

LA LOI DE FOURIER : UNE INTRODUCTION

Ce document est en travaux et comporte probablement beaucoup d'erreurs ou d'imprécisions. Tout commentaire est le bienvenu : julien.reygner@upmc.fr.

INTRODUCTION

Grandeurs et principes de la thermodynamique. Le premier principe de la thermodynamique énonce l'existence, pour tout système thermodynamique, d'une quantité appelée *énergie interne* et notée U , dont la variation infinitésimale dU se fait par échange de chaleur δQ avec l'extérieur. Le *flux thermique* à travers la surface Σ du système est noté $\Phi_{\text{th}} := \delta Q/dt$, il s'exprime en W. Pour tout $x \in \Sigma$, le vecteur *densité de flux thermique* $J(t, x)$ est défini par $d\Phi_{\text{th}} = J \cdot d\Sigma$, où $d\Sigma$ est un élément de surface orienté autour de x . La norme de J s'exprime en W.m^{-2} .

La *température thermodynamique* T d'un système thermodynamique est définie par la dérivée $\partial S/\partial U$, où S est l'*entropie* du système, définie par le second principe de la thermodynamique. La température s'exprime en K. La *loi de Fourier* est la relation constitutive

$$(1) \quad J = -\kappa(T)\nabla T,$$

où $\kappa(T; t, x)$ est appelée *conductivité thermique* du matériau. En général, c'est une matrice 3×3 positive et ses coefficients s'expriment en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Cette loi est empirique, mais vérifiée expérimentalement dans la quasi-totalité des situations (fluides, solides, températures extrêmes), à l'exception notable des nanotubes de carbone, qui sont des matériaux unidimensionnels.

Comportement diffusif de l'énergie. La loi de Fourier exprime un comportement *diffusif* de l'énergie. [l'écrire

$$(2) \quad c(T)\partial_t T = \nabla \cdot (\kappa(T)\nabla T),$$

où $c(T)$ est la capacité calorifique.] [définir diffusion normale et anormale]

Du microscopique au macroscopique. À l'échelle microscopique, la matière est constituée de particules dont l'évolution suit les lois classiques du mouvement. Dans ce contexte, le but de la mécanique statistique est double :

- donner une définition *thermodynamique* des grandeurs macroscopiques (énergie interne, température, etc.), c'est-à-dire comme des statistiques de l'état du système microscopique ;
- en déduire une justification rigoureuse des relations constitutives telles que (1).

Assez naturellement, une grandeur thermodynamique ne devrait pas être sensible aux petites variations du système microscopique : si la position d'une particule est légèrement modifiée, l'énergie totale ou la température du système ne devraient pas être affectées. Cette propriété du système microscopique est appelée *ergodicité*. D'un point de vue mathématique, c'est une propriété difficile à établir pour des évolutions purement déterministes — donc, des évolutions décrivant réellement la physique. C'est pourquoi de nombreux modèles ont été construits en introduisant une perturbation *stochastique* de l'évolution déterministe, afin d'obtenir des résultats d'ergodicité. Bien sûr, une telle perturbation peut modifier le comportement du système, y compris à l'échelle macroscopique.

Ce document propose une introduction au formalisme utilisé pour décrire l'évolution microscopique des systèmes et leur comportement à l'échelle macroscopique. Les deux grands articles de revue sur ce problème sont Bonetto, Lebowitz et Rey-Bellet [6] et Lepri, Livi et Politi [16]. Le contenu de cette introduction reprend, dans une large mesure, le chapitre 3 de Stoltz [23].

1. DYNAMIQUE MICROSCOPIQUE À TAILLE FINIE

On considère un système de N particules en interaction, qui vivent dans un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$. Au temps $t \geq 0$, la i -ème particule, $i \in \{1, \dots, N\}$, est décrite par sa position $q_i(t) \in \mathcal{D}$ et sa quantité de mouvement $p_i(t) \in \mathbb{R}^d$. L'espace des phases est $\mathcal{X} = \mathcal{D}^N \times (\mathbb{R}^d)^N$. Sauf mention explicite du

contraire, on suppose que toutes les particules ont la même masse, prise égale à 1, de sorte que l'on peut identifier quantité de mouvement et vitesse.

