

Virginie Ehrlacher et Gabriel Stoltz

# Analyse spectrale

20 juin 2015



---

# Table des matières

---

## Partie I Transformée de Fourier et applications

---

<b>1</b>	<b>Transformation de Fourier</b> . . . . .	3
1.1	Transformation de Fourier dans $L^1$ . . . . .	3
1.1.1	Définition et premières propriétés . . . . .	3
1.1.2	Exemples . . . . .	5
1.1.3	Transformée de Fourier inverse . . . . .	6
1.2	Transformation de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide . . . . .	6
1.2.1	Définition de l'espace $\mathcal{S}$ . . . . .	6
1.2.2	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ . . . . .	7
1.3	L'espace des distributions tempérées . . . . .	8
1.3.1	Définition des distributions tempérées . . . . .	8
1.3.2	Convergence et dérivation dans $\mathcal{S}'$ . . . . .	9
1.3.3	Distributions tempérées particulières . . . . .	9
1.3.4	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$ . . . . .	10
1.4	Applications aux espaces de Lebesgue et de Sobolev . . . . .	11
1.4.1	Isométrie de la transformation de Fourier dans $L^2$ . . . . .	11
1.4.2	Espaces de Sobolev . . . . .	13
1.5	Résolution d'équations aux dérivées partielles . . . . .	14
1.5.1	Equation de la chaleur . . . . .	14
1.5.2	Equation de Schrödinger . . . . .	14
1.6	Applications en théorie des probabilités . . . . .	15
1.6.1	Premières propriétés des fonctions caractéristiques . . . . .	15
1.6.2	Le théorème de Bochner . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Echantillonnage et transformée de Fourier discrète</b> . . . . .	17
2.1	Séries de Fourier . . . . .	17
2.1.1	Convergence ponctuelle . . . . .	18
2.1.2	Convergence $L^2$ . . . . .	18
2.2	Distributions périodiques . . . . .	19
2.2.1	Définition . . . . .	19
2.2.2	Caractérisation d'une distribution périodique par sa série de Fourier . . . . .	19
2.2.3	Transformée de Fourier des distributions périodiques . . . . .	21
2.3	Echantillonnage . . . . .	21
2.3.1	Echantillonnage d'un signal . . . . .	21
2.3.2	Théorème de Shannon . . . . .	23
2.4	Le recouvrement spectral (aliasing) . . . . .	25
2.4.1	Exemple de repliement spectral . . . . .	25

2.4.2	Suppression de l'aliasing.....	25
2.5	Transformée de Fourier discrète .....	26
2.6	Transformée de Fourier rapide .....	27
2.6.1	Présentation générale de la méthode .....	27
2.6.2	Calcul de complexité.....	28

---

**Partie II Introduction à la théorie spectrale**

---

<b>3</b>	<b>Introduction à la théorie spectrale .....</b>	<b>31</b>
3.1	Opérateurs linéaires .....	31
3.1.1	Définition .....	31
3.1.2	Opérateurs bornés .....	32
3.1.3	Inverse d'un opérateur .....	33
3.1.4	Adjoint d'un opérateur.....	35
3.2	Théorie spectrale des opérateurs bornés .....	37
3.2.1	Théorie générale .....	37
3.2.2	Cas des opérateurs bornés autoadjoints .....	41
3.2.3	Quelques éléments sur la théorie spectrale des opérateurs non bornés.....	42
3.2.4	Invariance par transformation unitaire .....	42
3.3	Opérateurs compacts .....	43
3.3.1	Rappels et compléments.....	43
3.3.2	Définition et premières propriétés des opérateurs compacts .....	44
3.3.3	Le théorème de Rellich.....	46
3.3.4	Théorie spectrale des opérateurs compact autoadjoints .....	47
3.3.5	Opérateurs à résolvante compacte .....	49
3.4	Applications .....	50
3.4.1	Equation de la chaleur et équation des ondes.....	50
3.4.2	Equation de Schrödinger .....	52
3.4.3	Equation de Fokker-Planck .....	54
	<b>Rappels et compléments .....</b>	<b>57</b>
4.1	Distributions à support compact .....	57
	<b>Bibliographie .....</b>	<b>59</b>

Transformée de Fourier et applications



---

## Transformation de Fourier

---

<b>1.1</b>	<b>Transformation de Fourier dans <math>L^1</math></b> .....	<b>3</b>
1.1.1	Définition et premières propriétés .....	3
1.1.2	Exemples .....	5
1.1.3	Transformée de Fourier inverse .....	6
<b>1.2</b>	<b>Transformation de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide</b> .....	<b>6</b>
1.2.1	Définition de l'espace $\mathcal{S}$ .....	6
1.2.2	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ .....	7
<b>1.3</b>	<b>L'espace des distributions tempérées</b> .....	<b>8</b>
1.3.1	Définition des distributions tempérées .....	8
1.3.2	Convergence et dérivation dans $\mathcal{S}'$ .....	9
1.3.3	Distributions tempérées particulières .....	9
1.3.4	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$ .....	10
<b>1.4</b>	<b>Applications aux espaces de Lebesgue et de Sobolev</b> .....	<b>11</b>
1.4.1	Isométrie de la transformation de Fourier dans $L^2$ .....	11
1.4.2	Espaces de Sobolev .....	13
<b>1.5</b>	<b>Résolution d'équations aux dérivées partielles</b> .....	<b>14</b>
1.5.1	Equation de la chaleur .....	14
1.5.2	Equation de Schrödinger .....	14
<b>1.6</b>	<b>Applications en théorie des probabilités</b> .....	<b>15</b>
1.6.1	Premières propriétés des fonctions caractéristiques .....	15
1.6.2	Le théorème de Bochner .....	16

---

La transformation de Fourier a une définition simple pour des fonctions intégrables, et bon nombre d'ouvrages commencent par définir cette opération pour des fonctions  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , avant de considérer d'autres espaces fonctionnels. Nous suivons dans ce chapitre une approche classique, suivie par exemple dans [4], qui consiste à définir la transformation de Fourier sur des espaces de fonctions régulières et décroissant rapidement (espaces de Schwartz), puis, par dualité, à définir la transformée de Fourier dans un sous-espace des distributions (distributions tempérées). De nombreuses applications et des résultats supplémentaires peuvent alors être déduits de ce cadre général pour des espaces fonctionnels particuliers – notamment les espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R}^n)$  (pour  $1 \leq p \leq +\infty$ ) et les espaces de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^n)$  (pour  $s \in \mathbb{R}$ ).

### 1.1 Transformation de Fourier dans $L^1$

#### 1.1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 1.1 (Transformée de Fourier des fonctions intégrables).** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . On appelle transformée de Fourier de  $f$  la fonction notée  $\hat{f}$  définie en tout point  $\xi \in \mathbb{R}^n$  par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx. \quad (1.1)$$

**Proposition 1.1 (Propriétés de la transformée de Fourier dans  $L^1$ ).** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . La transformée de Fourier de  $f$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$  ;  
 (2)  $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$  et  $\hat{f}$  tend vers 0 à l'infini ;

**Exercice 1.1.** Prouver ce résultat. Pour le dernier point ( $\hat{f}$  tend vers 0 à l'infini), on pourra commencer par montrer le résultat pour une fonction  $f$  régulière à support compact.

**Corollaire 1.1.** La transformée de Fourier  $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$  est une application linéaire continue de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  sur  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))} = 1.$$

**Exercice 1.2.** Prouver ce résultat.

Un des intérêts majeurs de la transformation de Fourier est que celle-ci permet de transformer certaines opérations linéaires fondamentales (dérivation, convolution, translation) en des opérations plus simples. Il existe aussi d'autres propriétés structurelles, pour les dilatations, translations ou produits tensoriels.

**Théorème 1.1 (Transformée de Fourier et dérivation).** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i \xi_j \hat{f}(\xi).$$

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $x \mapsto x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $1 \leq j \leq n$ , alors  $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  et

$$\widehat{(x_j f)}(\xi) = i \partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi).$$

**Exercice 1.3.** Prouver ce résultat.

On rappelle que la convolution de deux fonctions  $f, g$  est définie par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy.$$

**Théorème 1.2 (Transformée de Fourier et convolution).** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \hat{g}.$$

**Exercice 1.4.** Prouver ce résultat.

**Théorème 1.3.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

(i) pour  $a \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\tau_a$  la translation de vecteur  $a$ , i.e.  $\tau_a \phi(x) = \phi(x-a)$ . Alors,

$$\widehat{\tau_a f} = e^{-i\xi \cdot a} \hat{f},$$

et

$$\widehat{e^{ia \cdot x} f} = \tau_a \hat{f} ;$$

(ii) pour la conjugaison complexe,

$$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)} ;$$



(iii) pour  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , la transformée de Fourier de  $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$  est la fonction

$$\hat{f}_\lambda : \xi \mapsto \frac{1}{|\lambda|^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right); \tag{1.2}$$

(iv) Si  $f$  est un produit tensoriel  $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2)$  avec  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $n = n_1 + n_2$ , et  $f_i \in L^1(\mathbb{R}^{n_i})$ , alors

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \hat{f}_2(\xi_2). \tag{1.3}$$

Notons que le choix  $\lambda = -1$  dans la troisième propriété permet de discuter la parité de la transformée de Fourier de fonctions paires ou impaires, la transformée de Fourier ayant la même parité que la fonction.

