

Dynamique et contrôle des systèmes

Quelques notions de base

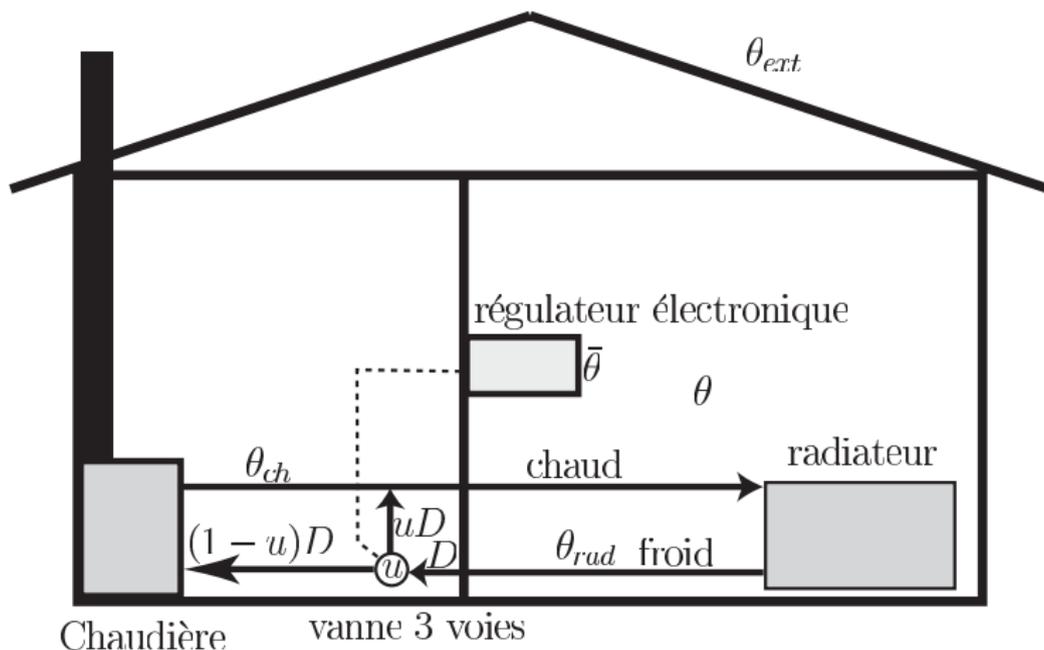
Pierre Rouchon

Ecole des Mines de Paris
Centre Automatique et Systèmes

CIRM Janvier 2006

Plan

- 1 Le PI
- 2 Fréquentiel
- 3 Observateur/contrôleur
- 4 Conclusion



Régulateur **proportionnel intégral (PI)** de la **température** $y = \theta$ à sa **consigne** $v = \bar{\theta}$ avec une vanne $u \in [0, 1]$, le **contrôle**.

- PI en temps discret:

$$u_{k+1} = S^{\text{at}}(K_p(\bar{\theta} - \theta_k) + I_k)$$

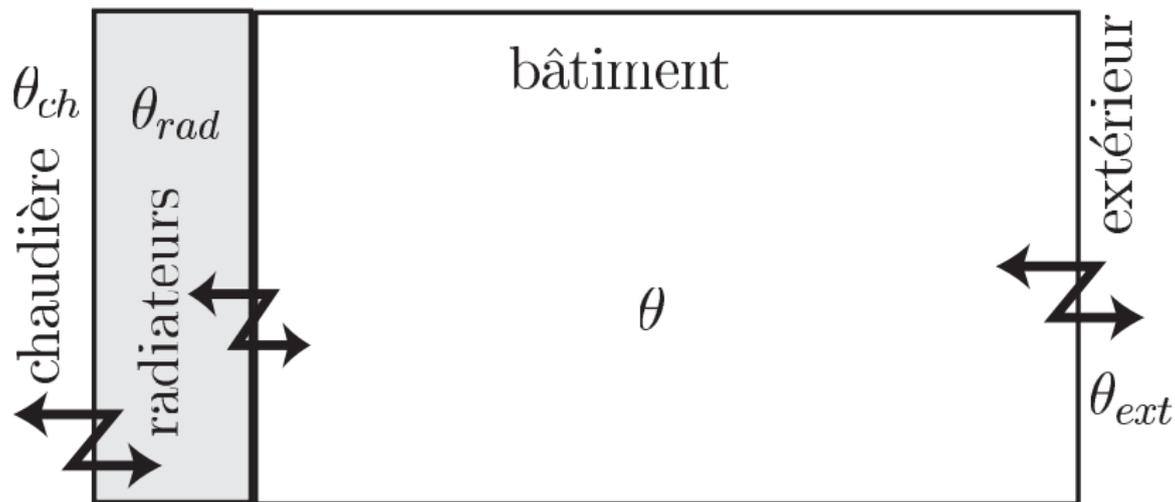
$$I_{k+1} = I_k + \Delta t [K_i(\bar{\theta} - \theta_k) + K_s(u_{k+1} - K_p(\bar{\theta} - \theta_k) - I_k)]$$

où $S^{\text{at}}(x) = x$ si $x \in [0, 1]$, $S^{\text{at}}(x) = 0$ pour $x < 0$ et $S^{\text{at}}(x) = 1$

- PI en temps continu: avec $\frac{d}{dt} I|_k \approx \frac{I_{k+1} - I_k}{\Delta t}$, on obtient la version continue:

$$u(t) = S^{\text{at}}(K_p(\bar{\theta} - \theta(t)) + I(t))$$

$$\frac{d}{dt} I(t) = K_i(\bar{\theta} - \theta(t)) + K_s(u(t) - K_p(\bar{\theta} - \theta(t)) - I(t)).$$



Modèle thermique simplifié: premier ordre non-linéaire.

$$M\rho C_p \frac{d}{dt}\theta = \Lambda_{rad}(\theta_{rad} - \theta) + \Lambda_{ext}(\theta_{ext} - \theta)$$

$$u\Lambda(\theta_{ch} - \theta_{rad}) = \Lambda_{rad}(\theta_{rad} - \theta)$$

- PI sur un premier ordre:

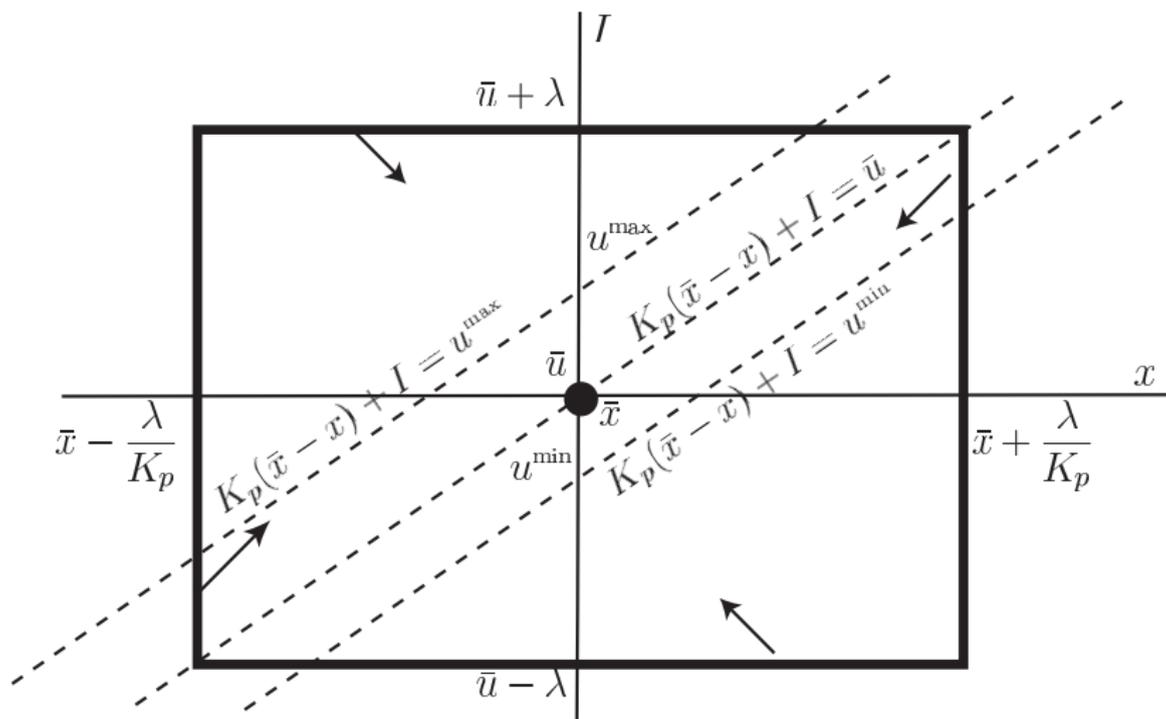
$$\frac{d}{dt}x = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in [u^{\min}, u^{\max}]$$

avec comme seules hypothèses: $\frac{\partial f}{\partial x} \leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$ et $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ avec $\bar{u} \in [u^{\min}, u^{\max}]$.

- Le système **en boucle fermée** est globalement asymptotiquement stable pour **tous gains** $K_p, K_i > 0$ et $K_s K_p > K_i$ (systèmes plans et Poincaré/Bendixon)

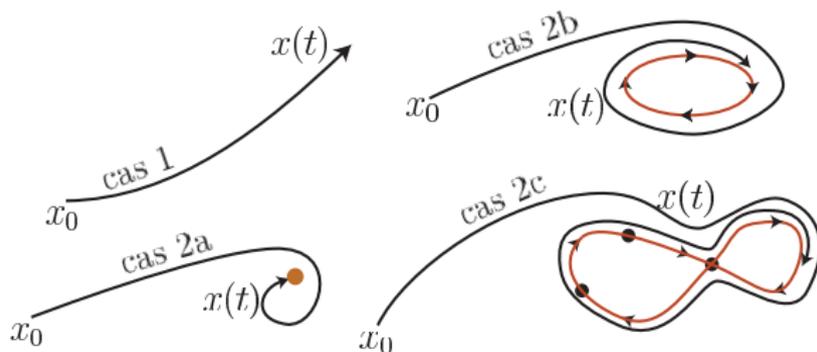
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= f(x, \mathcal{S}^{\text{at}} [K_p(\bar{x} - x) + I]) \\ \frac{d}{dt}I &= K_i(\bar{x} - x) + K_s (\mathcal{S}^{\text{at}} [K_p(\bar{x} - x) + I] - K_p(\bar{x} - x) - I) \end{aligned}$$

Trajectoires bornées



Poincaré/Bendixon

Les **quatre comportements asymptotiques** possibles pour une trajectoire d'un système dynamique autonome défini dans le plan:



La divergence $\frac{\partial f}{\partial x} - K_p \frac{\partial f}{\partial u} (S^{\text{at}})' + K_s ((S^{\text{at}})' - 1)$ est **négative** et on a un **seul point** d'équilibre: reste uniquement le cas 2a.

Linéaire tangent

Soit $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}^n$ continûment dérivable par rapport à x et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $v(\bar{x}) = 0$. L'état d'équilibre \bar{x} de

$$\frac{d}{dt}x = v(x)$$

(on dit aussi état stationnaire, ou point critique du champ de vecteurs v) est **asymptotiquement stable** si **les valeurs propres de la matrice jacobienne** (pôles du linéaire tangent)

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

sont toutes à **parties réelles strictement négatives**. \bar{x} n'est pas stable au **sens de Lyapounov** lorsque l'une des valeurs propres du jacobien $\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x})$ est à partie réelle strictement positive.

Stabilité au sens de Lyapounov

Soit le système dynamique, $\frac{d}{dt}x = v(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ d'équilibre \bar{x} :
 $v(\bar{x}, t) = 0$ pour tout temps t .

- \bar{x} est dit **stable au sens de Lyapounov** si, et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute condition initiale x^0 vérifiant $\|x^0 - \bar{x}\| \leq \eta$, la solution de $\frac{d}{dt}x = v(x, t)$ qui part de x^0 à $t = 0$, vérifie alors obligatoirement $\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$ pour tout temps $t \geq 0$.
- \bar{x} est dit **asymptotiquement stable** (localement) si, et seulement si, il est stable au sens de Lyapounov et si, en plus, il existe $\eta > 0$ tel que toutes les solutions de $\frac{d}{dt}x = v(x, t)$ qui partent en $t = 0$ d'une condition initiale x^0 vérifiant $\|x^0 - \bar{x}\| \leq \eta$ convergent vers \bar{x} lorsque t tend vers $+\infty$.