On postulera toujours que la dynamique $(q_1(t), \dots, q_N(t); p_1(t), \dots, p_N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Markov homogène. Rappelons que le *semi-groupe* associé $(P_t)_{t \geq 0}$ est la famille d'opérateurs définie par, pour tout $t \geq 0$,

$$(3) \quad x \in \mathcal{X}, \quad P_t f(x) := \mathbb{E}_x [f(q_1(t), \dots, q_N(t); p_1(t), \dots, p_N(t))];$$

où la notation $\mathbb{E}_x [\cdot]$ indique que le processus $(q_1(t), \dots, q_N(t); p_1(t), \dots, p_N(t))_{t \geq 0}$ est initialisé à la configuration $x \in \mathcal{X}$. Lorsque le semi-groupe possède de bonnes propriétés de régularité, on définit son *générateur infinitésimal* $\mathcal{L}$ par

$$(4) \quad \forall f \in D(\mathcal{L}), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{L}f(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t},$$

où $D(\mathcal{L})$ est l'ensemble des fonctions f pour lesquelles la limite ci-dessus existe. Une présentation adéquate de la théorie des processus de Markov, et en particulier de leurs propriétés d'ergodicité, est faite par Rey-Bellet [20].

1.1. Dynamique hamiltonienne et perturbation stochastique. On s'intéressera plus particulièrement aux dynamiques suivantes.

1.1.1. Dynamique hamiltonienne. Soit $V : \mathcal{D}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction représentant l'énergie potentielle associée à un ensemble de positions. L'évolution d'un système suivant les lois classiques du mouvement est gouvernée par le *hamiltonien* $H : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$(5) \quad H(q, p) := \sum_{i=1}^N \frac{|p_i|^2}{2} + V(q_1, \dots, q_N), \quad (q, p) = (q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N),$$

selon le système d'équations différentielles

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{q}_i = \nabla_{p_i} H(q, p) = p_i; \\ \dot{p}_i = -\nabla_{q_i} H(q, p) = -\nabla_{q_i} V(q_1, \dots, q_N). \end{cases}$$

Si, pour toute configuration initiale $x \in \mathcal{X}$, il existe une unique solution $(q(t), p(t))_{t \geq 0}$ au système d'équations différentielles (6) initialisé en x , alors on appelle *flot hamiltonien* $(\phi_t)_{t \geq 0}$ la famille d'applications de $\mathcal{X}$ dans lui-même définies par $\phi_t(x) := (q(t), p(t))$, et le semi-groupe de la dynamique hamiltonienne s'exprime en fonction du flot par

$$(7) \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad P_t f(x) = f(\phi_t(x)).$$

Formellement, le générateur infinitésimal s'écrit alors

$$(8) \quad \mathcal{L}f = \sum_{i=1}^N p_i \cdot \nabla_{q_i} f - \sum_{i=1}^N \nabla_{q_i} V \cdot \nabla_{p_i} f,$$

où $\cdot$ représente le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$.

Le terme $\sum_{i=1}^N |p_i|^2/2$ du hamiltonien est l'énergie cinétique, de sorte que $H(q, p)$ représente l'énergie mécanique totale d'une configuration (q, p) . La dynamique hamiltonienne conserve l'énergie mécanique totale, ie pour tout $x \in \mathcal{X}$, pour tout $t \geq 0$, $H(\phi_t(x)) = H(x)$.

1.1.2. Chaînes d'oscillateurs. Une *chaîne d'oscillateurs* est un système hamiltonien au sens du paragraphe 1.1.1 dans lequel l'énergie potentielle prend la forme particulière

$$(9) \quad V(q_1, \dots, q_N) = \sum_{i=1}^N v(q_i - q_{i-1}) + u(q_i),$$

où l'on convient que $q_0 = 0$. Les fonctions $v, u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement appelées *potentiel d'interaction de paires* et *potentiel d'accrochage*. Dans un tel modèle, la i -ème particule est disposée sur le site i du réseau $\{1, \dots, N\}$ et elle oscille autour de sa position d'équilibre avec une amplitude $q_i \in \mathcal{D}$, chaque particule interagissant avec sa voisine de droite et sa voisine de gauche. Un tel système modélise l'évolution d'un solide unidimensionnel. On peut bien sûr définir des réseaux,

dits *cristallins*, de dimension supérieure, avec interactions aux plus proches voisins, de manière similaire.