**Exercice 1.5.** Prouver ce résultat.

### 1.1.2 Exemples

Commençons par un résultat très utile pour la suite.

**Proposition 1.2 (Transformée de Fourier des gaussiennes).** Soit  $\alpha > 0$ . On a la relation

$$\widehat{e^{-\alpha|x|^2}}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/4\alpha}.$$

On déduit de la proposition précédente que la transformée de Fourier de la gaussienne

$$g(x) = C \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$$

de variance  $\sigma^2$  est la gaussienne

$$\hat{g}(\xi) = (2\pi\sigma^2)^{n/2} C \exp\left(-\frac{\sigma^2|\xi|^2}{2}\right)$$

de variance  $\sigma^{-2}$ . La transformée de Fourier d'une gaussienne très piquée sera donc très plate et réciproquement.

**Exercice 1.6.** Prouver la Proposition 1.2. Pour ce faire, on commencera par le cas  $n = 1$ , et on établira que la transformée de Fourier satisfait une équation différentielle du premier ordre.

A titre d'entraînement, nous vous recommandons de calculer quelques transformées de Fourier ci-dessous.

**Exercice 1.7.** Soit  $R > 0$ . Montrer que la transformée de Fourier de l'application

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq R, \\ 0 & \text{si } |x| \geq R, \end{cases}$$

est la fonction  $\xi \mapsto \frac{2 \sin(R\xi)}{\xi}$ .

**Exercice 1.8.** Soit  $R > 0$ . Montrer que la transformée de Fourier de l'application

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{R} & \text{si } |x| \leq R, \\ 0 & \text{si } |x| \geq R, \end{cases}$$

est la fonction  $\xi \mapsto R \left(\frac{\sin(R\xi/2)}{R\xi/2}\right)^2$ .

**Exercice 1.9.** Soit  $\alpha > 0$ . Montrer que la transformée de Fourier de l'application  $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\alpha|x|}$  est la fonction  $\xi \mapsto \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$ .

### 1.1.3 Transformée de Fourier inverse

**Définition 1.2 (Transformée de Fourier inverse).** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . On note  $\check{f}$  la fonction définie en tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  par

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi \cdot x} dx. \quad (1.4)$$

Notons que la transformation  $\mathcal{F}^{-1} : f \mapsto \check{f}$  est très similaire à la transformation  $\mathcal{F}$  définie par (1.1), à deux changements près : le signe dans l'exponentielle, et le facteur de normalisation  $(2\pi)^{-n}$ .

Nous pouvons énoncer maintenant le théorème d'inversion de Fourier dans  $L^1$ , qui sera généralisé par la suite à certaines distributions.

**Théorème 1.4.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\hat{f}$  soit aussi dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$f = \check{\hat{f}} \quad (1.5)$$

et

$$f = \hat{\check{f}} \quad (1.6)$$

L'espace des fonctions  $L^1$  dont la transformée de Fourier est aussi dans  $L^1$  est donc stable par transformation de Fourier et la transformation  $\mathcal{F}^{-1}$  est l'inverse de la transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  sur cet espace. Notons que la formule (1.5) s'écrit aussi

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

**Exercice 1.10.** Donner des exemples de fonctions  $L^1(\mathbb{R}^n)$  dont la transformée de Fourier est également  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercice 1.11.** Prouver le Théorème 1.4 en commençant par le cas  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . On introduira pour ce faire

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\varepsilon\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$$

où la fonction  $\chi(x) = e^{-|x|^2/2}$  est une gaussienne de variance 1.

Dans un second temps, on généralisera le résultat aux fonctions  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  telles que  $\hat{f}$  soit aussi dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

## 1.2 Transformation de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide

L'espace de Schwartz est composé de fonctions régulières qui décroissent rapidement (plus que polynômialement) à l'infini. Une propriété très importante de cet espace est qu'il est stable par la transformation de Fourier, contrairement à l'espace des fonctions intégrables, et contrairement aussi à l'espace des fonctions tests régulières à support compact  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Il servira donc par la suite d'espace de fonctions test pour définir la transformation de Fourier de distributions particulières.

### 1.2.1 Définition de l'espace $\mathcal{S}$

Pour des multi-indices  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  et  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ , on définit  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , et les notations  $x^\alpha$  et  $\partial^\beta$  signifient respectivement  $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  et  $\partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$ . Par ailleurs,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$  et  $\alpha \leq \beta$  si et seulement si  $\alpha_i \leq \beta_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

**Définition 1.3 (Espace de Schwartz).** On dit qu'une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  est à décroissance rapide si pour tout  $p \geq 0$ ,

$$\mathcal{N}_p(\phi) = \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{|\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^\infty} < +\infty.$$

On note  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide.

**Exercice 1.12.** Vérifier que les gaussiennes sont dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 1.4 (Convergence dans  $\mathcal{S}$ ).** On dit qu'une suite  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  converge dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  vers  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a évidemment  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Mais on a en fait un résultat plus fort.

**Proposition 1.3.** L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (pour la topologie associée à  $\mathcal{S}$ ).

**Exercice 1.13.** Prouver ce résultat. On pourra considérer  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que  $\chi(x) = 1$  sur la boule unité  $B(0, 1)$ , et la suite  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\phi_k(x) = \phi(x) \chi\left(\frac{x}{k}\right).$$

On rappelle également la formule de Leibniz :

$$\partial^\beta (\varphi_1 \varphi_2) = \sum_{(0, \dots, 0) \leq \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^{\beta-\gamma} \varphi_1 \partial^\gamma \varphi_2.$$

Concluons cette section par un résultat utile pour la suite.

**Proposition 1.4.** L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est stable par dérivation et par multiplication par des polynômes. De plus, il existe une constante  $C_n$  telle que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{|\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^1} \leq C_n \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi). \tag{1.7}$$

**Exercice 1.14.** Prouver ce résultat.

**Exercice 1.15.** En corollaire de ce résultat, montrer que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ , et que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  si  $1 \leq p < +\infty$ .

### 1.2.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$

Toute fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  étant intégrable, on peut définir la transformation de Fourier sur le sous-espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ , dense dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , en restreignant la Définition 1.1 à l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Le point remarquable est que la transformée de Fourier d'une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est elle aussi dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Théorème 1.5.** L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est stable par transformée de Fourier, et pour tout  $p \in \mathbb{N}$  il existe une constante  $C'_{n,p}$  telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{N}_p(\hat{\phi}) \leq C'_{n,p} \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi).$$

De plus la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  définit un isomorphisme séquentiellement bicontinu<sup>1</sup> de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même, d'inverse  $\mathcal{F}^{-1}$  défini par (1.4).

**Exercice 1.16.** Prouver ce résultat en s'appuyant sur le Théorème 1.4.

Bien noter qu'au contraire de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas stable par transformation de Fourier (ce résultat sera prouvé plus tard).

## 1.3 L'espace des distributions tempérées

### 1.3.1 Définition des distributions tempérées

Comme l'espace des fonctions test  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas stable par transformation de Fourier, on a dû introduire un espace de fonctions test plus grand,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Suivant la philosophie générale de la théorie des distributions, on introduit le dual topologique de l'espace des fonctions test (l'ensemble des formes linéaires sur l'espace des fonctions test), qui est par conséquent un sous-ensemble de l'espace  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  des distributions.

**Définition 1.5.** On note  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  qui vérifient la propriété de continuité suivante : il existe un entier  $p$  et une constante  $C$  tels que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad |\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| \leq C \mathcal{N}_p(\phi). \quad (1.8)$$

Les éléments de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  sont appelés les distributions tempérées, ou parfois les distributions à croissance lente.

**Théorème 1.6.** Tout élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  définit une distribution.

**Exercice 1.17.** Prouver ce résultat.

**Exercice 1.18.** Montrer que  $\delta_a$  (pour  $a \in \mathbb{R}^n$  donné) est une distribution tempérée d'ordre 0, et que la valeur principale est une distribution tempérée d'ordre 1 exactement (i.e. elle ne peut pas être d'ordre 0). Rappelons que la valeur principale est définie par la limite suivante pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  :

$$\left\langle \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right), \phi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

**Exercice 1.19.** Montrer, par un exemple, que la distribution

$$\langle T_f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}^n} f \phi$$

n'est pas, en général, une distribution tempérée, même si  $f$  est régulière.

**Remarque 1.1 (Abus de notation).** Par abus de notation, on notera par la même lettre une distribution tempérée et sa restriction à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Cela permet notamment d'écrire

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

1. On rappelle qu'un isomorphisme est une application d'un espace vers un autre qui préserve la structure algébrique, dont l'inverse est bien défini et préserve lui aussi la structure algébrique. Ici, la préservation de la structure algébrique revient simplement à dire que l'application est linéaire.

