermination de l'erreur quadratique et du biais dans un modèle probabiliste peut se faire par la méthode des paquets expliquée au chapitre 11. Pour le calcul du biais cette méthode utilise une double limite (pour chaque point $\omega \in \Omega$ de la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$):

- a) D'abord on évalue par simulation l'écart entre le résultat du calcul sur le centre de gravité d'un nuage de points et le centre de gravité des résultats du calcul sur ces points.
- b) On resserre le nuage de points initiaux dans une région de plus en plus petite autour de la donnée ω choisie.

La question qui reste en suspend est de savoir quelle répartition prendre pour le nuage de points. Pratiquement on peut savoir si cette répartition a une grande importance ou non. Il n'en reste pas moins que des hypothèses précises seraient à dégager pour les cas usuels.

2. Approfondissements et prolongements de la théorie des erreurs

2.2 Extension de l'interprétation par l'information de Fisher à la dimension infinie

Il s'agit de trouver une meilleure connexion de la théorie des structures d'erreur avec la statistique asymptotique.

J'esquisse comment on pourrait envisager le passage de la dimension finie à l'espace de Wiener concernant l'information de Fisher en l'abordant côté carré du champ.

2. Approfondissements et prolongements de la théorie des erreurs

2.3 Limites projectives avec le générateur au lieu de la forme

Il semble que la définition d'un système projectif serait différente si la condition de compatibilité par projection portait non plus sur les formes de Dirichlet mais sur les générateurs associés.

Apparemment on obtiendrait une notion de système projectif plus restrictive qui fait intervenir la forme et la mesure. Mais on pourrait alors disposer de l'outil de la symétrie des pré-générateurs sur leurs domaines pour appliquer la méthode de Friedrichs et obtenir peut-être des conditions suffisantes de fermabilité.

2. Approfondissements et prolongements de la théorie des erreurs

2.4 Répartition empirique de suites équiréparties

Disons les choses en dimension 1 pour simplifier. Soit ξ_n une suite équirépartie sur $[0, 1]$ et $F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_1^N 1_{\{\xi_n \leq x\}}$ la fonction de répartition associée. Si U est une variable uniforme sur $[0, 1]$, la variable aléatoire $F_N(U)$ est une approximation de U car $F_N(x)$ tend vers x (uniformément).

Alors la théorie des opérateurs de biais s'applique (cf. chapitre 10)

Ceci permettrait de se doter d'un calcul d'erreur pour les simulations du type quasi-Monte Carlo.

2. Approfondissements et prolongements de la théorie des erreurs

2.5 Structure d'erreur instantanée d'un processus stochastique

2.6 Structure d'erreur et théorie des capacités

Si nous avons une structure d'erreur, nous disposons aussitôt d'une théorie des capacités, Du point de vue de la théorie des erreurs les ensembles de capacité nulle ont une signification empirique. Ceci se relie au fait que durant une procédure d'approximation certains ensembles *ne sont pas vus*.

3. Problèmes mathématiques ouverts et conjectures

3.1 Caractérisation des structures d'erreurs en dimension 2 et au delà.

En dimension 1, une condition nécessaire et suffisante de fermabilité sur $L^2(\mathbb{R})$ d'une forme quadratique de la forme

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)v'(x)\nu(dx) \\ \mathcal{D}[\mathcal{E}] &= \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}$$

a été trouvée par M. Hamza en 1975.

La question se pose évidemment de trouver des caractérisations en dimension supérieure et déjà en dimension 2. Travaux inachevés de Gabriel Mokobodski utilisant des résultats de David Preiss.

3.2 Conjecture de la densité de l'énergie image.

La structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck a la propriété que toute variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^d appartenant au domaine de la forme de Dirichlet dont la matrice d'erreur quadratique $\Gamma[X, X^t]$ est presque sûrement inversible a une loi absolument continue.

La démonstration utilise la formule de co-aire de H. Federer. Ceci donne des résultats de régularité de solutions d'équations différentielles stochastiques dans le cas de coefficients lipschitziens.

Cette propriété est vraie pour plusieurs autres structures obtenues par image ou produit (y compris sur l'espace de Poisson cf. Bouleau-Denis 2015) et est toujours vraie pour des fonctions à valeurs réelles.

Nous avons posé en 1986 avec Francis Hirsch la conjecture qu'elle était toujours vérifiée.

