

Merveilles du monde unidimensionnel : lois de conservation et transport optimal

Julien Reygner

La physique des milieux continus est naturellement décrite par des lois de conservation : de la masse, de l'énergie, de la quantité de mouvement, de la charge électrique... En l'absence de mécanisme de dissipation, la conservation d'une telle quantité se traduit par l'identité

$$(1) \quad \partial_t u + \operatorname{div} j = 0,$$

où $u(t, x)$ désigne la densité de la quantité conservée autour du point x , et $j(t, x)$ représente le courant de cette quantité. Lorsque la densité et le courant sont liés par une relation constitutive $j = \Lambda(u)$, où Λ est la fonction de flux, nous obtenons l'équation autonome sur la densité

$$(2) \quad \partial_t u + \operatorname{div}(\Lambda(u)) = 0,$$

appelée *loi de conservation scalaire non-linéaire* (si, bien sûr, Λ est non-linéaire).

La théorie développée dans cet article, et qui présente une partie des travaux de ma thèse [23], s'applique aux problèmes posés en une dimension d'espace : par exemple, les modèles de trafic routier ou d'écoulement de fluide dans un tuyau. Dans ce cadre, la loi de conservation scalaire (2) s'écrit

$$(3) \quad \partial_t u + \partial_x(\Lambda(u)) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

et nous nous intéressons également à deux de ses possibles généralisations : avec un terme de *dissipation par viscosité* non-linéaire

$$(4) \quad \partial_t u + \partial_x(\Lambda(u)) = \frac{1}{2} \partial_{xx}(A(u)), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

et sous la forme d'un *système de lois de conservation*

$$(5) \quad \partial_t \mathbf{u} + \partial_x(\mathbf{f}(\mathbf{u})) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

lorsque plusieurs quantités $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^d)$ sont conservées.

Sur le plan mathématique, nous exploitons deux particularités remarquables du cadre unidimensionnel, que le titre de cet article qualifie de « merveilles » : la possibilité d'introduire une interprétation probabiliste simple et naturelle des problèmes ci-dessus d'une part, et l'existence de couplages optimaux explicites pour définir les distances de Wasserstein d'autre part.

Interprétation probabiliste. La théorie *probabiliste* des équations ci-dessus exposée dans cet article est fondée sur l'hypothèse que les conditions initiales u_0 pour (3) et (4), ou u_0^1, \dots, u_0^d pour (5), sont les fonctions de répartition de mesures de probabilité m ou m^1, \dots, m^d sur la droite réelle. Cette approche a par exemple été développée par Brenier et Grenier [5] et Bolley, Brenier et Loeper [2] pour la loi de conservation inviscide (3), Bossy et Talay [3, 4] puis Jourdain et Malrieu [17] pour sa version visqueuse (4), ainsi que El Hajj et Monneau [8, 9], Monasse et Monneau [21] pour le système (5) sous forme diagonale ; cette courte liste de références, sur laquelle nous nous appuyons de manière fondamentale, est bien sûr loin d'être exhaustive.

En général, les solutions $u(t, \cdot)$ ou $u^1(t, \cdot), \dots, u^d(t, \cdot)$ restent des fonctions de répartition, ce qui incite naturellement à se poser la question : comment les évolutions décrites par les équations (3), (4) ou (5) modifient-elles les mesures m ou m^1, \dots, m^d ? Plus précisément, peut-on donner une représentation *lagrangienne* de ces équations, en les reliant à la dynamique *caractéristique* d'un système de particules évoluant sur la droite réelle ? Et que peut-on alors déduire d'une telle interprétation probabiliste ?

La motivation de nos travaux réside précisément dans la possibilité d’obtenir des résultats d’existence, éventuellement accompagnés de schémas numériques, ainsi que des estimations de stabilité ou de convergence à l’équilibre pour les solutions de ces équations aux dérivées partielles, à partir de leur représentation probabiliste.

Distances de Wasserstein. La seconde particularité du cadre unidimensionnel dont nous tirons parti est liée à la théorie du transport optimal. À l’origine de celle-ci se trouve le problème des déblais et des remblais de Monge : imaginons un tas de terre (un déblai) distribué dans une région du plan selon une mesure μ sur \mathbb{R}^2 , que nous devons déplacer pour remplir des trous (des remblais) représentés par une mesure ν sur \mathbb{R}^2 . Nous supposons que la quantité de terre en déblai permet de remplir exactement les remblais, et normalisons cette quantité à 1 de sorte que μ et ν sont des mesures de probabilité sur \mathbb{R}^2 . Un *transport* de μ vers ν est ainsi encodé par un *couplage* de μ et ν , c’est-à-dire une mesure de probabilité π sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ de distributions marginales μ et ν : pour un tel couplage, la quantité de terre à déplacer du point x vers le point y est formellement mesurée par $\pi(dx dy)$. Si nous notons $c(x, y)$ le coût du déplacement d’une unité élémentaire de masse du point x vers le point y , alors le problème de Monge, également développé par Kantorovitch, revient à minimiser la quantité

$$(6) \quad c_\pi = \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} c(x, y) \pi(dx dy),$$

parmi tous les couplages π de μ et ν .

Il est assez intuitif que si la fonction de coût est bien choisie, alors plus μ et ν se ressemblent, et moins le coût minimal du transport est élevé : en quelque sorte, celui-ci mesure une distance entre μ et ν . Cette idée peut être formalisée en introduisant les distances de Wasserstein, associées aux fonctions de coût $c(x, y) = |x - y|^p$, $p \in [1, +\infty[$, sur un espace vectoriel muni d’une norme $|\cdot|$. En termes probabilistes, la distance de Wasserstein d’ordre p entre deux mesures de probabilité μ et ν est définie par

$$(7) \quad W_p(\mu, \nu) := \left(\inf_{(X,Y) \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}[|X - Y|^p] \right)^{1/p},$$

où $\Pi(\mu, \nu)$ désigne l’ensemble des couples de variables aléatoires (X, Y) de lois marginales μ et ν .