Lorsque le potentiel d'accrochage est nul, ie $u = 0$, alors V est invariant par translation et on vérifie que la quantité de mouvement totale $\sum_{i=1}^N q_i$ est conservée par la dynamique hamiltonienne.

Lorsque le potentiel d'interaction de paires est quadratique, ie $v(q) = k|q|^2$, la chaîne d'oscillateurs est dite *harmonique* et la force d'interaction entre deux particules voisines est proportionnelle à la distance entre ces deux particules.

1.1.3. Thermostats. On introduit maintenant une perturbation stochastique de la dynamique hamiltonienne d'une chaîne d'oscillateurs afin de prendre en compte l'action de thermostats ajoutés à chaque extrémité de la chaîne. On modélise ces thermostats de la manière suivante :

- la description de la dynamique des particules à l'intérieur de la chaîne reste inchangée :

$$(10) \quad \forall i \in \{2, \dots, N-1\}, \quad \begin{cases} dq_i(t) = p_i(t)dt, \\ dp_i(t) = -\nabla_{q_i} V(q_1(t), \dots, q_N(t))dt; \end{cases}$$

- la particule la plus à gauche est au contact d'un thermostat à la température T_L :

$$(11) \quad \begin{cases} dq_1(t) = p_1(t)dt, \\ dp_1(t) = -\nabla_{q_1} V(q_1(t), \dots, q_N(t))dt - \gamma p_1(t)dt + \sqrt{\frac{2\gamma}{\beta_L}} dW_L(t); \end{cases}$$

- la particule la plus à droite est au contact d'un thermostat à la température T_R :

$$(12) \quad \begin{cases} dq_N(t) = p_N(t)dt, \\ dp_N(t) = -\nabla_{q_N} V(q_1(t), \dots, q_N(t))dt - \gamma p_N(t)dt + \sqrt{\frac{2\gamma}{\beta_R}} dW_R(t); \end{cases}$$

où $\beta_L = 1/T_L$ et $\beta_R = 1/T_R$ sont les *températures inverses*, $\gamma > 0$ est l'*intensité* des thermostats et W_L et W_R des mouvement browniens dans $\mathbb{R}^d$, indépendants. Ici, on modélise l'interaction avec les thermostats au moyen de processus de Langevin, une discussion sur la modélisation de ces thermostats est faite dans [6, Section 4] et [16, Section 3].

1.2. Mesure invariante. L'espace des phases $\mathcal{X}$ étant muni de la tribu borélienne induite par $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathbb{R}^d)^N$, une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{X}$ est appelée *mesure invariante* pour le semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$,

$$(13) \quad \int_{\mathcal{X}} P_t f(x) d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x).$$

Alors le processus $(q(t), p(t))_{t \geq 0}$ est *stationnaire*, ie sa loi est invariante par translation dans le temps. Les mesures invariantes sont les mesures de probabilité solutions de l'équation de Fokker-Planck stationnaire $\mathcal{L}^* \mu = 0$, c'est-à-dire

$$(14) \quad \forall f \in D(\mathcal{L}), \quad \int_{\mathcal{X}} \mathcal{L} f(x) d\mu(x) = 0.$$

1.2.1. Ergodicité. On dit qu'une mesure invariante μ est *ergodique* si, pour μ -presque toute condition initiale $x \in \mathcal{X}$, pour toute fonction $A \in C_b(\mathcal{X})$, on peut exprimer la valeur moyenne de $A(q, p)$ sous la probabilité μ comme la moyenne empirique sur une réalisation de la trajectoire $(A(q(t), p(t)))_{t \geq 0}$:

$$(15) \quad \int_{\mathcal{X}} A(q, p) d\mu(q, p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(q(s), p(s)) ds, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