On rappelle également qu'une application  $T : E \rightarrow F$  est séquentiellement continue si  $Tu_n$  converge dans  $F$  vers  $Tu$  lorsque  $u_n$  converge vers  $u$  dans  $E$ . La convergence dans les espaces  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  n'étant, dans la Définition 1.4, liée à aucune norme ou même distance, seule la convergence séquentielle fait sens en effet.

La bicontinuité séquentielle signifie que  $T$  et son inverse sont toutes deux des applications séquentiellement continues.

### 1.3.2 Convergence et dérivation dans $\mathcal{S}'$

**Définition 1.6 (Convergence dans  $\mathcal{S}'$ ).** On dit que la suite  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  converge dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vers  $T$  si on a

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle T_k, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \longrightarrow \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

**Théorème 1.7.** Toute suite  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de distributions tempérées qui converge dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vers la distribution tempérée  $T$  converge aussi dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  vers la distribution  $T$ .

La preuve de ce théorème est immédiate par la définition de la convergence au sens des distributions, et l'inclusion  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition-Théorème 1.1 (Dérivation au sens de  $\mathcal{S}'$ ).** Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . La dérivée de  $T$  par rapport à la variable  $x_j$  est l'élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , noté  $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ , défini par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = - \left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

La distribution définie par  $\frac{\partial T}{\partial x_j}$  est la dérivée (au sens des distributions) de la distribution définie par  $T$ .

**Exercice 1.20.** Montrer que  $\frac{\partial T}{\partial x_j}$  est en effet une distribution tempérée.

**Théorème 1.8.** Si  $T_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} T$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\partial^\alpha T_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \partial^\alpha T$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercice 1.21.** Prouver ce résultat.

Finissons par quelques exemples qui montrent qu'en effet  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est strictement inclus dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercice 1.22.** Montrer que la suite des sommes partielles

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!}$$

est une suite d'éléments de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  qui converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , mais pas dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1.23.** Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Montrer que la suite

$$T_N = \sum_{-N \leq k \leq N} a_k \delta_k$$

converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $|a_k| \leq C(1 + |k|)^p$  alors la convergence a aussi lieu dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Fournir un exemple de série qui ne converge pas dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

### 1.3.3 Distributions tempérées particulières

Le théorème suivant permet d'identifier certains sous-espaces de distributions comme des sous-espaces de distributions tempérées. On verra par la suite qu'on peut donc définir une notion de transformation de Fourier pour ces distributions particulières (voir Section 1.3.4).

**Théorème 1.9 (Distributions tempérées particulières).** L'espace  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  contient

(1) les polynômes sur  $\mathbb{R}^n$  ;

(2) les fonctions  $L^p(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ , et l'injection  $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est séquentiellement continue.

**Exercice 1.24.** Prouver ce résultat. Pour l'item (ii), on commencera par traiter le cas où  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , puis  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , avant de passer au cas général pour lequel on écrira  $f = f\mathbf{1}_{|f|<1} + f\mathbf{1}_{|f|\geq 1}$ .

**Remarque 1.2.** On peut également montrer que l'espace  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  des distributions à support compact est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  (voir la Section 4.1 pour la définition). Pour ce faire, considère  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  d'ordre  $p$ ,  $K$  un voisinage compact de  $\text{Supp}(T)$  et  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  valant 1 sur  $K$ . Pour tout  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on définit

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \chi\phi \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$$

On peut montrer que cette définition est indépendante du choix de  $\chi$ , et qu'on définit bien une distribution tempérée.

**Remarque 1.3 (Injection continue).** On peut donc écrire

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

où la notation  $A \hookrightarrow B$  signifie que  $A$  s'injecte dans  $B$  et que l'injection de  $A$  dans  $B$  est séquentiellement continue.

### 1.3.4 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$

Comme il est d'usage en théorie des distributions, les opérations ou actions effectuées sur les distributions sont définies en effectuant ladite opération sur la fonction test. Il en va de même pour la transformation de Fourier.

**Définition-Théorème 1.2 (Transformée de Fourier d'une distribution tempérée).** Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . La transformée de Fourier de  $T$  est la distribution tempérée notée  $\mathcal{F}T$  définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \mathcal{F}T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \hat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \left( = \langle T, \mathcal{F}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \right). \quad (1.9)$$

La transformation de Fourier ainsi définie est une extension de la définition classique de la transformation de Fourier sur  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Au risque de nous répéter : comme la transformée de Fourier d'un élément de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (mais seulement dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ), on ne peut pas définir la transformée de Fourier d'une distribution quelconque par une relation analogue à (1.9), et il faut donc se limiter aux distributions tempérées.

**Exercice 1.25.** Montrer que  $\mathcal{F}T$  est en effet une distribution tempérée. Montrer que si  $T$  est engendrée par une fonction  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , on retrouve la définition de la transformée de Fourier (1.1).

**Remarque 1.4 (Notations).** La transformée de Fourier de la distribution  $T$  est noté  $\mathcal{F}T$  et pas  $\hat{T}$ . On réserve en effet la notation  $\hat{\cdot}$  aux fonctions  $L^1$  pour lesquelles la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  est définie sous la forme intégrale de l'équation (1.1). Lorsque  $f \in L^1$ , les deux notations sont possibles mais on privilégie la notation  $\hat{f}$ .

**Théorème 1.10 (Transformée de Fourier inverse des distributions tempérées).** La transformée de Fourier est un isomorphisme séquentiellement bicontinu de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  sur lui-même, d'inverse  $\mathcal{F}^{-1}$  défini par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \mathcal{F}^{-1}T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \check{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \left( = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \right).$$

**Exercice 1.26.** *Prouver ce résultat.*

**Théorème 1.11 (Dérivation et transformée de Fourier).** *Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et*

$$\mathcal{F} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = i \xi_j \mathcal{F} T. \tag{1.10}$$

**Exercice 1.27.** *Prouver ce résultat, en vérifiant au préalable quel sens donner à  $\xi_j \mathcal{F} T$ .*

**Exercice 1.28.** *Montrer que  $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et que  $\mathcal{F} \delta_a(\xi) = e^{-ia \cdot \xi}$ . De même, montrer que  $x \mapsto e^{ia \cdot x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et que  $\mathcal{F}(e^{ia \cdot x}) = (2\pi)^n \delta_a$ .*

**Exercice 1.29.** *Calculer  $\mathcal{F} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \right)$ .*

## 1.4 Applications aux espaces de Lebesgue et de Sobolev

### 1.4.1 Isométrie de la transformation de Fourier dans $L^2$

Nous avons défini la transformée de Fourier sur l'espace  $\mathcal{S}'$  qui contient (largement!)  $L^2$ . Pourquoi donc consacrer maintenant une section à la transformée de Fourier dans  $L^2$ ? La réponse est fournie par le théorème suivant :

**Théorème 1.12 (Isométrie de la transformée de Fourier).** *Les transformations  $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathcal{F}$  et  $(2\pi)^{n/2} \mathcal{F}^{-1}$  sont des isométries de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  inverses l'une de l'autre :*

$$\begin{aligned} \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\mathcal{F} f\|_{L^2} &= \|f\|_{L^2}, \\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}^{-1} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad (2\pi)^{n/2} \|\mathcal{F}^{-1} f\|_{L^2} &= \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

**Exercice 1.30.** *Pour prouver ce résultat, montrer pour commencer que, si  $(\phi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2$ , on a*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} (\hat{\phi}, \psi)_{L^2} = (\phi, \check{\psi})_{L^2}.$$

*En déduire la propriété d'isométrie sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Conclure par densité.*

**Remarque 1.5 (Interprétation physique).** *Pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , on a la formule de Plancherel*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F} f(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx. \tag{1.11}$$

*Il arrive souvent en physique ou en mécanique que l'énergie d'un champ sur  $\mathbb{R}^n$  s'exprime précisément sous la forme d'une intégrale sur l'espace du carré du champ (penser à l'énergie cinétique d'un écoulement, à l'énergie d'un champ électromagnétique, à l'énergie de déformation élastique linéaire d'un matériau homogène isotrope). L'égalité (1.11) signifie que l'énergie du champ peut alors être calculée indifféremment dans l'espace réel ou dans l'espace réciproque.*

**Exercice 1.31 (Formule de Parseval).** *Montrer, en utilisant une formule de polarisation, que si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F} f(\xi) \overline{\mathcal{F} g(\xi)} d\xi.$$

**Exercice 1.32 (Démonstration alternative de la formule de Plancherel).** On considère une fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et on note  $g(x) = f(-x)$ . Montrer que

$$(f \star \bar{g})(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{i\xi \cdot y} d\xi.$$

En déduire la formule de Plancherel en prenant  $y = 0$ .