Puisque nous nous attendons à ce que les solutions des équations auxquelles nous nous intéressons soient les fonctions de répartition de mesures de probabilité, les distances de Wasserstein fournissent un cadre adapté à notre étude. Une partie importante des développements de la théorie du transport optimal au cours des deux dernières décennies, en particulier avec les travaux de Brenier, Otto, Villani entre autres, est d’ailleurs due à ses liens avec les équations d’évolution. Or, lorsque nous nous restreignons au cas où μ et ν sont des mesures de probabilité sur \mathbb{R} , un couplage optimal est fourni par

$$(8) \quad (X, Y) = (F^{-1}(U), G^{-1}(U)),$$

où U est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 1]$, et F^{-1} , G^{-1} sont les pseudo-inverses des fonctions de répartition F et G de μ et ν . Cette remarque classique fournit une expression explicite de la distance de Wasserstein,

$$(9) \quad W_p(\mu, \nu) = \left(\int_{u=0}^1 |F^{-1}(u) - G^{-1}(u)|^p du \right)^{1/p},$$

qui dépend directement des fonctions de répartition de μ et ν . Pour cette raison, nous écrivons dans la suite indifféremment $W_p(\mu, \nu)$ ou $W_p(F, G)$.

Au long de cet article, nous exploiterons constamment cette identité pour quantifier le comportement des solutions des équations (3), (4) ou (5) que nous allons construire. À titre d’exemple, nous pouvons déjà remarquer, au prix d’une petite gymnastique mentale nous faisant passer des graphes de F^{-1} et G^{-1} à ceux de F et G , que $W_1(\mu, \nu)$ n’est autre que la distance L^1 entre F et G ! Ainsi, un résultat sur les solutions de nos équations exprimé en distance L^1 se traduira-t-il immédiatement dans le langage probabiliste *via* la distance de Wasserstein d’ordre 1.

1. Équation de Fokker-Planck non-linéaire dans le cas scalaire visqueux

Cette première section est consacrée à l'étude du problème de Cauchy

$$(10) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x(\Lambda(u)) = \frac{1}{2} \partial_{xx}(A(u)), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

qui correspond à la loi de conservation scalaire avec viscosité non-linéaire (4). La condition initiale u_0 est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité m sur \mathbb{R} , les fonctions de flux Λ et de viscosité A sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ et nous notons $\Lambda'(u) = \lambda(u)$, $A'(u) = \sigma^2(u)$. Nous travaillons dans cette section sous l'hypothèse d'uniforme ellipticité $\sigma^2(u) > 0$ pour tout $u \in [0, 1]$.

Nous commençons par décrire l'interprétation probabiliste de ce problème, puis nous nous intéressons au comportement en temps long et aux propriétés de contraction de ses solutions.

1.1. Le processus de diffusion non-linéaire et le système de particules associé. En prenant la dérivée en espace de (10), nous constatons que $p_t := \partial_x u(t, \cdot)$ vérifie formellement le problème

$$(11) \quad \begin{cases} \partial_t p_t = \frac{1}{2} \partial_{xx}(\sigma^2(u)p_t) - \partial_x(\lambda(u)p_t), \\ p_0 = m. \end{cases}$$

La formule d'Itô, qui est un outil classique de la théorie des probabilités, montre que cette équation décrit l'évolution de la loi p_t de la variable aléatoire X_t , définie par l'équation différentielle stochastique

$$(12) \quad \begin{cases} dX_t = \lambda(u(t, X_t))dt + \sigma(u(t, X_t))dW_t, \\ X_0 \sim m. \end{cases}$$

L'équation (11) est appelée *équation de Fokker-Planck* associée à (12). En raison de la non-linéarité de celle-ci, les coefficients de l'équation différentielle stochastique ci-dessus dépendent de la fonction de répartition $u(t, \cdot)$ du processus X_t , qui est alors dit *non-linéaire au sens de McKean*.

Afin de construire une solution à l'équation différentielle stochastique (12), suivons une procédure due à McKean [20] qui consiste à introduire n copies $X_t^{1,n}, \dots, X_t^{n,n}$ du processus X_t , dirigées par des mouvements browniens indépendants, et dans l'évolution desquelles la fonction de répartition $u(t, \cdot)$ de X_t est remplacée par la fonction de répartition empirique de l'ensemble des points $X_t^{1,n}, \dots, X_t^{n,n}$, vus comme les positions d'un système de n particules évoluant sur la droite réelle. En remplaçant ainsi la non-linéarité par de l'interaction, nous obtenons l'équation différentielle stochastique dans \mathbb{R}^n classique

$$(13) \quad dX_t^{i,n} = \lambda(u_n(t, X_t^{i,n}))dt + \sigma(u_n(t, X_t^{i,n}))dW_t^i, \quad u_n(t, x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_t^{i,n} \leq x\}},$$

dont la dynamique est extrêmement simple à décrire : la particule située au k -ème rang dans l'ordre croissant des positions possède un coefficient de dérive constant $\lambda(k/n)$ et un coefficient de diffusion constant $\sigma(k/n)$. Lorsque deux particules se croisent, elles échangent ces coefficients ; ainsi le mouvement instantané d'une particule ne dépend-il que de son rang au sein du système.

Nous pouvons par exemple imaginer que $X_t^{1,n}, \dots, X_t^{n,n}$ représentent la taille des files d'attente aux n caisses d'un supermarché — ou plutôt, pour éviter les files d'attente négatives, les logarithmes de ces tailles. Il est raisonnable de penser qu'un client terminant ses courses choisira en priorité la caisse avec la file d'attente la plus courte, de sorte qu'en première approximation, la dynamique de croissance de chaque file ne dépend effectivement que de son rang. Au-delà de ce petit exemple, de tels systèmes de particules *interagissant à travers leur rang* possèdent des applications dans l'étude des verres de spins en mécanique statistique et dans certains modèles de marchés financiers, et leur analyse constitue un domaine de recherche très actuel.

Pour ce qui nous concerne, l'approximation de l'équation (12) par le système (13) est légitimée par le résultat de *propagation du chaos* suivant, dont les premières versions sont dues à Bossy et Talay [3, 4] : lorsque n tend vers l'infini, la mesure empirique

$$(14) \quad \mu^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(X_t^{i,n})_{t \geq 0}}$$

vérifie une loi des grands nombres dans l'espace des trajectoires continues, et converge vers une mesure déterministe P qui vérifie le problème de martingale associé à (12). Ce procédé permet ainsi de construire un processus qui vérifie l'équation différentielle stochastique (12) et fournit une solution u du problème de Cauchy original (10) naturellement accompagnée de sa représentation probabiliste. Alternativement, ce résultat de propagation du chaos peut être compris comme le fait que, dans un système de grande taille, les particules se comportent approximativement comme des copies indépendantes du processus non-linéaire (12).