Pour (x, I) autour de (\bar{x}, \bar{I}) , le système s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= f(x, K_p(\bar{x} - x) + I) \\ \frac{d}{dt}I &= K_i(\bar{x} - x)\end{aligned}$$

Le calcul du linéaire tangent fait apparaître la matrice jacobienne suivante:

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} - K_p \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} & \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \\ -K_i & 0 \end{pmatrix}.$$

La trace de cette matrice 2×2 est strictement négative car $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \leq 0$ et $\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} > 0$ par hypothèse et les gains K_p, K_i sont > 0 . Son déterminant est strictement positif pour les mêmes raisons. Donc ses deux valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives. **Ainsi, pour tous $K_p > 0$ et $K_i > 0$, le linéaire tangent est toujours stable.**

Schéma bloc de la boucle ouverte.

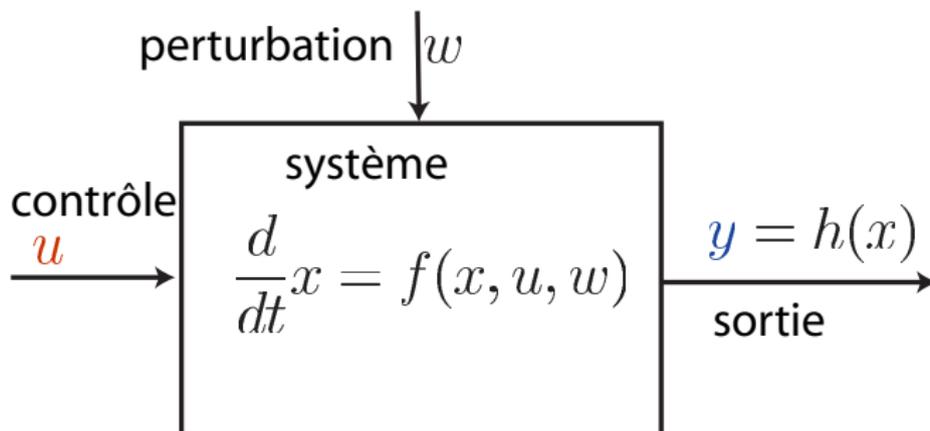
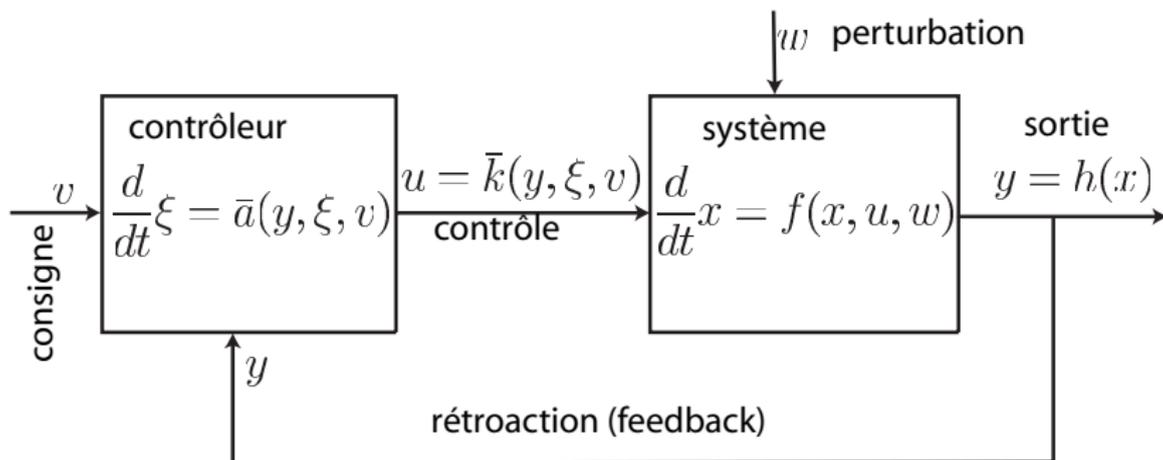
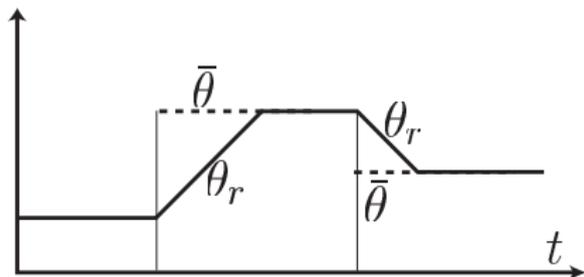


Schéma bloc de la boucle fermée.



Deux types de pré-compensations: l'une sur la **perturbation mesurée** θ_{ext} , l'autre sur la **consigne variable** θ_r . Algorithme PI avec anticipation (feedforward) suivant:



$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = S^{\text{at}} \left[K_p(\theta_r(t) - \bar{\theta}(t) + I(t) + K_r \dot{\theta}_r(t) - K_{\text{ext}} \theta_{\text{ext}}) \right] \\ \frac{d}{dt} I(t) = K_i(\theta_r(t) - \theta(t)) \\ + K_s \left[u(t) - K_p(\theta_r(t) - \theta(t)) - I(t) - K_r \dot{\theta}_r(t) + K_{\text{ext}} \theta_{\text{ext}} \right] . \end{array} \right.$$

$$\frac{d}{dt}y = -ay + bu + dw$$

avec $a > 0$, $b > 0$ et $d > 0$. La température y est le résultat d'un filtre du premier ordre, à la constante de temps $\tau = 1/a$, de $\tau(bu + dw)$.

But: suivre la référence $t \mapsto y_r(t)$ continue et dérivable par morceaux tout en connaissant à chaque instant la perturbation $w(t)$.