**Exercice 1.33 (Transformée de Wigner).** Pour  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  données, on définit la transformée de Wigner  $W_{f,g}$  des fonctions  $f$  et  $g$  par

$$W_{f,g}(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x - \frac{y}{2}\right) \overline{g\left(x + \frac{y}{2}\right)} e^{iy \cdot \xi} dy.$$

Montrer que

$$\mathcal{F}_x W_{f,g}(\eta, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{f}\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right) \overline{\widehat{g}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)}, \quad \mathcal{F}_\xi W_{f,g}(x, y) = f\left(x - \frac{y}{2}\right) \overline{g\left(x + \frac{y}{2}\right)},$$

où  $\mathcal{F}_z$  indique que l'on effectue une transformée de Fourier partielle dans la variable  $z$  uniquement. En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}^n} W_{f,g}(x, \xi) d\xi = f(x) \overline{g(x)}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} W_{f,g}(x, \xi) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)}.$$

Montrer enfin, à l'aide d'une transformée de Fourier partielle dans la variable  $x$ , que si  $\psi \in C^0(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$  vérifie

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \psi,$$

alors la transformée de Wigner  $W_{\psi,\psi}$  de  $\psi$  vérifie l'équation de transport libre

$$\frac{\partial W_{\psi,\psi}}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x W_{\psi,\psi} = 0.$$

La proposition suivante fournit une méthode de calcul de la transformée de Fourier des fonctions  $f$  de classe  $L^2(\mathbb{R}^n)$  qui ne sont pas dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , et permet de comprendre le sens à donner à des intégrales telles que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} d\xi.$$

Essentiellement, il faut voir la transformée de Fourier de  $f$  comme la limite au sens de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (ou de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ) des transformées de Fourier de la fonction restreinte  $f \chi_{\{|x| < R\}}$ .

**Proposition 1.5.** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , et

$$g_R(\xi) = \int_{|x| < R} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Alors  $g_R$  converge vers  $\mathcal{F}f$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . De plus, si la fonction

$$g_R(\xi) = \int_{|x| < R} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} g(\xi) \quad \text{p.p.},$$

alors  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{F}f = g$ .

**Exercice 1.34.** Prouver ce résultat. On se souviendra que la convergence  $L^2$  implique la convergence presque partout à extraction près.



**1.4.2 Espaces de Sobolev**

La transformation de Fourier permet de caractériser la régularité des fonctions : plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier décroît rapidement à l’infini. Ceci est lié en effet à la décroissance de l’amplitude des modes rapides, *i.e.* qui varient sur des échelles spatiales courtes, les irrégularités locales provenant précisément des ces modes-là. Afin d’étudier des fonctions de régularité arbitraire, on définit les espaces de Sobolev d’exposant réel sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition-Théorème 1.3 (Espaces de Sobolev d’exposants réels).** *Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on pose*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \hat{u} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}. \tag{1.12}$$

*Muni du produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)_{H^s}$  et défini par*

$$\forall (u, v) \in H^s(\mathbb{R}^n)^2, \quad (u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi, \tag{1.13}$$

*l’espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est un espace de Hilbert.*

**Exercice 1.35.** *Prouver ce résultat.*

La définition (1.12) des espaces de Sobolev sur  $H^s(\mathbb{R}^n)$  coïncide, lorsque  $s$  est entier, avec la définition plus usuelle suivante.

**Proposition 1.6 (Espaces de Sobolev d’exposants entiers).** *Soit  $s \in \mathbb{N}$ . Alors*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq s \right\}, \tag{1.14}$$

*et la norme définie sur  $H^s(\mathbb{R}^n)$  par le produit scalaire (1.13) est équivalente à celle définie par le produit scalaire*

$$(u, v) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} dx.$$

**Exercice 1.36.** *Prouver ce résultat dans le cas  $s = 1$ .*

La transformation de Fourier permet de montrer très facilement le résultat suivant qui relie la décroissance, ou plus exactement l’intégrabilité, de la transformée de Fourier à l’infini avec la régularité locale de la fonction d’origine.

**Théorème 1.13.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $s \in \mathbb{R}$  vérifiant  $s > k + n/2$ . Si  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , alors  $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$  et toutes ses dérivées jusqu’à l’ordre  $k$  tendent vers zéro à l’infini.*

**Exercice 1.37.** *Prouver ce résultat. On commencera par le cas  $k = 0$ , et on montrera que  $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .*

**Exercice 1.38 (Un résultat de régularité elliptique).** *Résoudre l’équation*

$$-\Delta u + u = f$$

*pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . Montrer que l’unique solution  $u$  est continue et bornée.*

**Exercice 1.39.** *Faire de même pour*

$$-\Delta u + b \cdot \nabla u + \alpha u = f$$

*avec  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $b \in \mathbb{R}^3$  et  $\alpha > 0$ .*

## 1.5 Résolution d'équations aux dérivées partielles

Nous concluons ce chapitre en montrant comment l'utilisation de la transformée de Fourier permet de résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles rencontrés en physique.

### 1.5.1 Equation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur, qui est le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f - \Delta f = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n, \\ f(0, \cdot) = f_0 & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.15)$$

On peut montrer l'existence et l'unicité d'une solution  $f(t, \cdot) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $t \geq 0$  si  $f_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  (voir [4, Section XIV.2.2]; nous ne présentons pas les détails ici car cela demanderait d'introduire la convolution de deux distributions). Il existe d'autres théories qui permettent de caractériser l'évolution pour des conditions initiales  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (théorie de Hille-Yosida).

**Exercice 1.40.** *Montrer, en utilisant une transformée de Fourier sur la variable spatiale, que la solution est*

$$f(t, x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f_0(y) e^{-|x-y|^2/4t} dy.$$

Cette expression a un sens en tant que telle si  $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  par exemple. Si  $f_0$  est continue, on a bien la convergence ponctuelle  $f(t, x) \rightarrow f_0(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .

**Exercice 1.41 (Problème de Cauchy inhomogène).** *Donner la forme de la solution pour le problème de Cauchy inhomogène  $\partial_t f - \Delta f = g$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ , avec  $(t, x) \mapsto g(t, x)$  donnée.*

### 1.5.2 Equation de Schrödinger

En mécanique quantique, l'état d'un système est décrit à tout temps par une fonction  $\psi(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(t, x)|^2 dx = 1.$$

Ainsi,  $|\psi(t, x)|^2$  peut s'interpréter comme la densité d'une mesure de probabilité (qui est la probabilité pour une particule telle qu'un électron d'être présente dans une région donnée de l'espace physique  $\mathbb{R}^n$ ). L'évolution temporelle en repère Galiléen de la fonction d'onde d'une particule isolée de masse  $m$  est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi,$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. Après adimensionnalisation, il suffit de considérer le problème

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi, \quad (1.16)$$

avec une condition initiale  $\psi(0, x) = \psi_0(x)$ . Nous ne précisons pas plus ici le cadre théorique qui permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour une condition initiale  $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  (voir à ce sujet [8] par exemple).

**Exercice 1.42.** *Montrer que la solution peut s'écrire*

$$\psi(t, x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - t|\xi|^2)} \hat{\psi}_0(\xi) d\xi.$$

*Montrer également que  $\psi(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $t \geq 0$  et  $\|\psi(t, \cdot)\|_{L^2} = 1$  si initialement  $\|\psi_0\|_{L^2} = 1$ .*

## 1.6 Applications en théorie des probabilités

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire  $X$  de loi  $\mu$  (qui est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire une mesure positive de masse totale égale à 1) est reliée à la transformée de Fourier de la mesure de probabilité sous-jacente. Plus précisément, on la définit par<sup>2</sup>

$$\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \mu(dx) = \mathbb{E}(e^{-i\xi X}).$$

On a bien sûr  $|\phi(\xi)| \leq \mu(\mathbb{R}) = 1$  si  $\xi \in \mathbb{R}$ . On montre que  $\mu$  est caractérisée de manière unique par sa fonction caractéristique (voir la Proposition 1.8).

**Remarque 1.6.** *Il est en fait plus usuel de considérer  $\mathbb{E}(e^{i\xi X})$  comme fonction caractéristique en théorie des probabilités. Comme ce cours est plutôt un cours sur la transformation de Fourier, nous préférons adopter une autre convention, qui est plus naturelle au vu des sections précédentes. Toutefois, la convention usuelle des ouvrages de théorie des probabilités peut être retrouvée en remplaçant  $\xi$  par  $-\xi$ , ou en prenant le complexe conjugué.*

Il est utile pour la suite d'introduire la fonction de répartition

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mu(]-\infty, x]).$$

Le connaissance de  $F$  est équivalente à la connaissance de  $\mu$ . Rappelons au passage le résultat suivant :

**Proposition 1.7 (Propriétés de la fonction de répartition).** *Une fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de répartition associée à une mesure de probabilité si et seulement si elle est croissante, continue à droite, et*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

### 1.6.1 Premières propriétés des fonctions caractéristiques

**Théorème 1.14.** *La fonction caractéristique  $\phi(\xi)$  d'une mesure de probabilité  $\mu$  est une fonction uniformément continue de  $\xi$ , qui est définie positive au sens suivant : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $n$ -uplets  $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{C}^n$  et  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\sum_{i,j=1}^n \phi(\xi_i - \xi_j) \rho_i \bar{\rho}_j \geq 0. \tag{1.17}$$

**Exercice 1.43.** *Prouver ce résultat (on utilisera des résultats de convergence dominée pour une mesure positive finie générale, et on remarquera qu'il suffit de vérifier la continuité en  $\xi = 0$ ).*

Donnons à présent quelques exemples de fonctions caractéristiques. Le lecteur pourra vérifier dans chaque cas l'uniforme continuité de la fonction.