1.2. Interprétation probabiliste des ondes de choc. Dans les années 1950, Hopf aux États-Unis [13] et Il'in et Oleïnik en Union Soviétique [14] ont mis en évidence l'existence de solutions de l'équation (4) qui s'écrivent sous la forme d'ondes progressives, appelées *ondes de choc visqueuses* et qui décrivent le passage d'un état $u \equiv 0$ en $-\infty$ à un état $u \equiv 1$ en $+\infty$ selon un certain profil continu $\phi(x)$. De telles solutions apparaissent physiquement dans des modèles de combustion, de cinétique chimique ou de mécanique des fluides.

En injectant l'ansatz $u(t, x) = \phi(x - st)$ dans (4) avec les conditions aux limites $\phi(-\infty) = 0$, $\phi(+\infty) = 1$, il est aisé de constater que la célérité s d'une onde de choc visqueuse doit vérifier la relation de Rankine-Hugoniot

$$(15) \quad s = \Lambda(1) - \Lambda(0) = \int_{u=0}^1 \lambda(u) du,$$

et qu'un tel profil ϕ existe si et seulement si la fonction de flux Λ vérifie la condition

$$(16) \quad \forall u \in]0, 1[, \quad \frac{\Lambda(u) - \Lambda(0)}{u} > \frac{\Lambda(1) - \Lambda(u)}{1 - u},$$

appelée *condition d'Oleïnik*, ce qui revient à demander que le graphe de Λ soit situé strictement au-dessus de sa corde entre 0 et 1. Sous cette condition, tous les profils visqueux s'obtiennent par translation les uns des autres.

Une question naturelle, posée par Gel'fand à la fin des années 1950 [11], concerne alors la stabilité de ces ondes de choc : si la condition initiale u_0 du problème de Cauchy (10) est une perturbation d'un profil visqueux ϕ , cette perturbation s'atténue-t-elle au cours du temps ; autrement dit, la solution $u(t, x)$ se rapproche-t-elle de l'onde progressive $\phi(x - st)$? La réponse est génériquement positive, à condition que la perturbation $u_0 - \phi$ soit intégrable et de masse nulle, c'est-à-dire

$$(17) \quad \int_{x \in \mathbb{R}} (u_0(x) - \phi(x)) dx = 0.$$

Cette dernière condition est liée au fait que l'équation (4) est invariante par translation de la variable d'espace, et qu'il est donc nécessaire de sélectionner le « bon » profil visqueux ϕ en fixant le paramètre de translation correspondant. L'énoncé de cette convergence sous sa forme la plus générale, en distance L^1 et lorsque la viscosité $A(u)$ est linéaire, est dû à Freistühler et Serre en 1998 [10] — un demi-siècle après l'article de Gel'fand ! De nombreux résultats similaires, pour d'autres distances et sous des hypothèses variées, font partie du folklore de l'analyse des équations d'évolution en une dimension.

Donnons maintenant une interprétation de la stabilité des ondes de choc visqueuses en termes probabilistes, qui repose sur le processus non-linéaire introduit au paragraphe précédent. Commençons par remarquer que, pour tout $t \geq 0$,

$$(18) \quad \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] + \int_{\tau=0}^t \mathbb{E}[\lambda(u(\tau, X_\tau))] d\tau.$$

Or, il est possible de montrer qu'au moins $d\tau$ -presque partout, la fonction de répartition $u(\tau, \cdot)$ de X_τ est continue, de sorte que la variable aléatoire $u(\tau, X_\tau)$ est uniformément distribuée sur $[0, 1]$ et donc $\mathbb{E}[\lambda(u(\tau, X_\tau))] = \Lambda(1) - \Lambda(0) = s$. Ainsi, n'importe quelle solution $u(t, x)$ de (4) voit son « centre de masse » transporté à la vitesse s donnée par la relation de Rankine-Hugoniot.

À l'échelle du système de particules se produit le même phénomène de dérive du centre de masse, à la vitesse moyenne

$$(19) \quad s_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda(k/n),$$

qu'il est naturel d'interpréter comme une version discrète de la relation de Rankine-Hugoniot. De même, la version discrète de la condition d'Oleïnik s'écrit

$$(20) \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \frac{1}{k} \sum_{k'=1}^k \lambda(k'/n) > \frac{1}{n-k} \sum_{k'=k+1}^n \lambda(k'/n),$$

et signifie que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, le groupe des k premières particules (dans l'ordre croissant des positions) possède une vitesse moyenne plus grande que celui des $n-k$ dernières, ce qui se comprend comme une condition de rappel du nuage de particules vers de son centre de masse. Par des arguments classiques dans l'étude du comportement en temps long des processus de diffusion, il est alors possible de montrer que la condition (20) est nécessaire et suffisante pour assurer l'ergodicité du système recentré $(\tilde{X}_t^{1,n}, \dots, \tilde{X}_t^{n,n})$, où $\tilde{X}_t^{i,n} := X_t^{i,n} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_t^{j,n}$. Dans le cas où σ^2 est constant, ce résultat a été obtenu par Pal et Pitman [22] et Jourdain et Malrieu [17].

Nous pouvons alors chercher à établir une version non-linéaire de ce résultat : sous la condition d'Oleïnik (16), le processus $\tilde{X}_t := X_t - st$ converge-t-il vers une mesure invariante ? Commençons par chercher les mesures invariantes candidates à décrire la limite de ce processus. Il est bien sûr immédiat que celles-ci s'identifient aux profils visqueux ϕ de (4). De plus, d'après (18), la quantité $\mathbb{E}[\tilde{X}_t]$ est constante, de sorte que si \tilde{X}_t converge en temps long vers une mesure invariante, celle-ci doit posséder la même espérance que la mesure initiale m , ce qui permet de choisir le profil visqueux adéquat et donne un sens probabiliste clair à la condition (17). Maintenant que nous avons sélectionné la « bonne » mesure invariante, il nous reste à enrichir la littérature d'un nouveau résultat de stabilité (plus précisément, notre énoncé complète un résultat précédent de Jourdain et Malrieu [17]), de nature probabiliste, en établissant que \tilde{X}_t converge effectivement vers cette mesure.