1.2.2. Réversibilité. Lorsqu'il existe une mesure invariante μ , on dit que le processus $(q(t), p(t))_{t \geq 0}$ est (strictement) réversible pour la mesure μ si le domaine du générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ est dense dans l'espace $L^2(\mathcal{X}, \mu)$ et

$$(16) \quad \forall f, g \in D(\mathcal{L}), \quad \int_{\mathcal{X}} f(x) \mathcal{L}g(x) d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} g(x) \mathcal{L}f(x) d\mu(x).$$

Le processus $(q(t), p(t))_{t \geq 0}$ est dit réversible pour la mesure μ si l'égalité ci-dessus tient à une opération bijective près, c'est-à-dire s'il existe une bijection s de $\mathcal{X}$ dans lui-même telle que $D(\mathcal{L})$ est stable par l'application $f \mapsto f \circ s$, s préserve la mesure μ et

$$(17) \quad \forall f, g \in D(\mathcal{L}), \quad \int_{\mathcal{X}} f(x) \mathcal{L}g(x) d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} g(s(x)) \mathcal{L}f(s(x)) d\mu(x).$$

Un modèle pour lequel la dynamique est réversible est appelé *système à l'équilibre*. Autrement, il est dit *hors d'équilibre*. Il est facile de vérifier que pour tout $\beta > 0$, la *mesure de Gibbs*

$$(18) \quad d\mu(x) := \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta H(x)) dx$$

est invariante pour l'évolution hamiltonienne décrite au paragraphe 1.1.1 dès que le potentiel V vérifie de bonnes propriétés de croissance à l'infini. Dans la définition ci-dessus (18), $Z(\beta)$ est une constante de normalisation et est appelée *fonction de partition* du système ; dx est la mesure de Lebesgue sur l'espace des phases, elle est parfois appelée *mesure de Liouville*. La dynamique hamiltonienne est réversible pour toute mesure de Gibbs de la forme (18), avec $s(q, p) := (q, -p)$ dans (17).

Lorsque les deux thermostats décrits au paragraphe 1.1.3 sont à la même température $T = T_L = T_R$, la mesure de Gibbs à température inverse $\beta = 1/T$ est l'unique mesure invariante pour l'évolution d'une chaîne d'oscillateurs perturbée par les thermostats, qui est alors réversible. Dans le cas où les thermostats ne sont pas à la même température, l'existence et l'unicité d'une mesure invariante ont été prouvées pour de larges classes de potentiels u et v (voir Carmona [8], Eckmann et Hairer [9], Eckmann, Pillet et Rey-Bellet [11, 10], Rey-Bellet et Thomas [21, 19]), mais en général on ne connaît pas d'expression de cette mesure et la dynamique n'est plus réversible.

1.3. Loi de Fourier microscopique. La non-réversibilité d'une dynamique du type de celle décrite au paragraphe 1.1.3 avec des thermostats à températures différentes se traduit physiquement par l'apparition d'un flux d'énergie, du thermostat le plus chaud vers le thermostat le plus froid. C'est ce phénomène que l'on veut étudier du point de vue mathématique.

1.3.1. Flux d'énergie. Pour une chaîne d'oscillateurs comme introduite au paragraphe 1.1.2, avec ou sans perturbation stochastique, on définit l'énergie locale de la i -ème particule par

$$(19) \quad \begin{aligned} \epsilon_1(t) &:= \frac{|p_1(t)|^2}{2} + u(q_1(t)) + \frac{1}{2}v(q_2(t) - q_1(t)) + v(q_1(t)), \\ \epsilon_i(t) &:= \frac{|p_i(t)|^2}{2} + u(q_i(t)) + \frac{1}{2}(v(q_{i+1}(t) - q_i(t)) + v(q_i(t) - q_{i-1}(t))), \quad i \in \{2, \dots, N-1\}, \\ \epsilon_N(t) &:= \frac{|p_N(t)|^2}{2} + u(q_N(t)) + \frac{1}{2}v(q_N(t) - q_{N-1}(t)) + v(q_N(t)), \end{aligned}$$

de sorte que l'énergie mécanique totale est la somme des énergies locales.