On définit le **contrôle de référence (feedforward)** comme étant la fonction $t \mapsto u_r(t)$ continue par morceaux et définie par $\frac{d}{dt}y_r = -ay_r + bu_r + dw$ c'est à dire

$$u_r(t) = \frac{\frac{d}{dt}y_r(t) + ay_r(t) - dw(t)}{b}.$$

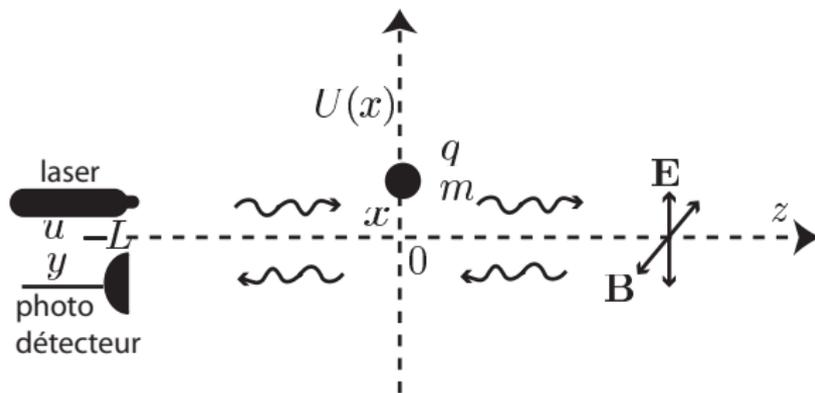
Pour obtenir u , on rajoute alors à u_r une correction de type PI sur l'erreur de suivi, $e = y - y_r$:

$$u(t) = u_r(t) + K_p e(t) + I(t), \quad \frac{d}{dt} I(t) = K_i e(t).$$

On obtient ainsi en boucle fermée un système différentiel ordinaire autonome pour les variables $e = y - y_r$ et I :

$$\frac{d}{dt} e = -(bK_p + a) e + bl, \quad \frac{d}{dt} I = -K_i e.$$

Ainsi, même si w et y_r varient au cours du temps, leur variations sont **pré-compensées par u_r** qui est une combinaison linéaire de y_r , $\frac{d}{dt} y_r$ et w .



Une particule (m, q) selon $0x$, dans le potentiel harmonique $U(x)$ et soumis à une onde plane électromagnétique polarisée linéairement; loin de l'origine, en $z = -L$, on dispose d'une source classique résonnante d'amplitude $u(t) \in [0, u^{\max}]$, le **contrôle**, et d'un photo-détecteur, $y(t)$, la **mesure**. Un modèle simplifié (version simplifiée des équations de pompage, par exemple): $\frac{d}{dt}y(t) = -\Lambda y(t) + u(t - 2T_L)$.

$$\frac{d}{dt}y(t) = -ay(t) + bu(t) + dw(t).$$

avec a , b et d positifs. Le contrôle est u , la perturbation w et la mesure y .

Correcteur PI

$$u = K_p(y_c - y) + I, \quad \frac{d}{dt}I = K_i(y_c - y)$$

avec $K_p, K_i > 0$ assure la convergence asymptotique de $y(t)$ vers la consigne y_c pour peu que la perturbation w soit constante. Noter que l'on n'a pas besoin de connaître cette constante pour trouver le u qui assure $y = y_c$.

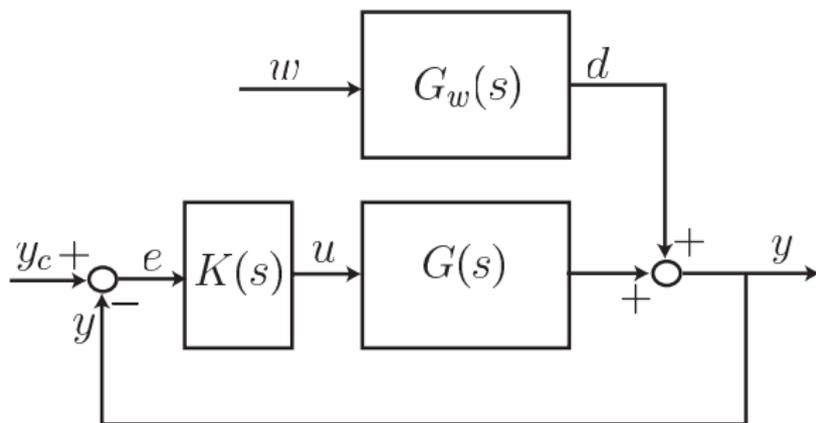
$$\frac{d}{dt}y(t) = -ay(t) + b(K_p(y_c - y) + I) + dw(t), \quad \frac{d}{dt}I = K_i(y_c - y)$$

- 1 Que se passe-t-il si la mesure de y n'est pas instantanée mais est effectuée avec un **certain temps de retard Δ** ; à l'instant t , on connaît la valeur de $y(t - \Delta)$.
- 2 Que se passe-t-il si la perturbation non mesurée w n'est plus constante mais **sinusoïdale de la forme $w(t) = \cos(\omega t)$** avec ω constant. Résonances avec le régulateur PI ?
- 3 Que se passe-t-il en boucle fermée si l'on superpose les deux points précédents, un retard de mesure et une perturbation sinusoïdale ?

Approche fréquentielle $\frac{d}{dt} = s \in \mathbb{C}$ bien adaptée: **critère de Nyquist**, **diagramme de Bode**.