1.3. L'énergie libre des lois de conservation.¹ Dans les années 1990, Jordan, Kinderlehrer et Otto [15] ont introduit l'idée qu'une équation de Fokker-Planck décrit le flot du gradient d'une fonctionnelle, appelée *énergie libre*, définie sur l'espace des mesures de probabilité muni de la distance de Wasserstein quadratique W_2 . Par exemple, l'équation de la chaleur

$$(21) \quad \partial_t p_t = \frac{1}{2} \Delta p_t$$

qui est l'équation de Fokker-Planck associée au mouvement brownien, s'écrit formellement

$$(22) \quad \dot{p}_t = -\text{Grad } \mathcal{E}[p_t], \quad \mathcal{E}[p] := \frac{1}{2} \int p(x) \log(p(x)) dx,$$

où Grad désigne une sorte de gradient pour la distance W_2 . Ce formalisme s'est révélé particulièrement bien adapté pour étudier le comportement en temps long des équations de Fokker-Planck, linéaires et non-linéaires, puisqu'il met en évidence le rôle naturel de la courbure (c'est-à-dire des propriétés locales de convexité) de la fonctionnelle d'énergie libre. Dans le cadre linéaire, il donne en particulier une interprétation relativement simple du célèbre critère de Bakry-Émery. Dans le cadre non-linéaire, Carrillo, McCann et Villani [6, 7] ont employé ce formalisme au début des années 2000 pour obtenir des estimations de convergence à l'équilibre nouvelles sur l'équation de McKean-Vlasov.

Nous reprenons cette méthode à notre compte en observant d'abord que la fonction de répartition $\tilde{u}(t, x) = u(t, x + st)$ du processus de fluctuation \tilde{X}_t vérifie

$$(23) \quad \partial_t \tilde{u} + \partial_x (\tilde{\Lambda}(\tilde{u})) = \frac{1}{2} \partial_{xx} (A(\tilde{u})), \quad \tilde{\Lambda}(u) := \Lambda(u) - su.$$

Sans perte de généralité, nous supposons que $\Lambda(0) = \tilde{\Lambda}(0) = 0$. Alors la dérivée en espace de (23) est encore une équation de Fokker-Planck non-linéaire, qui décrit le flot du gradient de la fonctionnelle

$$(24) \quad \mathcal{F}[p] := \frac{1}{2} \int_{x \in \mathbb{R}} \sigma^2(F(x)) p(x) \log(p(x)) dx + \int_{x \in \mathbb{R}} \tilde{\Lambda}(F(x)) dx,$$

où F est la fonction de répartition de p , que nous appelons *l'énergie libre* de la loi de conservation (23). Une conséquence immédiate de cette interprétation est que l'énergie libre est une fonction de Lyapounov

1. Les résultats de convergence en distance de Wasserstein présentés dans ce paragraphe sont contenus dans le manuscrit [23], mais l'interprétation « flot de gradient » n'y est pas explicitement décrite. Celle-ci, ainsi que les propriétés qui en découlent, font l'objet d'un article en cours de préparation.

pour le système, de sorte que $\tilde{u}(t, \cdot)$ converge vers des profils qui correspondent à des minimiseurs locaux de \mathcal{F} .

Nous montrons alors que \mathcal{F} est convexe le long des lignes géodésiques pour la distance de Wasserstein quadratique, et que sous la condition d'Oleïnik (16), le profil visqueux ϕ vérifiant (17) est l'unique minimiseur de \mathcal{F} parmi les mesures de probabilité de même espérance que m . Nous concluons ainsi, *via* cette « méthode d'énergie libre », que $\tilde{u}(t, \cdot)$ converge vers ϕ pour la distance W_2 et établissons donc une nouvelle version du résultat de stabilité des ondes visqueuses, d'influence très probabiliste. Notons qu'en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la définition (7) des distances de Wasserstein, nous obtenons $W_1 \leq W_2$ et retrouvons en particulier la stabilité L^1 énoncée par Freistühler et Serre.

1.4. Système de particules réordonné et contraction en distance de Wasserstein. Fixons deux fonctions de répartition u_0 et v_0 , et notons u et v les solutions du problème de Cauchy (10) correspondantes. Nous souhaitons maintenant étudier l'évolution de la distance de Wasserstein $W_p(u(t, \cdot), v(t, \cdot))$ au cours du temps, sans se préoccuper de savoir si le comportement en temps long de ces solutions est décrit par des ondes progressives ou non. Dans ce but, notons $(X_t^{1,n}, \dots, X_t^{n,n})$ et $(Y_t^{1,n}, \dots, Y_t^{n,n})$ deux populations de particules interagissant à travers leur rang, dont les mesures empiriques

$$(25) \quad \mu_t^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_t^{i,n}}, \quad \nu_t^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{Y_t^{i,n}},$$

permettent d'approcher respectivement $u(t, \cdot)$ et $v(t, \cdot)$. Afin d'étudier $W_p(u(t, \cdot), v(t, \cdot))$, nous commençons par décrire l'évolution de $W_p(\mu_t^n, \nu_t^n)$. Pour cela nous notons, pour tout $t \geq 0$,

$$(26) \quad X_t^{(1),n} \leq \dots \leq X_t^{(n),n}, \quad Y_t^{(1),n} \leq \dots \leq Y_t^{(n),n},$$

les *statistiques d'ordre* des vecteurs $(X_t^{1,n}, \dots, X_t^{n,n})$ et $(Y_t^{1,n}, \dots, Y_t^{n,n})$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, pour tout $u \in]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[$, il est immédiat que les quantiles d'ordre u de μ_t^n et ν_t^n sont respectivement $X_t^{(k),n}$ et $Y_t^{(k),n}$, de sorte que (9) implique ici

$$(27) \quad W_p(\mu_t^n, \nu_t^n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |X_t^{(k),n} - Y_t^{(k),n}|^p \right)^{1/p}.$$

Il est donc naturel de s'intéresser à la dynamique du système *réordonné* $(X_t^{(1),n}, \dots, X_t^{(n),n})_{t \geq 0}$ (et de manière similaire $(Y_t^{(1),n}, \dots, Y_t^{(n),n})_{t \geq 0}$). Or, celle-ci est très simple : par construction, $X_t^{(k),n}$ possède un coefficient de dérive constant $\lambda(k/n)$ et un coefficient de diffusion constant $\sigma(k/n)$. La condition que le système doit rester ordonné induit de plus un terme de *réflexion* entre $X_t^{(k),n}$ et $X_t^{(k+1),n}$ qui agit à l'échelle du temps local de $X_t^{(k+1),n} - X_t^{(k),n}$ en 0. Ainsi est-il possible d'écrire

$$(28) \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad dX_t^{(k),n} = \lambda(k/n)dt + \sigma(k/n)d\beta_t^k + dV_t^{k,n},$$

où $\beta_t = (\beta_t^1, \dots, \beta_t^n)$ est un mouvement brownien standard et $V_t^{1,n}, \dots, V_t^{n,n}$ représentent les termes de réflexion décrits ci-dessus. Cette équation est celle du mouvement brownien *normalement réfléchi*, au sens de Tanaka [25], au bord du polyèdre

$$(29) \quad D_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq \dots \leq x_n\},$$

avec un vecteur de dérive et une matrice de diffusion constants. Or, la convexité du domaine D_n implique la propriété de contraction ℓ^p suivante pour le couplage *synchrone* de ces processus : si deux solutions (fortes) $(X_t^{(1),n}, \dots, X_t^{(n),n})_{t \geq 0}$ et $(Y_t^{(1),n}, \dots, Y_t^{(n),n})_{t \geq 0}$ de (28) sont dirigées par le *même* mouvement brownien β , alors presque sûrement,

$$(30) \quad \forall s \leq t, \quad \sum_{k=1}^n |X_t^{(k),n} - Y_t^{(k),n}|^p \leq \sum_{k=1}^n |X_s^{(k),n} - Y_s^{(k),n}|^p.$$