**Exemple 1.1 (Distribution dégénérée).** Dans le cas où  $\mu = \delta_a$  pour  $a \in \mathbb{R}$  (on est dans une situation déterministe puisque la variable aléatoire étudiée a toujours pour valeur  $a$ !),  $\phi(\xi) = e^{-ia\xi}$ .

---

2. On se reportera par exemple au Cours d'Analyse de première année de l'Ecole des Ponts pour des rappels utiles sur la théorie de l'intégration, et en particulier la définition des intégrales par rapport à une mesure positive quelconque.

**Exercice 1.44 (Distribution binômiale).** *Lorsqu'une variable aléatoire  $X$  suit une distribution binômiale de paramètres  $p \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,*

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k} = p_k,$$

pour  $0 \leq k \leq n$ . Montrer que

$$\phi(\xi) = \sum_{k=0}^n p_k e^{-ik\xi} = \left( p e^{-i\xi} + (1-p) \right)^n.$$

**Exercice 1.45 (Distribution gaussienne).** *Pour une distribution gaussienne de moyenne  $M$  et de variance  $\sigma^2$ , la mesure de probabilité est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , et on a  $\mu(dx) = f(x) dx$ , avec la densité*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Calculer la fonction caractéristique correspondante.

**Exercice 1.46 (Distribution de Poisson).** *Pour une distribution de Poisson de paramètre  $\lambda$ , la mesure de probabilité a pour support  $\mathbb{N}$ , et pour expression*

$$\mu(dx) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n(dx).$$

Calculer la fonction caractéristique correspondante.

Concluons cette section par un résultat d'unicité qui montre qu'une mesure de probabilité est entièrement caractérisée par sa fonction caractéristique.

**Proposition 1.8.** *Si deux mesures de probabilité  $\mu_1$  et  $\mu_2$  ont la même fonction caractéristique, alors  $\mu_1 = \mu_2$ .*

**Exercice 1.47.** *Prouver ce résultat en montrant tout d'abord que  $\mu_1 = \mu_2$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , puis que*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_2 \tag{1.18}$$

pour toute fonction continue à support compact, et enfin que (1.18) est vraie pour  $f$  continue bornée. Pour cette dernière étape, on pourra introduire la suite de fonctions  $(f\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où les fonctions  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont continues à support compact, et telles que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la suite  $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et converge vers 1 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

## 1.6.2 Le théorème de Bochner

Il existe une réciproque au Théorème 1.14, qui exprime que toute fonction continue définie positive (au sens de (1.17)), et normalisée ( $\phi(0) = 1$ ) est une fonction caractéristique d'une mesure de probabilité (et d'une seule, au vu du résultat d'unicité donné par la Proposition 1.8). Ainsi, les propriétés des fonctions caractéristiques énoncées au Théorème 1.14 sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes.

**Théorème 1.15 (Bochner).** *Si  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction définie positive, continue en 0, et telle que  $\phi(0) = 1$ , alors il existe une unique mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$  dont  $\phi$  est la fonction caractéristique.*

On peut montrer ce résultat par un argument direct (quoiqu'un peu long) ou par des résultats plus abstraits de la théorie des distributions.

---

## Echantillonnage et transformée de Fourier discrète

---



---

<b>2.1</b>	<b>Séries de Fourier</b> .....	<b>17</b>
2.1.1	Convergence ponctuelle .....	18
2.1.2	Convergence $L^2$ .....	18
<b>2.2</b>	<b>Distributions périodiques</b> .....	<b>19</b>
2.2.1	Définition .....	19
2.2.2	Caractérisation d'une distribution périodique par sa série de Fourier ..	19
2.2.3	Transformée de Fourier des distributions périodiques.....	21
<b>2.3</b>	<b>Echantillonnage</b> .....	<b>21</b>
2.3.1	Echantillonnage d'un signal .....	21
2.3.2	Théorème de Shannon .....	23
<b>2.4</b>	<b>Le recouvrement spectral (aliasing)</b> .....	<b>25</b>
2.4.1	Exemple de repliement spectral .....	25
2.4.2	Suppression de l'aliasing .....	25
<b>2.5</b>	<b>Transformée de Fourier discrète</b> .....	<b>26</b>
<b>2.6</b>	<b>Transformée de Fourier rapide</b> .....	<b>27</b>
2.6.1	Présentation générale de la méthode .....	27
2.6.2	Calcul de complexité .....	28

---

L'objet principal de ce chapitre est d'étudier la transformée de Fourier de fonctions échantillonnées. Par souci de simplification, nous ne considérerons dans ce chapitre que des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , les résultats s'étendant cependant aux cas multidimensionnels. Nous limitons de plus notre étude à l'échantillonnage *uniforme*, où les échantillons sont espacés régulièrement, bien que l'échantillonnage non-uniforme soit aussi utilisé dans la pratique. Nous verrons que l'échantillonnage uniforme d'une fonction continue  $f$  à un pas  $T$  peut être vu comme le peigne de Dirac :

$$f_T = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \delta_{nT}.$$

Pour mesurer la perte d'information subie en remplaçant  $f$  par  $f_T$ , on fera le lien entre leurs transformées de Fourier  $\hat{f}$  et  $\hat{f}_T$ . Grâce à la théorie de Fourier des distributions tempérées vue au chapitre précédent, nous pouvons donner un sens à la transformée de Fourier de  $f_T$ .

### 2.1 Séries de Fourier

Commençons par rappeler quelques résultats sur les séries de Fourier, qui permettent d'étudier des fonctions périodiques. Pour une fonction  $T$ -périodique  $f$  dont la restriction à l'intervalle  $[0, T]$  est dans  $L^1([0, T])$ , le coefficient de Fourier d'ordre  $n \in \mathbb{Z}$  est

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi nt/T} dt,$$

et la série de Fourier associée est

$$S_f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi nt/T},$$

lorsque cette somme a un sens. En général, on n'a pas convergence en tout point  $t \in [0, T]$  puisque la modification de  $f$  sur un ensemble de mesure nulle ne change pas  $S_f$ . On a toutefois un certain nombre de résultats de convergence dans des espaces fonctionnels adéquats.

### 2.1.1 Convergence ponctuelle

On pourrait penser que la série de Fourier d'une fonction continue converge en tout point vers la fonction en question. C'est cependant faux en général puisqu'il existe des exemples (compliqués, certes) de fonctions continues dont la série de Fourier diverge en certains points, voir par exemple [12, Section VIII]. On peut cependant avoir un résultat de convergence avec des hypothèses supplémentaires de régularité (voir par exemple [10]).

**Théorème 2.1.** *Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique,  $C^1$  par morceaux. Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$S_f(t) = \frac{1}{2} \left( f(t_+) + f(t_-) \right),$$

où les limites de la fonction  $f$  à gauche et à droite sont  $f(t_{\pm}) = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} f(t \pm \varepsilon)$ .

Si la fonction  $f$  est continue et  $C^1$  par morceaux, on a alors convergence ponctuelle en tout point. Pour les besoins de la théorie des distributions périodiques, nous pourrions nous contenter du résultat suivant (où nous considérons une période  $T > 0$  générale).

**Lemme 2.1.** *Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  une fonction  $T$ -périodique. On note*

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi n t/T} dt.$$

Alors la série de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{2i\pi n t/T}$$

converge uniformément vers  $f$ .

**Exercice 2.1.** *Démontrer ce lemme.*

### 2.1.2 Convergence $L^2$

Outre les résultats de convergence ponctuelle précédents, on a également des résultats de convergence dans l'espace fonctionnel des fonctions  $T$ -périodiques  $f$  dont la restriction à l'intervalle  $[0, T]$  est dans  $L^2([0, T])$ . Comme  $L^2([0, T]) \subset L^1([0, T])$ , on peut bien définir les coefficients de Fourier de  $f$ .

**Proposition 2.1.** *Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  telle que sa restriction à l'intervalle  $[0, T]$  soit de carré intégrable. Alors la série*

$$S_f^{N,M}(t) = \sum_{n=-N}^M c_n(f) e^{i2\pi nt/T}$$

converge vers  $f$  dans  $L^2([0, T])$  lorsque  $N, M \rightarrow +\infty$ , et

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

**Exercice 2.2.** *Le démontrer.*

Notons toutefois que cette proposition ne dit rien sur la convergence ponctuelle de la série.<sup>1</sup>

## 2.2 Distributions périodiques

Tout comme les fonctions périodiques, les distributions périodiques (qui sont par définition égales à leur translatée) peuvent se représenter comme la somme d'une série de Fourier. Ceci permet de montrer que les distributions périodiques sont des distributions tempérées, et de calculer leur transformée de Fourier de façon aisée.