On définit maintenant le *flux local d'énergie* entre la $(i+1)$ -ème et la i -ème particule par

$$(20) \quad j_{i+1,i}(t) := -\nabla v(q_{i+1}(t) - q_i(t)) \cdot \frac{p_i(t) + p_{i+1}(t)}{2},$$

de sorte que, pour tout $i \in \{2, \dots, N-1\}$,

$$(21) \quad d\epsilon_i(t) = (j_{i,i-1}(t) - j_{i+1,i}(t)) dt.$$

Le *flux d'énergie total* est maintenant défini par

$$(22) \quad J(t) := \sum_{i=1}^{N-1} j_{i+1,i}(t).$$

Formellement, sous la mesure invariante, $\epsilon_i(t)$ est une constante du temps. En conséquence, le flux local d'énergie est constant le long du matériau : $\langle j_{i+1,i} \rangle = \langle j_{i,i-1} \rangle =: j$, de sorte que $\langle J \rangle = (N-1)j$.

1.3.2. Conductivité thermique. On revient au modèle de la chaîne d'oscillateurs en contact avec des thermostats introduite au paragraphe 1.1.3. On suppose $T_R > T_L$ et on note $T := (T_L + T_R)/2$, $\Delta T := (T_R - T_L)/2$ de sorte que $T_L = T - \Delta T$, $T_R = T + \Delta T$. On suppose que pour toute valeur de $\Delta T > 0$, il existe une unique mesure invariante $\mu_{\Delta T}$ pour la dynamique. Pour toute fonction $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, appelée *observable*, on note $\langle A \rangle_{\Delta T}$ la valeur moyenne de A sous $\mu_{\Delta T}$, ie

$$(23) \quad \langle A \rangle_{\Delta T} := \int_{\mathcal{X}} A(x) d\mu_{\Delta T}(x).$$

On s'intéresse au cas où ΔT est petit devant T , de sorte que la dynamique décrite au paragraphe 1.1.3 puisse être vue comme une perturbation d'ordre ΔT de la dynamique à l'équilibre thermique à la température T , dont l'unique mesure invariante est la mesure de Gibbs à la température T , notée naturellement μ_0 .

Sous μ_0 , le flux d'énergie total donné par (22) est nul, ie $\langle J \rangle_0 = 0$. Par analogie avec la loi de Fourier macroscopique, on définit la *conductivité thermique* $\kappa_N(T)$ comme la limite, lorsque ΔT tend vers 0, du rapport entre le flux moyen local d'énergie $j = \langle J \rangle_{\Delta T} / (N-1)$ et le gradient de température $\Delta T/N$ (que l'on suppose constant le long de la chaîne) :

$$(24) \quad \kappa_N(T) := \lim_{\Delta T \downarrow 0} \frac{\langle J \rangle_{\Delta T}}{\Delta T}.$$

1.3.3. Formule de Green-Kubo. Supposons que le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ d'une dynamique hors d'équilibre s'écrive sous la forme

$$(25) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \xi \mathcal{L}_1,$$

où $\mathcal{L}_0$ est le générateur infinitésimal d'une dynamique à l'équilibre, $\mathcal{L}_1$ est un générateur infinitésimal et ξ est petit. Dans l'exemple traité au paragraphe 1.3.2, $\xi = \Delta T$ et $\mathcal{L}_0$ est le générateur infinitésimal de la chaîne d'oscillateurs en contact avec deux thermostats à la même température T . Pour une observable A , soit encore $\langle A \rangle_\xi$ la moyenne de A sous la mesure invariante μ_ξ associée au générateur $\mathcal{L}_0 + \xi \mathcal{L}_1$. Si $\langle A \rangle_0 = 0$, on appelle *réponse linéaire* de A la quantité

$$(26) \quad \alpha := \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\langle A \rangle_\xi}{\xi}.$$