Nous en déduisons immédiatement que $W_p(\mu_t^n, \nu_t^n)$ décroît, puis en passant à la limite lorsque le nombre de particules tend vers l'infini, nous obtenons la propriété de contraction suivante :

$$(31) \quad \forall s \leq t, \quad W_p(u(t, \cdot), v(t, \cdot)) \leq W_p(u(s, \cdot), v(s, \cdot)).$$

2. Approximation des problèmes hyperboliques par les dynamiques de particules collantes

Cette seconde section est consacrée à l'étude des problèmes hyperboliques (3) et (5). Nous y établissons des résultats de deux natures :

- *approximation* : nous construisons des systèmes de particules qui convergent, en un sens adéquat, vers des solutions des équations étudiées, ce qui peut en particulier fournir des résultats d'existence nouveaux, accompagnés de schémas exploitables à des fins de simulation numérique ;
- *stabilité* : nous montrons que les solutions que nous construisons dépendent assez régulièrement des conditions initiales, en utilisant des estimations de stabilité sur les systèmes de particules sous-jacents, uniformes en le nombre de particules.

2.1. La dynamique des particules collantes. Dans ce paragraphe, nous construisons un système de particules qui permet d'approcher la solution du problème scalaire

$$(32) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x(\Lambda(u)) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

où u_0 est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité m sur \mathbb{R} .

Il est bien sûr naturel de voir ce problème comme la limite de celui étudié dans la première section, lorsque la viscosité $A(u)$ dans l'équation (10) est égale à $2\epsilon u$ et ϵ tend vers 0. Il est cependant nécessaire d'être prudent dans cette interprétation, car le problème sans viscosité (32) possède en général plusieurs solutions au sens des distributions. Afin de « séparer le bon grain de l'ivraie » (pour reprendre une citation de Serre [24]), c'est-à-dire de retrouver une notion de solution physiquement pertinente, nous imposons la condition supplémentaire que l'inégalité

$$(33) \quad \partial_t(E(u)) + \partial_x(F(u)) \leq 0$$

soit vérifiée au sens des distributions, pour tout couple de fonctions (E, F) telles que E est convexe et dérivable sur $[0, 1]$ et F satisfait $F' = \Lambda' E'$. La fonction E est appelée *entropie*, et F est le *flux* d'entropie associé. Une solution u vérifiant ces conditions est dite *entropique*, et Kružkhov [19] a montré que celle-ci est unique et décrit la limite, lorsque ϵ tend vers 0, de la solution u^ϵ de la loi de conservation (32) à laquelle le terme $\epsilon \partial_{xx} u^\epsilon$ a été ajouté au membre de droite.

2.1.1. Limite de petit bruit du système de particules. Pour construire un système de particules approchant (32), nous imitons l'approche par viscosité évanescence de Kružkhov, mais pour le système de particules : nous fixons ici n et étudions le comportement, lorsque ϵ tend vers 0, du processus $(X_t^{1,n}, \dots, X_t^{n,n})_{t \geq 0}$ défini par (13) avec $\sigma(k/n) = \sqrt{2\epsilon}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Afin de donner une intuition de la situation, considérons le cas de seulement deux particules : la particule en première position possède le coefficient de dérive λ_1 , celle en seconde position possède le coefficient de dérive λ_2 , et chacune des deux subit une petite agitation brownienne d'intensité ϵ . Si $\lambda_1 < \lambda_2$, les particules ont tendance à s'éloigner l'une de l'autre, en effectuant des petites fluctuations autour des droites de pentes respectives λ_1 et λ_2 . Si au contraire $\lambda_1 > \lambda_2$, les particules ont tendance à s'approcher l'une de l'autre, et après la première collision, demeurent inlassablement attirées l'une par l'autre sous l'effet de l'échange des coefficients de dérive. Elles restent donc confinées autour de leur centre de masse, qui voyage par ailleurs à la vitesse moyenne $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$. Dans la limite de bruit nul, les fluctuations autour du centre de masse disparaissent et les particules voyagent collées l'une à l'autre, à la vitesse $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$.

Nous étendons ces observations au cas général de n particules et concluons que dans la limite de bruit nul, celles-ci évoluent selon la dynamique *des particules collantes* suivante :

- à l'instant initial, la particule en k -ème position se déplace sur la droite réelle à vitesse constante $\lambda(k/n)$;
- aux collisions, les particules se collent et forment un amas, qui se déplace ensuite à une vitesse donnée par la moyenne des vitesses initiales des particules incidentes.

Puisque des particules collées ne se décollent jamais, cette dynamique préserve l'ordre et définit donc un processus (déterministe), noté $(x_1(t), \dots, x_n(t))_{t \geq 0}$, à valeurs dans le polyèdre D_n dont nous rappelons la définition (29).

Si nous convenons d'attribuer la même masse $1/n$ à chaque particule, alors nous observons que l'évolution décrite ci-dessus conserve la masse et la quantité de mouvement totales, mais dissipe de l'énergie

cinétique aux collisions. De telles dynamiques d'adhésion ont ainsi été introduites comme modèles simples dans des situations physiques où ce comportement phénoménologique est observé, notamment en astrophysique et dans l'étude de la turbulence.

Le comportement de cette dynamique dans la limite du grand nombre de particules a été étudié par Brenier et Grenier [5], qui ont montré que, si la suite de conditions initiales $(x_1(0), \dots, x_n(0)) \in D_n$, $n \geq 1$ est choisie de sorte que la mesure empirique $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{x_k(0)}$ converge étroitement vers m , alors pour tout $t \geq 0$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{x_k(t)}$ converge étroitement vers la mesure de probabilité dont la fonction de répartition $u(t, \cdot)$ est la solution entropique de (32). Cette propriété d'approximation est l'équivalent hyperbolique du résultat de propagation du chaos énoncé dans la première section de cet article.