### 2.2.1 Définition

Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . On appelle  $T$ -translatée de  $u$  la distribution  $\tau_T u$  définie pour toute fonction test  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  par

$$\langle \tau_T u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle u, \tau_{-T} \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle u, \phi(\cdot + T) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Cette définition est bien sûr motivée par le cas  $u \in L^1(\mathbb{R})$ , car on a alors, par le changement de variable  $y = x - T$ ,

$$\langle \tau_T u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}} u(x - T) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(y) \phi(y + T) dy = \langle u, \phi(\cdot + T) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

**Définition 2.1 (Distribution  $T$ -périodique).** *Une distribution  $u$  est  $T$ -périodique si  $\tau_T u = u$ . L'ensemble des distributions  $T$ -périodiques est noté  $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R})$ .*

Comme pour la théorie des distributions usuelles, le résultat technique suivant sera très utile dans de nombreuses preuves.

**Lemme 2.2 (Partition de l'unité  $T$ -périodique).** *Il existe  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(t - nT) = 1.$$

**Exercice 2.3.** *Démontrer ce résultat en utilisant l'existence d'une fonction  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  positive, et strictement positive sur l'intervalle  $[0, T]$ .*

### 2.2.2 Caractérisation d'une distribution périodique par sa série de Fourier

Avant de démontrer qu'une distribution périodique peut se représenter comme une série de Fourier, commençons par montrer le résultat, plus élémentaire, que les séries de Fourier dont les coefficients forment une suite à croissance lente sont des distributions périodiques.

**Théorème 2.2.** *Soit  $(\gamma_k)$  une suite à croissance lente, i.e. telle que*

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad |\gamma_k| \leq C(1 + |k|)^p.$$

*Alors la série*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{2i\pi kt/T}$$

*converge au sens des distributions et définit une distribution  $T$ -périodique.*

<sup>1</sup>. Rappelons que la convergence dans  $L^2([0, T])$  implique la convergence dans  $L^1([0, T])$ , mais on n'a convergence presque partout qu'à extraction près!

**Exercice 2.4.** Démontrer ce théorème en introduisant la série  $\sum_{k \neq 0} \frac{\gamma_k}{k^{p+2}} e^{2i\pi kt/T}$ .

Le Théorème 2.2 permet donc de construire des distributions périodiques comme sommes de séries de Fourier. De plus, la proposition ci-dessous montre que les coefficients  $\gamma_k$ , appelés *coefficients de Fourier*, sont définis de manière unique.

**Proposition 2.2 (Unicité des coefficients de Fourier).** Si  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une suite à croissance lente telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{2i\pi kt/T} = 0$$

au sens des distributions, alors  $\gamma_k = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 2.5.** Démontrer ce résultat à l'aide des fonctions tests  $\chi(t) e^{-2i\pi k_0 t/T}$ , où  $\chi(t)$  est une partition  $T$ -périodique de l'unité. On décomposera les intégrales sur  $\mathbb{R}$  en une somme d'intégrales sur les intervalles  $[nT, (n+1)T[$ .

Ainsi, si  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une suite à croissance lente, la série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{2i\pi kt/T}$$

définit de façon unique une distribution  $T$ -périodique. À l'inverse, le théorème suivant montre que toute distribution périodique  $u$  peut se représenter sous cette forme. Les  $\gamma_k$  s'appellent alors les *coefficients de Fourier* de  $u$ . Ils sont définis de façon unique d'après la Proposition 2.2, et on montre qu'ils forment une suite à croissance lente :

**Théorème 2.3.** Soit  $u$  une distribution  $T$ -périodique. On définit ses coefficients de Fourier  $\gamma_k(u)$  par

$$\gamma_k(u) = \frac{1}{T} \left\langle u, \chi e^{-2i\pi kt/T} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \quad (2.1)$$

où  $\chi$  est une partition de l'unité  $T$ -périodique. Alors  $(\gamma_k(u))_{k \in \mathbb{Z}}$  est une suite à croissance lente, ne dépend pas de  $\chi$ , et on a l'égalité suivante au sens des distributions :

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k(u) e^{2i\pi kt/T}. \quad (2.2)$$

La démonstration de ce résultat repose sur deux lemmes préliminaires.

**Lemme 2.3.** Soit  $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{kT} \tilde{\phi}$ . Alors,  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$  est  $T$ -périodique et

$$c_n(\phi) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}(t) e^{-2i\pi n t/T} dt.$$

Pour le suivant, rappelons que l'espace des distributions à support compact  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  est défini dans la Section 4.1.

**Lemme 2.4.** Soit  $u \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R})$ . Il existe  $\tilde{u} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  telle que

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{nT} \tilde{u}.$$

Alors  $\gamma_n(u)$  défini en (2.1) vérifie

$$\gamma_n(u) = \frac{1}{T} \left\langle \tilde{u}, e^{-2i\pi n t/T} \right\rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}.$$



La suite  $(\gamma_n(u))_{n \in \mathbb{Z}}$  est à croissance lente et, pour tout  $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle u, \tilde{\phi} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n(u) c_{-n}(\phi). \quad (2.3)$$

où  $c_n(\phi)$  est défini en (2.3).

**Exercice 2.6.** Démontrer ces lemmes et en déduire le théorème. Pour le Lemme 2.4, on introduira  $\tilde{u} = \chi \cdot u$  pour une partition  $T$ -périodique de l'unité donnée  $\chi$ , et on montrera que  $\langle u, \tilde{\phi} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \left\langle \tilde{u}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{nT} \tilde{\phi} \right\rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{C}^\infty}$  pour tout  $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

**Remarque 2.1 (Preuve usuelle).** Une preuve plus standard de ce résultat (voir par exemple [11, Section VII.1] ou [4, Section III.A.1]) repose sur la convolution des distributions.

En conclusion, toute distribution  $T$ -périodique  $u$  est la somme d'une série de Fourier dont les coefficients  $\gamma_k(u)$  sont à croissance lente :

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k(u) e^{2i\pi kt/T},$$

et réciproquement, toute série de Fourier dont les coefficients sont à croissance lente définit une distribution  $T$ -périodique.

### 2.2.3 Transformée de Fourier des distributions périodiques

Le théorème suivant montre que les distributions périodiques sont des distributions tempérées. On peut donc légitimement en considérer la transformée de Fourier. La transformée de Fourier  $\mathcal{F}u$  d'une distribution périodique  $u$  est un peigne de Dirac, dont les poids sont les coefficients de Fourier  $\gamma_k(u)$  définis en (2.1).

**Théorème 2.4.** Toute distribution  $T$ -périodique  $u$  est une distribution tempérée et sa transformée de Fourier est donnée par

$$\mathcal{F}u = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k(u) \delta_{2k\pi/T},$$

où les  $\gamma_k(u)$  sont les coefficients de Fourier de  $u$  définis en (2.1).

**Exercice 2.7.** Le démontrer en travaillant sur  $v = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k(u) \delta_{2k\pi/T}$  et ses sommes partielles. On montrera que  $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et que  $u = \mathcal{F}^{-1}v$ .

## 2.3 Echantillonnage

### 2.3.1 Echantillonnage d'un signal

La bonne représentation mathématique d'une fonction continue  $f$  échantillonnée avec un pas  $T > 0$  est le peigne de Dirac

$$f_T = T \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \delta_{kT}. \quad (2.4)$$

On considère des fonctions continues à croissance lente, c'est-à-dire telle qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  et  $C > 0$  avec  $|f(t)| \leq C(1 + |t|)^p$ . Alors,  $f_T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et, lorsque le pas d'échantillonnage  $T$  tend vers 0,  $f_T$  tend vers  $f$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . En effet, pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle f_T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T f(kT) \phi(kT) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(t) dt = \langle f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle f, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

car on reconnaît dans le membre de gauche une somme de Riemann d'une fonction à décroissance rapide.

Afin de pouvoir comparer les transformées de Fourier de  $f$  et de  $f_T$ , nous allons, dans un premier temps, calculer la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT},$$

qui est bien une distribution  $T$ -périodique.

**Exercice 2.8.** Montrer que au sens de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{kT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi kt/T}. \quad (2.5)$$

Pour ce faire, on montrera que le membre de gauche est une distribution  $T$ -périodique, dont on calculera les coefficients de Fourier.

Ainsi, la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de pas  $T$  est un peigne de Dirac de pas  $2\pi/T$ . La fréquence  $2\pi/T$  s'appelle la *fréquence d'échantillonnage*.

**Théorème 2.5 (Formule de Poisson).** Soit  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . On a l'égalité :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{T}\right). \quad (2.6)$$

**Exercice 2.9.** Le démontrer.

Nous arrivons au résultat principal de cette section, qui exprime la transformée de Fourier de  $f_T$  à partir de celle de  $f$ , si  $f$  est à bande limitée.