C'est le premier coefficient $f_1(A)$ du développement formel en série entière

$$(27) \quad \langle A \rangle_\xi = \langle A \rangle_0 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i(A) \xi^i.$$

La formule de Green-Kubo s'écrit alors

$$(28) \quad \alpha = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_{\mu_0} [A(q(t), p(t)) S(q(0), p(0))] dt,$$

où $S := \mathcal{L}_1^* 1$ (l'adjoint est pris dans $L^2(\mathcal{X}, \mu_0)$) est appelée *réponse conjuguée* et ne dépend pas de A . Voir Stoltz [23, Paragraphe 3.1.3] pour une introduction plus détaillée et rigoureuse.

2. LIMITE THERMODYNAMIQUE ET CHANGEMENTS D'ÉCHELLE

On souhaite maintenant comprendre le comportement de la conductivité thermique introduite au paragraphe 1.3.2, et plus généralement la manière dont se transporte l'énergie, dans un système à grand nombre de particules. La limite $N \rightarrow +\infty$ des modèles décrits au chapitre 1 s'appelle *limite thermodynamique*. Une question importante est l'existence ou non d'une limite thermodynamique pour la conductivité thermique $\kappa_N(T)$ définie par (24). L'existence de cette limite est équivalente à la loi de Fourier stationnaire (1), voir Bernardin et Olla [3] et Bonetto, Lebowitz et Lukkarinen [7]. Les modèles suivants ont été étudiés, analytiquement ou numériquement :

- systèmes harmoniques : Rieder, Lebowitz et Lieb [22] ;
- systèmes totalement intégrables : Zotos [25] ;

- réseau de Toda : Toda [24], Hatano [13] ;
- chaîne de rotors : Iacobucci, Legoll, Olla et Stoltz [14] ;
- systèmes avec potentiel anharmonique ou inversions aléatoires des quantités de mouvement : Bernardin et Olla [4] ;
- systèmes avec conductivité en N^α , $0 < \alpha < 1$: Basile, Bernardin et Olla [1].

Pour un système avec un nombre infini de particules, on veut maintenant effectuer des changements d'échelle en espace et en temps pour étudier le transport de l'énergie. Il existe deux changements d'échelle naturels, qui décrivent deux comportements différents (voir l'introduction de l'article de Olla [18]) :

- au changement d'échelle *hyperbolique* $t \mapsto \epsilon^{-1}t$, $x \mapsto \epsilon x$, le système est décrit dans la limite *hydrodynamique* par un système de lois de conservation (voir Bernardin et Stoltz [5], Olla, Varadhan et Yau [17], Fritz, Funaki et Lebowitz [12] ; et pour une introduction complète aux limites hydrodynamiques, Kipnis et Landim [15]) ;
- au changement d'échelle *diffusif* $t \mapsto \epsilon^{-2}t$, $x \mapsto \epsilon x$, le système est décrit par l'équation de la chaleur (2) si la diffusion de la chaleur est *normale*, sinon il faut adapter l'exposant devant le changement d'échelle en temps et l'on parle de diffusion *anormale* (voir les notes de cours de Bernardin [2]).