Avec

$$G(s) = \frac{b}{s+a}, \quad G_w(s) = \frac{d}{s+a}, \quad K(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) e^{-\Delta s}$$



$$\text{On a } y = \frac{GK}{1 + GK} y_c + \frac{G_w}{1 + GK} w$$

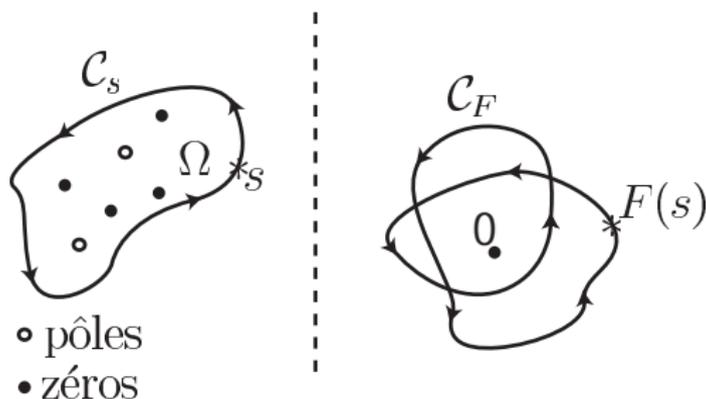
$$y = \frac{GK}{1 + GK} y_c + \frac{G_w}{1 + GK} w$$

La **stabilité** est caractérisée¹ par la **position des zéros** de

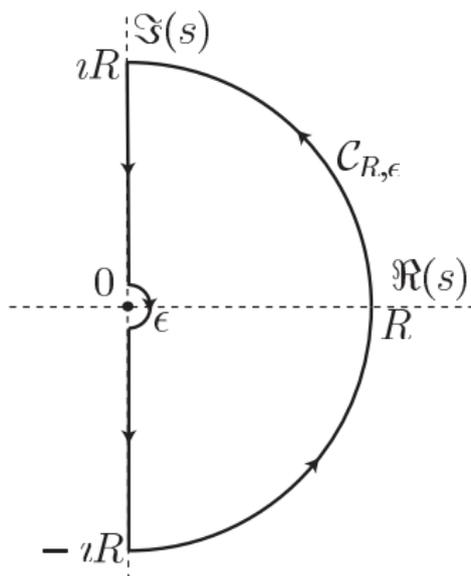
$$1 + GK = 1 + b \frac{sK_p + K_i}{s(s + a)} e^{-\Delta s}$$

par rapport à l'**axe imaginaire**: stabilité si toutes les parties réelles sont strictement négatives $\leq -\alpha$, $\alpha > 0$; instabilité si l'un des zéros à partie réelle strictement positive.

¹Pas de simplification pôle/zéro instable.



Le **théorème de Cauchy** pour une fonction méromorphe $F(s)$ de $s \in \mathbb{C}$ et un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ délimité par la courbe fermée notée C_s ; $F(s)$ décrit une courbe fermée notée C_F lorsque s parcourt C_s dans le sens direct. Alors, le nombre de **tours N** que fait C_F autour de 0 est relié aux nombres de **pôles P** et de **zéros Z** de $F(s)$ dans Ω par $N = Z - P$. Ici $Z = 4$ et $P = 2$, donc $F(s)$ fait deux fois le tour de 0 dans le sens direct, i.e., $N = 2$.



La boucle que doit faire s pour englober tout le demi plan à partie réelle positive tout en évitant le pôle de

$GK(s) = b \frac{sK_p + K_i}{s(s+a)} e^{-\Delta s}$ en $s = 0$; $R > 0$ est très grand et $\epsilon > 0$ est très petit.

On commence par une normalisation en posant

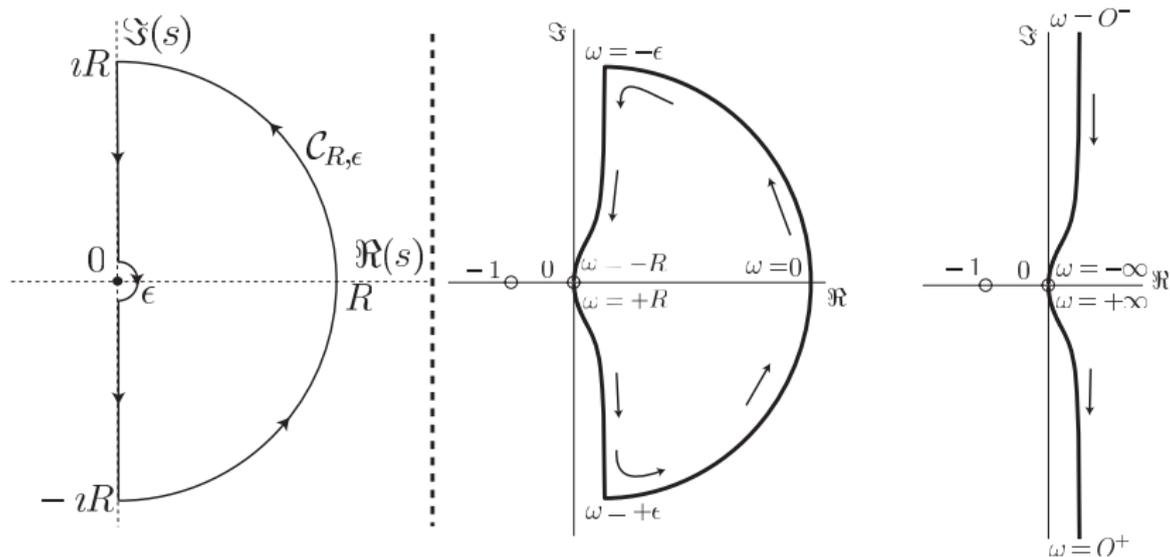
$$\tilde{s} = \frac{s}{a}, \quad k = abK_p, \quad \eta = \frac{K_i}{K_p a}, \quad \delta = a\Delta.$$

Alors

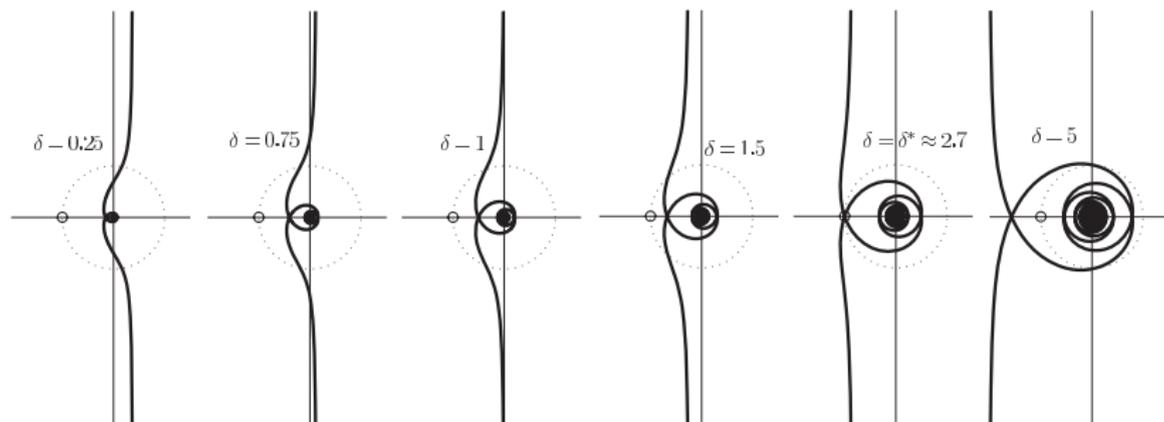
$$GK(s) = GK(\tilde{s}) = k \exp(-\delta\tilde{s}) \frac{\tilde{s} + \eta}{\tilde{s}(\tilde{s} + 1)}.$$