Cette conjecture s'écrit donc

Conjecture (Energy Image Density)

*Pour toute structure d'erreur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ et tout entier $d \geq 1$,
si $X \in \mathbb{D}^d$*

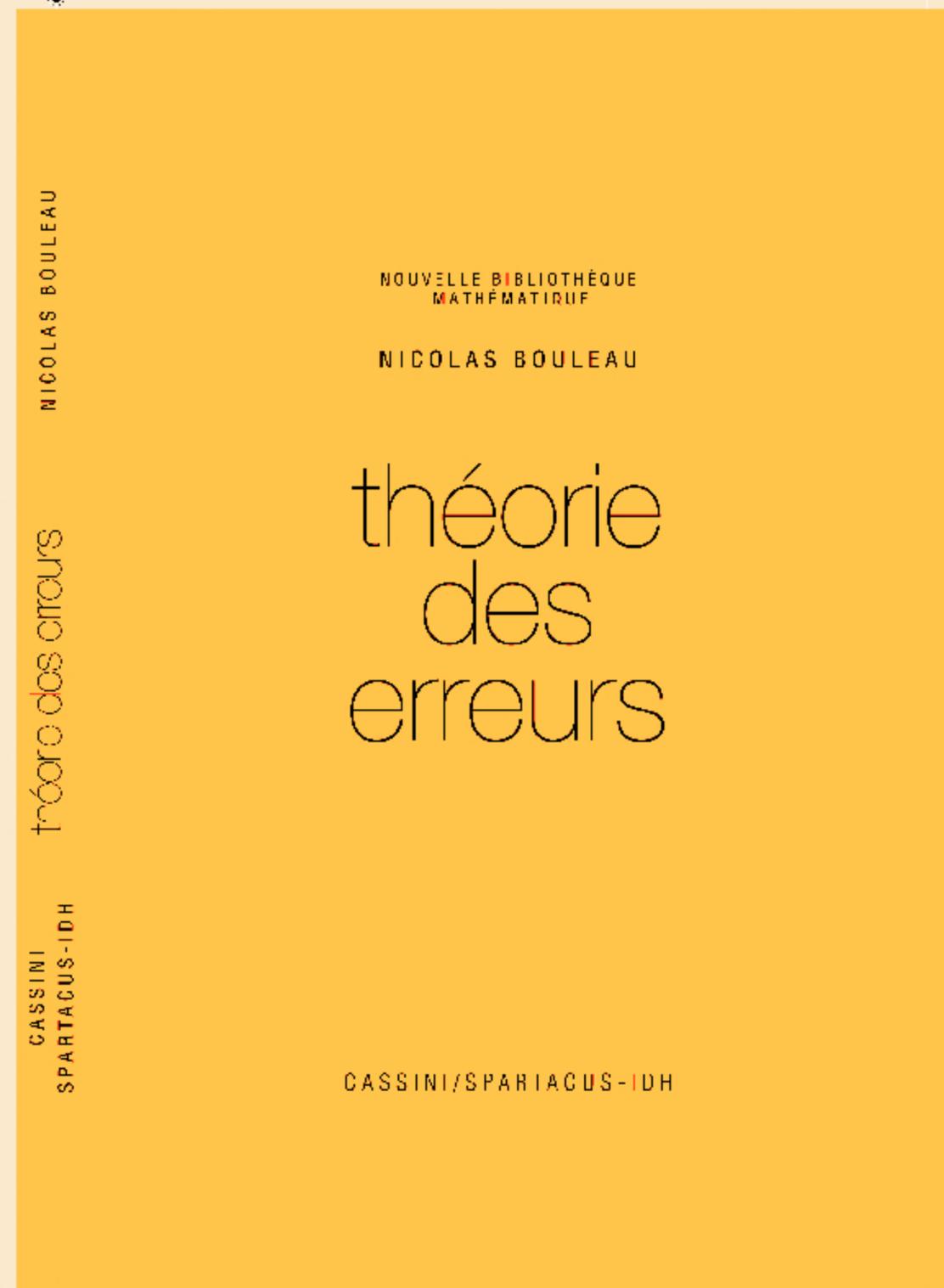
$$X_*(1_{\{\det \Gamma[X, X^t] > 0\}} \cdot \mathbb{P}) \ll \lambda_d$$

où λ_d est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d et X_μ désigne l'image de la mesure μ par X .*

cette conjecture n'est pas résolue à ce jour.

merci de votre attention

questions ?



- considérer la résolution par éléments finis de problèmes aux limites avec coefficients ou données frontière aléatoires, avec les outils du chapitre 10 afin de viser des résultats d'existence de densité pour la solution