2.1.2. Stabilité de la dynamique des particules collantes. Par la construction que nous en avons donnée ci-dessus, la dynamique des particules collantes peut être vue comme un mouvement brownien réfléchi dans le polyèdre D_n , évidemment très dégénéré puisque le terme de diffusion a totalement disparu. Cette dégénérescence n'empêche cependant pas la dynamique des particules collantes d'hériter de la même propriété de contraction des distances ℓ^p que les systèmes de diffusions réordonnées que nous avons étudiés dans la première partie, de sorte que deux réalisations $(x_1(t), \dots, x_n(t))_{t \geq 0}$ et $(y_1(t), \dots, y_n(t))_{t \geq 0}$ de celle-ci, partant de deux configurations différentes dans D_n , vérifient

$$(34) \quad \forall s \leq t, \quad \sum_{k=1}^n |x_k(t) - y_k(t)|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k(s) - y_k(s)|^p.$$

En traduisant cette inégalité en termes de distance de Wasserstein entre les mesures empiriques des deux réalisations, puis en utilisant le résultat de Brenier et Grenier pour passer à la limite du grand nombre de particules, nous concluons ainsi que si u et v désignent la solution entropique de (32) pour deux conditions initiales différentes, alors pour tout $p \in [1, +\infty[$, $W_p(u(t, \cdot), v(t, \cdot))$ décroît au cours du temps. Alternativement, il est possible d'obtenir ce résultat de contraction en partant de sa version visqueuse (31), puis en utilisant le Théorème de Kružkhov pour passer à la limite de viscosité évanescence. Il en existe même une troisième preuve, due à Bolley, Brenier et Loeper [2] et antérieure aux deux stratégies esquissées ci-dessus.

2.2. Système hyperbolique diagonal et dynamique des particules collantes multitype. Nous étendons enfin l'approche par système de particules, développée dans le cas scalaire au paragraphe précédent, au cadre du système de lois de conservation (5). Sous forme non-conservative, celui-ci se réécrit

$$(35) \quad \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0,$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ est la matrice jacobienne de \mathbf{f} . Ce système est dit *hyperbolique* lorsque $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ possède d valeurs propres réelles $\lambda^1(\mathbf{u}) \geq \dots \geq \lambda^d(\mathbf{u})$, appelées *champs caractéristiques*, et *strictement hyperbolique* lorsque les champs caractéristiques sont deux-à-deux distincts. Après diagonalisation et changement éventuel des variables $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^d)$, nous obtenons

$$(36) \quad \forall \gamma \in \{1, \dots, d\}, \quad \partial_t u^\gamma + \lambda^\gamma(\mathbf{u}) \partial_x u^\gamma = 0.$$

Nous passons sous silence les conditions sous lesquelles cette procédure de diagonalisation est valide et considérons le système (36) sous forme diagonale comme la donnée de notre problème, complétée par les conditions initiales

$$(37) \quad \forall \gamma \in \{1, \dots, d\}, \quad u^\gamma(0, x) = u_0^\gamma(x),$$

où u_0^γ est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité m^γ sur la droite réelle. Des problèmes écrits sous cette forme apparaissent dans l'étude des dynamiques de dislocation ou dans celle des gaz isentropiques ; dans ce cadre, des premiers résultats d'existence et d'unicité ont été obtenus par El Hajj et Monneau [8, 9], et une méthode numérique a été proposée par Monasse et Monneau [21].

Nous notons toujours en gras les objets de taille d et repérons leurs coordonnées par des lettres grecques placées en exposant, typiquement u^γ dans les énoncés (36), (37).

2.2.1. Systèmes hyperboliques. Les premiers résultats d'existence de solutions faibles pour le problème de Cauchy associé au système de lois de conservation (5) remontent à Glimm en 1965 [12], qui a proposé un schéma numérique incorporant, de manière assez inattendue, une part d'aléa. D'autres méthodes, en particulier le *Wave Front Tracking* et l'approche par viscosité évanescence, ont ensuite permis d'étendre ces résultats d'existence aux systèmes directement écrits sous forme non-conservative (35). Sauf pour quelques

cas particuliers, les théories d'existence sont généralement développées dans le cadre de systèmes strictement hyperboliques munis de conditions initiales $\mathbf{u}_0 = (u_0^1, \dots, u_0^d)$ à variation bornée sur \mathbb{R} , de variation totale suffisamment petite.

En l'absence d'une théorie d'unicité similaire à celle de Kružkhov pour les systèmes de lois de conservation, la question de la définition d'une « bonne » notion de solution pour ces systèmes est restée ouverte jusqu'aux travaux de Bianchini et Bressan au début des années 2000. Dans l'article [1], ceux-ci ont introduit la notion de *solution de viscosité* et montré qu'une telle solution est unique et décrit la limite de la solution \mathbf{u}^ϵ du système (35) lorsque le terme $\epsilon \partial_{xx} \mathbf{u}^\epsilon$ est ajouté au membre de droite. Là encore, cette théorie se place dans le cadre strictement hyperbolique et pour des données initiales de petite variation totale.

2.2.2. La dynamique des particules collantes multitype. Nous souhaitons maintenant généraliser la dynamique des particules collantes décrite au paragraphe précédent afin d'approcher des solutions du système diagonal (36) muni des conditions initiales (37). Notons qu'en comparaison avec les théories brièvement décrites au paragraphe précédent, nos conditions initiales sont à variation bornée mais n'ont pas une variation totale petite. Cela nous contraint à renforcer, en contrepartie, l'hypothèse de stricte hyperbolicité en supposant qu'elle a lieu *uniformément*, c'est-à-dire

$$(38) \quad \forall \gamma \in \{1, \dots, d-1\}, \quad \inf_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} \lambda^\gamma(\mathbf{u}) > \sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} \lambda^{\gamma+1}(\mathbf{u}).$$