**Définition 2.2 (Bande limitée).** On dit que  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  est à bande limitée si sa transformée de Fourier est à support compact (au sens où c'est un élément de  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ ).

On utilisera par la suite le résultat suivant pour donner un sens aux valeurs ponctuelles d'une distribution à bande limitée.

**Théorème 2.6.** Soit  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  à bande limitée (i.e.  $\mathcal{F}f$  est à support compact et donc  $\mathcal{F}f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ ). Alors  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  est à croissance lente et

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}f, e^{ix\xi} \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty},$$

où le produit de dualité ci-dessus porte sur la variable  $\xi$

**Remarque 2.2 (Théorème de Paley-Wiener).** On peut en fait étendre  $f$  à une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire partout égale à son développement en série entière), voir par exemple [8, Section IX.3] ou [11, Section VII.8].

**Exercice 2.10.** Démontrer ce résultat en introduisant

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}f, e^{ix\xi} \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty} = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}f, \chi e^{ix\xi} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Montrer que  $g'(x) = \frac{i}{2\pi} \langle \mathcal{F}f, \xi e^{ix\xi} \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}$  et que  $g$  est en fait  $C^\infty$ . Montrer ensuite que  $f = g$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  et conclure.

Cette remarque montre en particulier que  $f$  est continue, et donc que les valeurs ponctuelles de  $f$  aux points  $kT$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) ont un sens. On peut alors considérer la fonction échantillonnée (2.4).

**Théorème 2.7.** *Si  $f$  est à bande limitée, alors la transformée de Fourier de la fonction discrète  $f_T$  définie par (2.4) est*

$$\mathcal{F} f_T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{2k\pi/T} \mathcal{F} f, \quad (2.7)$$

où l'égalité a lieu au sens de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Notons que dans le cas limite  $T \rightarrow 0$  (échantillonnage de plus en plus fin),  $f$  à bande limitée implique  $f$  continue et à croissance lente, et donc  $f_T \rightarrow f$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  par (2.3.1). On en déduit également la convergence de  $\mathcal{F} f_T$  vers  $\mathcal{F} f$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , ce qui est consistant avec (2.7).

**Exercice 2.11.** *Démontrer ce résultat en commençant par supposer que  $\mathcal{F} f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  puis, dans le cas général, en utilisant une suite approximante de  $\mathcal{F} f$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Pour le cas  $\mathcal{F} f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on commencera par écrire que, par la formule de Poisson,*

$$\hat{f}_T(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_\xi(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_\xi(2k\pi),$$

pour une fonction  $h_\xi$  à préciser.

Symétriquement au fait que la transformée de Fourier d'une distribution périodique est discrète (c'est un peigne de Dirac), nous venons de voir que la transformée de Fourier d'une distribution échantillonnée (discrète) est périodique.

### 2.3.2 Théorème de Shannon

Nous établissons dans ce paragraphe un résultat d'interpolation, qui montre que sous certaines conditions, on peut reconstruire une fonction  $f$  à partir de ses échantillons. Ce résultat, appelé théorème d'échantillonnage ou théorème de Shannon, est remarquable car il montre que l'échantillonnage n'induit pas de perte d'information. La condition essentielle de ce théorème est que le support de  $\mathcal{F} f$  soit dans l'intervalle borné  $[-\pi/T, \pi/T]$ , ce qui garantit que  $f$  n'a pas de variation brutale entre deux échantillons consécutifs. La Figure 2.3.2 illustre les différentes étapes d'un échantillonnage puis d'une reconstruction à partir des échantillons, dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel.

**Théorème 2.8 (Shannon).** *Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et si le support de  $\mathcal{F} f$  est inclus dans  $[-\pi/T, \pi/T]$ , alors*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) h_T(t - kT) \quad (2.8)$$

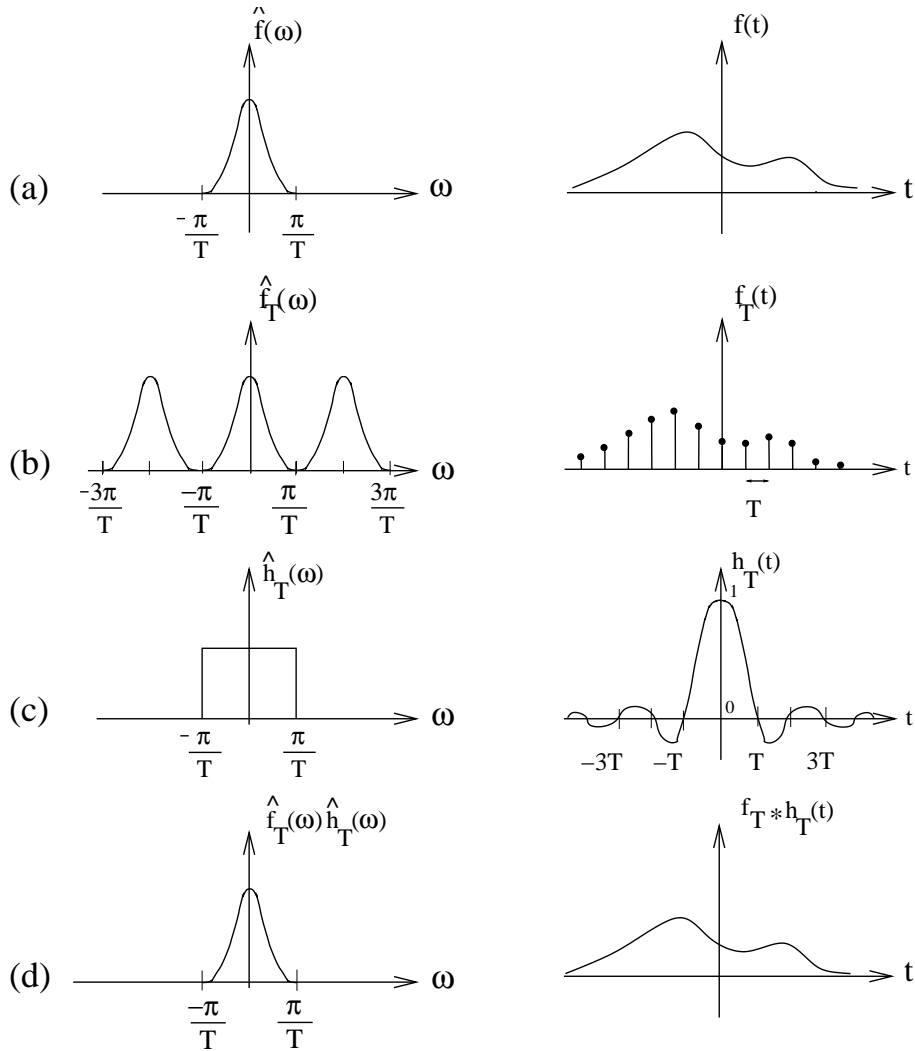
dans  $L^2(\mathbb{R})$  avec

$$h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \quad (2.9)$$

Comme on l'a déjà vu auparavant (voir Théorème 2.6), le fait que le support de  $\mathcal{F} f$  soit inclus dans  $[-\pi/T, \pi/T]$  implique que  $f$  est  $C^\infty(\mathbb{R})$ , et donc les valeurs ponctuelles  $f(kT)$  ont bien un sens (ce qui n'est pas vrai en général pour une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$ ).

**Exercice 2.12.** *Montrer que si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est à bande limitée, alors  $f \in H^s(\mathbb{R})$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .*

**Exercice 2.13.** *Démontrer le théorème de Shannon en utilisant la  $2\pi/T$  périodicité de la distribution  $\mathcal{F} f_T$  et (2.7) pour obtenir  $\mathcal{F} f(\xi) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \chi_{[-\pi/T, \pi/T]}(\xi) e^{-i\xi nT}$  (où  $\chi_{[a,b]}$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $[a, b]$ ).*



**Fig. 2.1.** (a) : Signal  $f$  et sa transformée de Fourier  $\mathcal{F}f$ . (b) : Un échantillonnage uniforme de  $f$  rend sa transformée de Fourier périodique. (c) : Passe-bas idéal. (d) : Le filtrage de (b) par (c) reconstitue  $f$ .

**Remarque 2.3 (Théorème de Shannon pour les séries trigonométriques).** *Un résultat similaire au théorème précédent s'obtient pour les séries trigonométriques dont les exponentielles complexes ont des pulsations strictement inférieures en valeur absolue à  $\pi/T$ . La preuve est très différente et se base sur la décomposition en série de Fourier de la restriction des fonctions  $\xi \mapsto e^{i\xi t}$  à  $[-\pi/T, \pi/T]$ .*

La fonction  $h_T$  dont la transformée de Fourier est  $\chi_{[-\pi/T, \pi/T]}(\xi)$  s'appelle *filtre passe-bas idéal*. L'opération

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}f_T(\xi) \cdot \chi_{[-\pi/T, \pi/T]}(\xi)$$

s'appelle le filtrage de  $f_T$  par  $h_T$ , et permet de ne conserver que les composantes fréquentielles de  $\mathcal{F}f_T(\xi)$  telles que  $|\xi| \leq \pi/T$ .