Ainsi quitte à changer d'unité sur le temps, on peut toujours supposer $a = 1$. On confond dans la suite \tilde{s} et s :

$$GK(s) = k \exp(-\delta s) \frac{s + \eta}{s(s + 1)}.$$



Le lieu de Nyquist de $G(s)K(s) = k \exp(-\delta s) \frac{s+\eta}{s(s+1)}$ avec $k = 1$, $\delta = 0$ et $\eta = 0.5$. ; la courbe fermée du plan complexe décrite par $G(s)K(s)$ lorsque s décrit la courbe $C_{R,\epsilon}$, pour $R \gg 1$ et $0 < \epsilon \ll 1$.



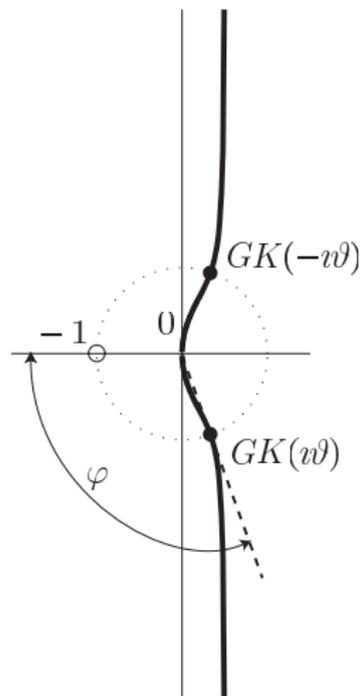
Lieu de Nyquist pour $G(s)K(s) = k e^{-\delta s} \frac{s+\eta}{s(s+1)}$ avec $k = 1$, $\eta = 0.5$ et diverses valeurs du retard δ . On s'intéresse aux zéros à $\Re > 0$ de $1 + GK$.

Le fait que le complexe $GK(v\vartheta) = k \frac{(v\vartheta + \eta)}{v\vartheta(v\vartheta + 1)}$ est de module 1, donne

$\vartheta = \sqrt{\frac{1 - k^2 + \sqrt{(1 - k^2)^2 + 4k^2\eta^2}}{2}}$. On note $\varphi \in [0, \pi[$ l'argument suivant:

$$\exp(v\varphi) = -k \frac{(v\vartheta + \eta)}{v\vartheta(v\vartheta + 1)}$$

φ est la **marge de phase** et $\delta^* = \frac{\varphi}{\vartheta}$ est le **retard critique** au delà duquel des instabilités apparaissent.



Réalisation

On part d'un **transfert rationnel causal** (degré de $N(s)$ inférieur au degré $D(s)$):

$$y = \frac{N(s)}{D(s)} u$$

que l'on souhaite représenter sous **la forme d'état**:

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $n = \text{degré}(D(s))$ et A , B et C matrices constantes. On cherche donc A , B , C tels que

$$y = C(sI - A)^{-1} Bu.$$

C'est toujours possible.

Exemple de réalisation: $y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} u(s)$ où (a_0, a_1, b_0, b_1) sont des paramètres.

$$\frac{d^2}{dt^2} y + a_1 \frac{d}{dt} y + a_0 y = b_1 \frac{d}{dt} u + b_0 u.$$

On pose $z = (z_1, z_2) = (y, \frac{d}{dt} y)$ et alors on a

$$\frac{d}{dt} z_1 = z_2, \quad \frac{d}{dt} z_2 = -a_0 z_1 - a_1 z_2 + b_1 \frac{d}{dt} u + b_0 u.$$

On regroupe les dérivées dans la seconde équation en une seule variable $x_2 = z_2 - b_1 u$ au lieu de z_2 . Avec les variables $(x_1 = z_1, x_2)$, on a la réalisation d'état souhaitée

$$\frac{d}{dt} x_1 = x_2 + b_1 u, \quad \frac{d}{dt} x_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + (b_0 - a_1 b_1) u$$

car $y = x_1$.

Un problème typique

On part du système entrée/sortie $u \mapsto y$ sous la **forme d'état**

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

avec $\dim(u) = \dim(y) = 1$ et $\dim(x) = n$.

- On souhaite aller du régime stationnaire caractérisé par $y = y_\alpha, u = u_\alpha$ vers l'état stationnaire $y = y_\beta, u = u_\beta$ en un temps $T > 0$.
- Règles du jeu: on connaît à l'instant t , $y(t)$ la mesure et on peut ajuster u en temps réel de façon à compenser les erreurs et les perturbations.
- Une solution classique: planification et suivi de trajectoires dans l'espace des états $x \in \mathbb{R}^n$ avec l'observateur/contrôleur (la commande modale).

Pour $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, $y = Cx$, solution en deux étapes:

- 1 **Planification de trajectoires** pour aller de l'état stationnaire x_α à l'état x_β : une trajectoire de référence $[0, T] \ni t \mapsto (x_r(t), u_r(t), y_r(t))$ telle que

$$\forall t \in [0, T], \quad \frac{d}{dt}x_r(t) = Ax_r(t) + Bu_r(t), y_r(t) = Cx_r(t)$$

avec les conditions aux limites: $Ax_r(0) + Bu_\alpha = 0$, $y_\alpha = Cx_r(0)$, $Ax_r(T) + Bu_\beta = 0$, $y_\beta = Cx_r(T)$. Cette étape donne le **contrôle en boucle ouverte** $[0, T] \ni t \mapsto u_r(t)$ (feedforward) qui, si tout est parfait, amène le système de l'équilibre α à l'équilibre β .