Sous cette hypothèse, nous pouvons décrire notre système de particules. Puisque nous devons approcher d fonctions de répartition u^1, \dots, u^d , introduisons d systèmes de n particules : chacun de ces systèmes est associé à un *type* de particules γ , et la coordonnée u^γ sera approchée par la fonction de répartition empirique des particules de ce type. Dans le cas scalaire, la vitesse $\lambda(k/n)$ de la particule en k -ème position dans le système se lit sur l'équation de transport

$$(39) \quad \partial_t u + \lambda(u) \partial_x u = 0,$$

qui représente la forme non-conservative de la loi de conservation (3). En interprétant (36) comme la généralisation multitype de cette équation, nous déduisons que la vitesse de la k -ème particule de type γ doit être donnée par

$$(40) \quad \lambda_k^\gamma = \lambda^\gamma \left(\frac{k^1}{n}, \dots, \frac{k^d}{n} \right),$$

où k^δ représente le rang de la particule dans le système de type δ . Afin de reproduire le comportement entropique du cas scalaire, nous convenons des règles d'évolution suivantes :

- chaque système évolue selon la dynamique des particules collantes type par type avec des vitesses initiales données par les coefficients λ_k^γ définis ci-dessus ;
- lorsque deux amas de types différents se croisent, les coefficients de vitesse λ_k^γ des particules impliquées dans la collision sont mis à jour suivant l'ordre post-collisionnel, et chaque système repart selon la dynamique des particules collantes type par type avec ces nouveaux coefficients de vitesse.

L'hypothèse d'uniforme stricte hyperbolicité (38) se révèle ici cruciale, car elle permet de prescrire un unique ordre post-collisionnel et assure que ces règles d'évolution définissent de manière non-ambiguë une dynamique à valeurs dans l'espace $D_n^d = D_n \times \dots \times D_n$. Celle-ci est appelée *dynamique des particules collantes multitype*, et ses trajectoires sont notées

$$(41) \quad \mathbf{x}(t) = (x_k^\gamma(t))_{1 \leq \gamma \leq d, 1 \leq k \leq n} \in D_n^d, \quad t \geq 0.$$

Un exemple de trajectoires de la dynamique des particules collantes est présenté sur la Figure 1.

2.2.3. Quelques résultats. Le premier résultat attendu est un principe d'approximation : si la suite de configurations initiales $\mathbf{x}(0) \in D_n^d$, $n \geq 1$, est choisie de sorte que pour tout $\gamma \in \{1, \dots, d\}$, la mesure empirique initiale $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{x_k^\gamma(0)}$ des particules de type γ converge étroitement vers m^γ , alors la suite $\mathbf{u}_n(t, \cdot)$ des fonctions de répartition empiriques correspondant aux configurations $\mathbf{x}(t)$, définie par

$$(42) \quad \mathbf{u}_n(t, \cdot) = (u_n^1(t, \cdot), \dots, u_n^d(t, \cdot)), \quad u_n^\gamma(t, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{x_k^\gamma(t) \leq x\}},$$

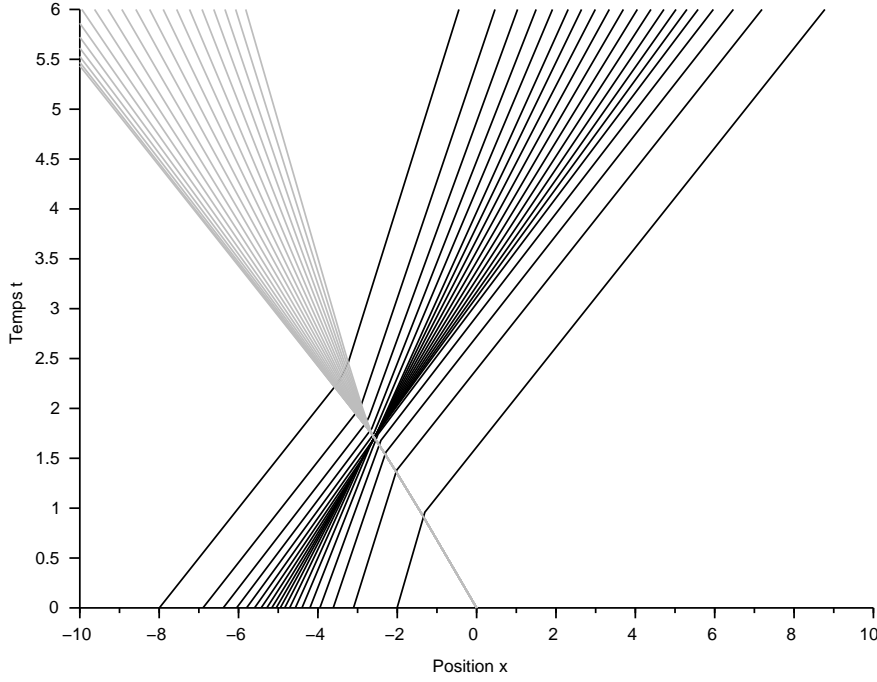


FIGURE 1. Un exemple de trajectoires dans le demi-plan espace-temps pour la dynamique des particules collantes multitype, avec deux types : particules noires et particules grises. Les particules grises sont initialement regroupées en un seul amas. Les trajectoires des particules noires sont déviées par les collisions avec l'amas gris, et ce dernier finit par éclater sous l'effet des collisions.

devrait converger vers une solution du problème de Cauchy (36)-(37). Par un argument de compacité, nous obtenons d'abord une telle convergence le long de suites extraites.

Afin d'identifier les limites possibles et d'obtenir un résultat complet de convergence, nous devons maintenant utiliser un principe d'unicité des solutions de ce problème. Nous nous appuyons sur la théorie d'unicité de Bianchini et Bressan. Un ingrédient important pour celle-ci est la *stabilité* des solutions : il nous faut établir une estimation sur nos solutions du type

$$(43) \quad \forall t \geq 0, \quad \|\mathbf{u}(t, \cdot) - \mathbf{v}(t, \cdot)\| \leq \mathcal{L} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\|,$$

où $\mathcal{L} \in [1, +\infty[$ et \mathbf{u}, \mathbf{v} désignent les solutions que nous construisons à partir des conditions initiales $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$. La norme $\|\cdot\|$ ici employée est la norme L^1 de chaque coordonnée, que nous transcrivons en termes probabilistes

$$(44) \quad \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\| := \sum_{\gamma=1}^d W_1(u_0^\gamma, v_0^\gamma).$$

Afin d'établir cette estimation, nous raisonnons comme dans le cas scalaire et en prouvons une version *discrète*, sur la dynamique des particules collantes multitype, avec une constante uniforme en le nombre de particules n . Plus précisément, nous montrons que pour tout $p \in [1, +\infty[$, il existe une constante $\mathcal{L}_p \in [1, +\infty[$, qui ne dépend pas de n , telle que, pour toutes configurations initiales $\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0) \in D_n^d$,

$$(45) \quad \forall t \geq 0, \quad \sum_{\gamma=1}^d \sum_{k=1}^n |x_k^\gamma(t) - y_k^\gamma(t)|^p \leq \mathcal{L}_p^p \sum_{\gamma=1}^d \sum_{k=1}^n |x_k^\gamma(0) - y_k^\gamma(0)|^p,$$

ce qui donne les estimations attendues lorsque n tend vers l'infini, pour toutes les distances W_p . Pour obtenir cette estimation, nous reprenons l'argument, établi à la fin du paragraphe précédent, que la dynamique des particules collantes type par type contracte toutes les distances ℓ^p , et le couplons à une étude combinatoire des collisions entre amas de types différents afin d'aboutir à la constante \mathcal{L}_p .