RÉFÉRENCES

- [1] Giada Basile, Cédric Bernardin et Stefano Olla : Thermal conductivity for a momentum conservative model. *Comm. Math. Phys.*, 287(1):67–98, 2009.
- [2] C. Bernardin : Normal and anomalous diffusion in perturbed hamiltonian systems. Notes de cours, <http://perso.ens-lyon.fr/cedric.bernardin/Files/coursImpa2012.pdf>, 2012.
- [3] Cédric Bernardin et Stefano Olla : Fourier's law for a microscopic model of heat conduction. *J. Stat. Phys.*, 121(3-4):271–289, 2005.
- [4] Cédric Bernardin et Stefano Olla : Transport properties of a chain of anharmonic oscillators with random flip of velocities. *J. Stat. Phys.*, 145(5):1224–1255, 2011.
- [5] Cédric Bernardin et Gabriel Stoltz : Anomalous diffusion for a class of systems with two conserved quantities. *Nonlinearity*, 25(4):1099–1133, 2012.
- [6] F. Bonetto, J. L. Lebowitz et L. Rey-Bellet : Fourier's law : a challenge to theorists. In *Mathematical physics 2000*, pages 128–150. Imp. Coll. Press, London, 2000.
- [7] Federico Bonetto, Joel L. Lebowitz et Jani Lukkarinen : Fourier's law for a harmonic crystal with self-consistent stochastic reservoirs. *J. Statist. Phys.*, 116(1-4):783–813, 2004.
- [8] Philippe Carmona : Existence and uniqueness of an invariant measure for a chain of oscillators in contact with two heat baths. *Stochastic Process. Appl.*, 117(8):1076–1092, 2007.
- [9] J.-P. Eckmann et M. Hairer : Non-equilibrium statistical mechanics of strongly anharmonic chains of oscillators. *Comm. Math. Phys.*, 212(1):105–164, 2000.
- [10] J.-P. Eckmann, C.-A. Pillet et L. Rey-Bellet : Non-equilibrium statistical mechanics of anharmonic chains coupled to two heat baths at different temperatures. *Comm. Math. Phys.*, 201(3):657–697, 1999.
- [11] Jean-Pierre Eckmann, Claude-Alain Pillet et Luc Rey-Bellet : Entropy production in nonlinear, thermally driven Hamiltonian systems. *J. Statist. Phys.*, 95(1-2):305–331, 1999.
- [12] J. Fritz, T. Funaki et J. L. Lebowitz : Stationary states of random Hamiltonian systems. *Probab. Theory Related Fields*, 99(2):211–236, 1994.
- [13] Takahiro Hatano : Heat conduction in the diatomic toda lattice revisited. *Phys. Rev. E*, 59:R1–R4, Jan 1999.
- [14] Alessandra Iacobucci, Frédéric Legoll, Stefano Olla et Gabriel Stoltz : Thermal conductivity of the Toda lattice with conservative noise. *J. Stat. Phys.*, 140(2):336–348, 2010.
- [15] Claude Kipnis et Claudio Landim : *Scaling limits of interacting particle systems*, volume 320 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [16] Stefano Lepri, Roberto Livi et Antonio Politi : Thermal conduction in classical low-dimensional lattices. *Phys. Rep.*, 377(1):1–80, 2003.
- [17] S. Olla, S. R. S. Varadhan et H.-T. Yau : Hydrodynamical limit for a Hamiltonian system with weak noise. *Comm. Math. Phys.*, 155(3):523–560, 1993.
- [18] Stefano Olla : Energy diffusion and superdiffusion in oscillators lattice networks. In Vidas Sidoravicius, éditeur : *New Trends in Mathematical Physics*, pages 539–547. Springer Netherlands, 2009.
- [19] L. Rey-Bellet et L. E. Thomas : Fluctuations of the entropy production in anharmonic chains. *Ann. Henri Poincaré*, 3(3):483–502, 2002.

- [20] Luc Rey-Bellet : Ergodic properties of Markov processes. In *Open quantum systems. II*, volume 1881 de *Lecture Notes in Math.*, pages 1–39. Springer, Berlin, 2006.
- [21] Luc Rey-Bellet et Lawrence E. Thomas : Exponential convergence to non-equilibrium stationary states in classical statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 225(2):305–329, 2002.
- [22] Z. Rieder, J. L. Lebowitz et E. Lieb : Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state. *Journal of Mathematical Physics*, 8(5):1073–1078, 1967.
- [23] G. Stoltz : Simulation moléculaire : Problèmes dynamiques et hors d'équilibre. Habilitation à diriger des recherches, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00709965>, 2012.
- [24] Morikazu Toda : Solitons and heat conduction. *Phys. Scripta*, 20(3-4):424–430, 1979. Special issue on solitons in physics.
- [25] Xenophon Zotos : Ballistic transport in classical and quantum integrable systems. *Journal of Low Temperature Physics*, 126:1185–1194, 2002.