- 2 Calcul de **la correction** Δ_u , $u = u_r + \Delta_u$, de sorte que les écarts observés sur la sortie, $\Delta_y = y_r - y = C(x_r - x)$ restent proches de 0: Cela revient à **stabiliser** à zéro $\frac{d}{dt}\Delta_x = A\Delta_x + B\Delta_u$, uniquement en utilisant $\Delta_y = C\Delta_x$ pour calculer Δ_u

Stabilisation via Δ_u de $\frac{d}{dt}\Delta_x = A\Delta_x + B\Delta_u$, avec $\Delta_y = C\Delta_x$

- Contrôleur: calcul d'un feedback d'état, $\Delta_u = K\Delta_x$ tel que la dynamique en boucle fermée $\frac{d}{dt}\Delta_x = (A + BK)\Delta_x$, soit stable, **feedback** utilisable que si on mesure à chaque instant Δ_x , ce qui est rarement le cas.
- Estimation de Δ_x en fonction de Δ_y avec un **observateur asymptotique** donnant l'estimée $\widehat{\Delta}_x$ par le filtre

$$\frac{d}{dt}\widehat{\Delta}_x = A\widehat{\Delta}_x + B\Delta_u(t) + L(C\widehat{\Delta}_x - \Delta_y(t))$$

Ainsi $u = u_r(t) + K\widehat{\Delta}_x$ avec $\widehat{\Delta}_x$ qui dépend de la **mesure** $y(t)$ via le filtre causal (observateur asymptotique):

$$\frac{d}{dt}\widehat{\Delta}_x = (A + BK)\widehat{\Delta}_x + L(C\widehat{\Delta}_x - (y(t) - y_r(t))).$$

Convergence si K et L sont choisis de sorte que $A + BK$ et $A + LC$ soient des matrices stables: c'est toujours possible si le système est **observable** et **commandable**.

Linéarisation de Schrödinger pour un système à trois états:

$\psi = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle + \psi_2 |2\rangle$, contrôle $\epsilon(t) \in \mathbb{R}$,

$$i \frac{d}{dt} \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \psi + \epsilon(t) \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \psi$$

autour de $\psi = |0\rangle$ et $\epsilon = 0$:

$$i \frac{d}{dt} \delta\psi_0 = 0, \quad i \frac{d}{dt} \delta\psi_1 = \omega_1 \delta\psi_1 + \mu \delta\epsilon, \quad i \frac{d}{dt} \delta\psi_2 = \omega_2 \delta\psi_2 + \mu \delta\epsilon$$

Contrôle avec un même u de deux oscillateurs de fréquences différentes: ($a_1 \neq a_2$, $a_1 = (\omega_1)^2$, $a_2 = (\omega_2)^2$):

$$\frac{d^2}{dt^2} x_1 = -a_1(x_1 - u), \quad \frac{d^2}{dt^2} x_2 = -a_2(x_2 - u);$$

avec

$$\delta\psi_1 = \frac{\mu (\omega_1 x_1 + i \frac{d}{dt} x_1)}{(\omega_1)^2}, \quad \delta\psi_2 = \frac{\mu (\omega_2 x_2 + i \frac{d}{dt} x_2)}{(\omega_2)^2}, \quad \delta\epsilon = -u.$$

Planification de trajectoires pour

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -a_1(x_1 - u), \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = -a_2(x_2 - u).$$

On passe par la variable intermédiaire $z = \frac{a_2x_1 - a_1x_2}{a_1 + a_2}$, la sortie de Brunovsky car

$$a_2x_1 - a_1x_2 = (a_1 + a_2)z, \quad a_1a_2(x_2 - x_1) = (a_1 + a_2)\frac{d^2}{dt^2}z$$

et donc x_1 , x_2 et u sont fonctions de $(z_r, \frac{d^2}{dt^2}z_r, z_r^{(4)})$.

Génération de trajectoires de l'état stationnaire u_α à l'état stationnaire u_β : $z_r(t) = (1 - S(t/T))z_\alpha + S(t/T)z_\beta$ où S est n'importe quelle fonction telle que

$$S(0) = 0, \quad S(1) = 1, \quad \frac{d^k S}{dt^k}(0, T) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Par exemple $S(r) = \frac{r^5}{r^5 + (1-r)^5}$.

Stabilisation de

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -a_1(x_1 - u), \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = -a_2(x_2 - u).$$

Approche Lyapounov et/ou passivité: le feedback

$$u = -k\left(a_1 \frac{d}{dt}x_1 + a_2 \frac{d}{dt}x_2\right), \quad k > 0$$

stabilise le système en zéro. L'énergie

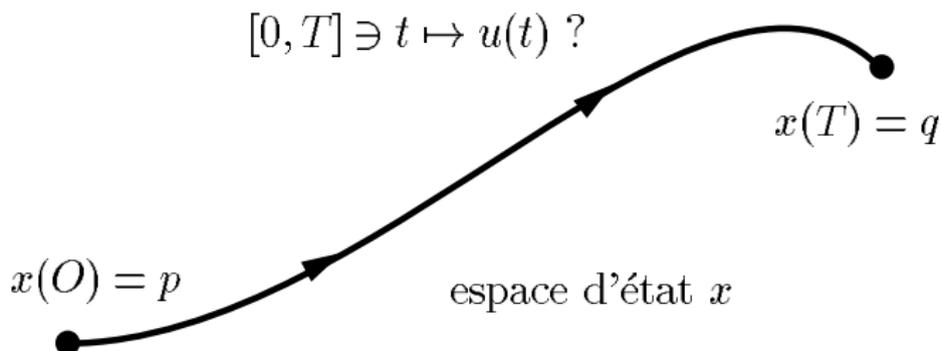
$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}x_1\right)^2 + \frac{a_1}{2}(x_1)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}x_2\right)^2 + \frac{a_2}{2}(x_2)^2$$