Nous pouvons alors conclure que la dynamique des particules collantes multitype converge vers l'unique solution, au sens de Bianchini et Bressan, du problème (36)-(37), et que ces solutions vérifient de plus les estimations de stabilité

$$(46) \quad \forall t \geq 0, \quad \sum_{\gamma=1}^d W_p(u^\gamma(t, \cdot), v^\gamma(t, \cdot))^p \leq \mathcal{L}_p^p \sum_{\gamma=1}^d W_p(u_0^\gamma, v_0^\gamma)^p$$

pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Ces résultats de convergence justifient l'utilisation de la dynamique des particules collantes multitype pour construire des schémas numériques d'approximation pour le système (36), pour lesquels des estimations d'erreur quantitatives ont récemment été obtenues [18]. Par ailleurs, les estimations de stabilité en distance de Wasserstein constituent une généralisation directe des résultats de Bolley, Brenier et Loeper [2] au cadre des systèmes.

Une restriction importante de nos résultats, qui tient à l'interprétation probabiliste que nous développons, est l'hypothèse de monotonie sur les conditions initiales. Dans le cas scalaire, Jourdain [16] a montré que le comportement entropique de la loi de conservation (3), avec une condition initiale u_0 bornée et à variation bornée sur \mathbb{R} , est reproduit par un système de particules collantes *signées*, telles que deux particules de signes opposés s'annihilent lorsqu'elles entrent en collision. Si la généralisation de cette dynamique au cadre multitype est sans doute immédiate, établir des estimations de stabilité équivalentes à (45) nous semble être un programme particulièrement excitant pour de futures recherches.

Remerciements. Merci à Pierre Calka, Benjamin Jourdain, Cyril Labbé et Laurent Monasse pour leur relecture attentive du manuscrit de cet article. J'adresse également une pensée amicale à Régis Monneau, qui nous a apporté une aide précieuse dans l'étude des systèmes hyperboliques diagonaux.

Références

- [1] S. Bianchini et A. Bressan. Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems. *Ann. of Math.* (2) 161(1), pages 223–342, 2005.
- [2] F. Bolley, Y. Brenier et G. Loeper. Contractive metrics for scalar conservation laws. *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 2(1), pages 91–107, 2005.
- [3] M. Bossy et D. Talay. Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles: application to the Burgers equation. *Ann. Appl. Probab.* 6(3), pages 818–861, 1996.
- [4] M. Bossy et D. Talay. A stochastic particle method for the McKean-Vlasov and the Burgers equation. *Math. Comp.* 66(217), pages 157–192, 1997.
- [5] Y. Brenier et E. Grenier. Sticky particles and scalar conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* 35(6), pages 2317–2328, 1998.
- [6] J. A. Carrillo, R. J. McCann et C. Villani. Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy dissipation and mass transportation estimates. *Rev. Mat. Iberoamericana* 19(3), pages 971–1018, 2003.
- [7] J. A. Carrillo, R. J. McCann et C. Villani. Contractions in the 2-Wasserstein length space and thermalization of granular media. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 179(2), pages 217–263, 2006.
- [8] A. El Hajj et R. Monneau. Global continuous solutions for diagonal hyperbolic systems with large and monotone data. *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 7(1), pages 139–164, 2010.
- [9] A. El Hajj et R. Monneau. Uniqueness results for diagonal hyperbolic systems with large and monotone data. *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 10(3), pages 461–494, 2013.
- [10] H. Freistühler et D. Serre. L^1 stability of shock waves in scalar viscous conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.* 51(3), pages 291–301, 1998.
- [11] I. M. Gel'fand. Some problems in the theory of quasi-linear equations. *Uspehi Mat. Nauk.* 14(2(86)), pages 87–158, 1959.
- [12] J. Glimm. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 18(4), pages 697–715, 1965.
- [13] E. Hopf. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math.* 3, pages 201–230, 1950.
- [14] A. M. Il'in et O. A. Oleïnik. Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for some quasi-linear equations for large values of the time. *Mat. Sb. (N.S.)* 51(93), pages 191–216, 1960.
- [15] R. Jordan, D. Kinderlehrer et F. Otto. The variational formulation of the Fokker-Planck equation. *SIAM J. Math. Anal.* 29(1), pages 1–17, 1998.

- [16] B. Jourdain. Signed sticky particles and 1D scalar conservation laws. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 334(3), pages 233–238, 2002.
- [17] B. Jourdain et F. Malrieu. Propagation of chaos and Poincaré inequalities for a system of particles interacting through their CDF. *Ann. Appl. Probab.* 18(5), pages 1706–1736, 2008.
- [18] B. Jourdain et J. Reygner. Optimal convergence rate of the multitype sticky particle approximation of one-dimensional diagonal hyperbolic systems with monotonic initial data. Disponible à l'adresse <http://arxiv.org/abs/1507.01085>.
- [19] S. N. Kružkhov. First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)* 81(123), pages 228–255, 1970.
- [20] H. P. McKean Jr. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. *Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equations, Session 7, Catholic Univ., 1967)*, pages 41–57, 1967.
- [21] L. Monasse et R. Monneau. Gradient entropy estimate and convergence of a semi-explicit scheme for diagonal hyperbolic systems. *SIAM J. Numer. Anal.* 52(6), pages 2792–2814, 2014.
- [22] S. Pal et J. Pitman. One-dimensional Brownian particle systems with rank-dependent drifts. *Ann. Appl. Probab.* 18(6), pages 2179–2207, 2008.
- [23] J. Reygner. Comportements en temps long et à grande échelle de quelques dynamiques de collision. Thèse de doctorat, université Pierre et Marie Curie, 2014. Disponible à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01087575>.
- [24] D. Serre. Systèmes de lois de conservation. I. Diderot Editeur, Paris, 1996.
- [25] H. Tanaka. Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions. *Hiroshima Math. J.* 9(1), pages 163–177, 1979.