est une fonction de Lyapounov contrôlée (CLF) car

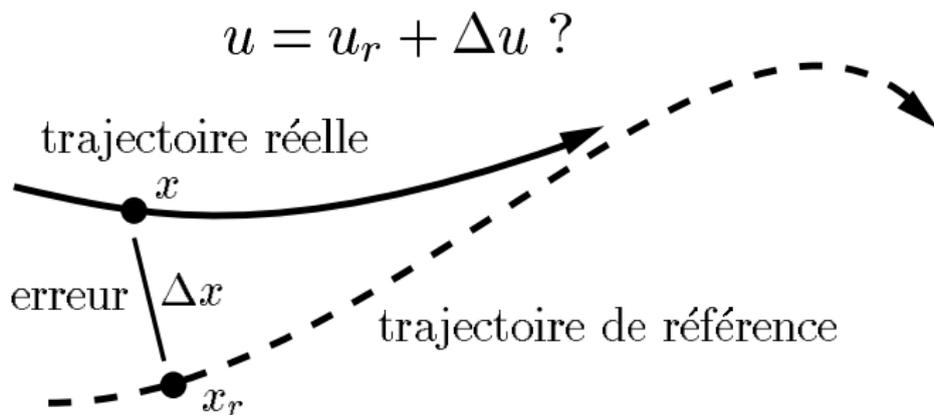
$$\frac{d}{dt}V = \left(a_1 \frac{d}{dt}x_1 + a_2 \frac{d}{dt}x_2\right)u = -k\left(a_1 \frac{d}{dt}x_1 + a_2 \frac{d}{dt}x_2\right)^2 \leq 0$$

(sorte de frottement rajouté par le contrôle).

Commandabilité (contrôlabilité) et **planification de trajectoires**:



Commandabilité (contrôlabilité) et stabilisation ou suivi de trajectoires:



Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^n$ est **commandable** en temps $T > 0$, ssi, pour tout $p, q \in \mathbb{R}^n$ il existe $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$ tel que la solution du problème de Cauchy:

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu(t), \quad x(0) = p$$

vérifie $x(T) = q$.

Critère de Kalman: la commandabilité en temps $T > 0$ équivaut à

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^n$ ($\dim u = 1$ ici) commandable, ssi, il existe un changement de variable sur x , $z = Mx$ avec M inversible, tel que,

$$\frac{d}{dt}z_1 = z_2, \dots, \frac{d}{dt}z_{n-1} = z_n, \frac{d}{dt}z_n = a_1z_1 + \dots + a_nz_n + bu$$

avec $b \neq 0$, ou encore en notant $y = z_1$, la sortie de Brunovsky, on a la forme normale suivante:

$$y^{(n)} - a_ny^{(n-1)} - \dots - a_1y = bu.$$

Stabilisation par feedback de $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$: trouver K tel que avec $u = Kx$, le système en boucle fermé soit stable, i.e., tel que les valeurs propres de $A + BK$ soient à parties réelles positives.

Si le système est commandable, c'est toujours possible: on peut même choisir comme on veut les valeurs propres de $A + BK$ (**placement de pôles**) en jouant sur K : il suffit de partir de

$$y^{(n)} - a_n y^{(n-1)} - \dots - a_1 y = bu.$$

et de poser $bu = -(a_n + \sigma_1)y^{(n-1)} - \dots - (a_1 + \sigma_n)y$ de sorte que

$$y^{(n)} + \sigma_1 y^{(n-1)} + \dots + \sigma_n y = 0.$$

avec les σ_i arbitraires (fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres, i.e., des pôles).

On fixe les racines, **les pôles** p_i , et on calcule les σ_i de sorte que: $(s - p_1) \dots (s - p_n) = s^n + \sigma_1 s^{n-1} + \dots + \sigma_{n-1} s + \sigma_n$

Reconstruire (estimer) $x(t)$ à partir de la connaissance $y(\tau)$ pour $\tau \leq t$ (et aussi de $u(\tau)$) sachant que:

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

L'idée des **observateurs asymptotiques**: estimer x par une variable \hat{x} solution de (filtre de u et $y...$).

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu(t) + L(C\hat{x} - y(t)).$$

Dynamique de l'erreur $\tilde{x} = \hat{x} - x$:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x} = (A + LC)\tilde{x}.$$

Filtre de Kalman: réglage optimal de la matrice des gains L en fonction "d'incertitudes gaussiennes" sur le modèle et la mesure.

Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, $y = Cx$ est **observable**, ssi, pour toute trajectoire entrée/sortie $t \mapsto (u(t), y(t))$ il n'existe qu'une seule trajectoire d'état $t \mapsto x(t)$ solution de $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$ vérifiant en plus $y(t) = Cx(t)$.

Critère de Kalman: le système est observable, ssi,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n = \dim(x)$$

Si le système est observable alors il est possible de choisir les valeurs propres de $A + LC$ comme on veut en jouant sur la matrice L . Il suffit de transposer le résultat sur le placement de pôles.

Points non abordés :

- Systèmes en temps discrets: $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$.
- contrôle linéaire de dimension finie: robuste H^∞ , linéaire/quadratique, filtre de Kalman,
- contrôle non linéaire: algèbre de Lie de contrôlabilité, découplage, linéarisation, systèmes plats et problème de Monge, stabilisation, contrôle Lyapounov,
- Contrôle Optimal: principe du maximum de Pontryaguine, synthèse du feedback optimal, programmation dynamique, équation de Hamilton-Jacobi-Bellman,
- dimension infinie: système à retards, contrôle frontière des EDP, méthode HUM, méthode du retour, ...
- Observateurs non-linéaires, filtre de Kalman étendu, estimation de paramètres, contrôle adaptatif, diagnostic,

Références classiques sur les systèmes de dimension finie:

- Fréquentiel (PID): PID Controllers: Theory, Design and Tuning. K. J. Astrom, T. Hagglund. ISA International (Instrument Society of America). 1995
- Contrôle linéaire: Linear Systems. T. Kailath. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980
- Contrôle non-linéaire: Nonlinear Systems. H.K. Khalil, MacMillan. 1992.
- Contrôle optimal: Théorie Mathématique de Processus Optimaux. L. Pontryagin et al. Mir, Moscou, 1974.

Aussi des notes de cours sur la page web:

<http://cas.ensmp.fr/~rouchon/index.html>