**Remarque 2.4 (Approximation numérique).** *Si  $f(t)$  est un signal à bande limitée dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans  $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$ , le théorème de Shannon montre que la fréquence d'échantillonnage minimale pour laquelle le signal peut être reconstruit exactement est  $2\xi_{\max}$ . Cependant, la fonction  $h_T$  a une décroissance très lente à l'infini, donc le second membre*

de (2.8) converge très lentement. Ceci peut poser des problèmes techniques de troncature pour des calculs pratiques. C'est pourquoi il est intéressant de remplacer  $h_T$  par une fonction qui a une décroissance plus rapide à l'infini. Supposons qu'on suréchantillonne  $f$ , c'est-à-dire qu'on l'échantillonne à une fréquence  $2\pi/T > 2\xi_{\max}$ . Les calculs conduisant à (2.8) restent valables si l'on remplace le filtre passe-bas idéal  $h_T$  par un filtre  $h$  vérifiant

$$\hat{h}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| < \xi_{\max}, \\ 0 & \text{si } |\xi| > \pi/T, \end{cases}$$

mais dont la transformée de Fourier  $\hat{h}$  est plus régulière. Ainsi, le filtre  $h$  a une décroissance à l'infini plus rapide qu'un sinus cardinal, et la série

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) h(t - kT)$$

a de meilleures propriétés numériques de convergence.

## 2.4 Le recouvrement spectral (aliasing)

Que se passe-t-il si les conditions du théorème de Shannon ne sont pas vérifiées? La réponse est contenue dans l'équation (2.7) que nous rappelons pour mémoire dans le cadre  $L^2$  :

$$\mathcal{F}f_T(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f\left(\xi + \frac{2k\pi}{T}\right)$$

Supposons que le support de  $\mathcal{F}f$  déborde de  $[-\pi/T, \pi/T]$ . Le support de  $\mathcal{F}f(\xi + 2k\pi/T)$  intersecte alors  $[-\pi/T, \pi/T]$  pour plusieurs  $k \neq 0$  en général, comme le montre la Figure 2.2. Ce repliement des composantes de haute fréquence sur un intervalle de basse fréquence s'appelle recouvrement spectral, repliement spectral ou encore *aliasing*.

### 2.4.1 Exemple de repliement spectral

**Exercice 2.14.** Montrer si  $f(t) = \cos(\xi_0 t)$  et  $2\pi/T > \xi_0 > \pi/T$  alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) h_T(t - kT) = \cos\left[\left(\frac{2\pi}{T} - \xi_0\right)t\right].$$

L'aliasing ramène la haute fréquence  $\xi_0$  à une fréquence plus basse  $(2\pi/T - \xi_0) \in [-\pi/T, \pi/T]$ . Le même repliement de fréquence s'observe sur un film qui échantillonne dans le temps le mouvement rapide d'un objet, avec un nombre insuffisant d'images par seconde. Une roue qui tourne vite semble dans le film tourner beaucoup plus lentement.

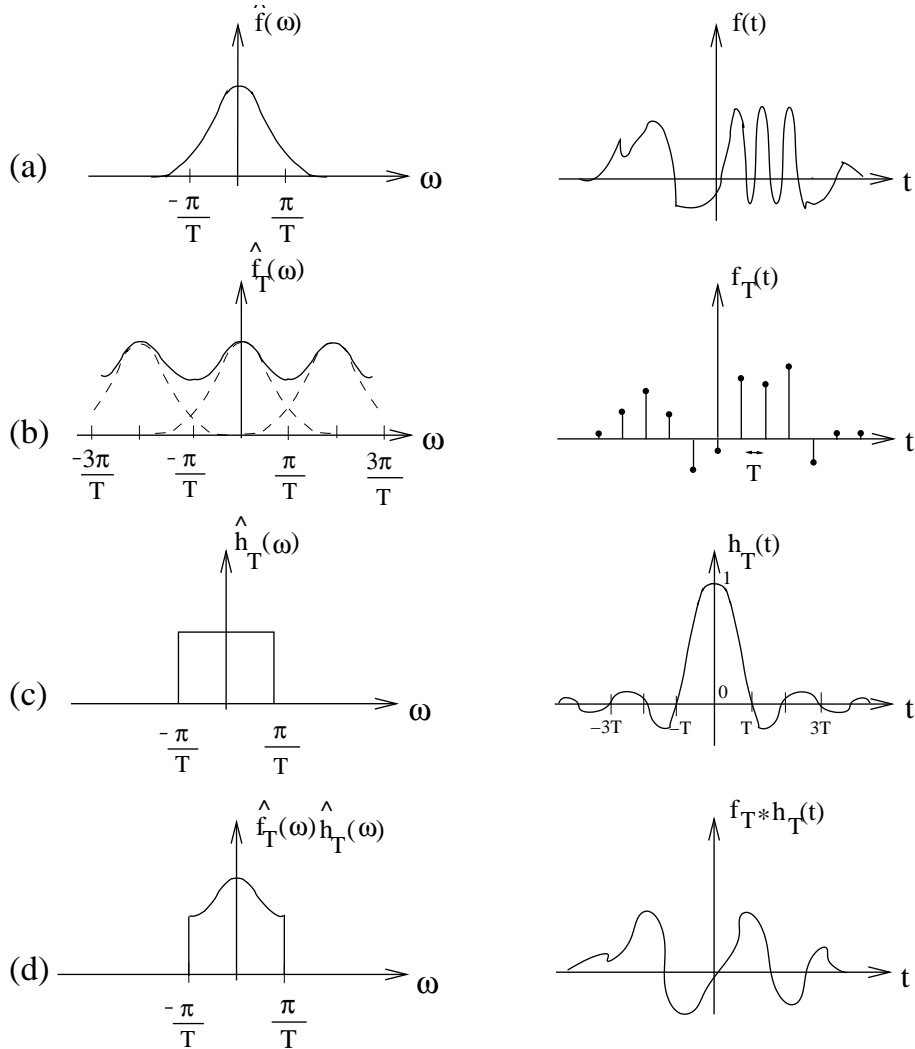
### 2.4.2 Suppression de l'aliasing

Pour éviter le recouvrement spectral, il faut que le support spectral de la fonction qu'on échantillonne à un pas  $T$  soit inclus dans  $[-\pi/T, \pi/T]$ . Ceci n'est malheureusement pas toujours possible, car la fréquence d'échantillonnage est imposée par le dispositif d'acquisition. Il est préférable dans ce cas de faire subir un prétraitement à  $f$  pour ramener son support spectral dans  $[-\pi/T, \pi/T]$ .

**Exercice 2.15.** Déterminer la fonction  $g$  telle que  $\text{Supp}(\mathcal{F}g) \subset [-\pi/T, \pi/T]$ , qui soit la plus proche possible de  $f$  en norme  $L^2$ .

Cette opération, appelée *filtrage* de  $f$  évite le recouvrement spectral en supprimant toutes les fréquences au-delà de  $\pi/T$ . Comme  $\mathcal{F}g$  est à support dans  $[-\pi/T, \pi/T]$ , le théorème d'échantillonnage montre que  $g(t)$  peut être reconstitué à partir des échantillons  $g(nT)$ .

Un convertisseur analogique/digital est composé d'un filtre qui limite le support fréquentiel à  $[-\pi/T, \pi/T]$ , suivi d'un échantillonnage uniforme au pas  $T$ .



**Fig. 2.2.** (a) Signal à échantillonner et sa transformée de Fourier. (b) Echantillonnage et repliement spectral. (c) Filtre passe-bas idéal pour filtrage initial du signal. (d) Reconstruction du signal échantillonné.

### 2.5 Transformée de Fourier discrète

Numériquement, on ne connaît les valeurs d’une fonction continue  $f$  qu’en ses points d’échantillonnage, et par ailleurs, on n’a accès qu’à un nombre fini  $N$  de ces échantillons : typiquement, on connaît  $f[n]$  pour  $0 \leq n < N$  (nous avons considéré une période d’échantillonnage  $T = 1$  pour simplifier). Nous allons voir maintenant comment la transformée de Fourier discrète permet de donner un sens à la transformée de Fourier des valeurs  $\{f[n]\}_{n=0,\dots,N-1}$ .

Pour cela, considérons un peigne de Dirac dont les poids sont les  $f[n]$ , étendus à  $\mathbb{Z}$  tout entier par périodisation :

$$\tilde{f} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \delta_{n+kN}. \tag{2.10}$$

**Exercice 2.16.** Montrer qu'elle peut s'écrire comme une série de Fourier de coefficients

$$\gamma_k(\tilde{f}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2i\pi kn/N}. \tag{2.11}$$

Finalement, la transformée de Fourier discrète est définie par  $N \gamma_k(\tilde{f})$  :

**Définition 2.3 (Transformée de Fourier discrète).** On définit la transformée de Fourier discrète  $\{\hat{f}[k]\}_{k=0,\dots,N-1}$  de  $\{f[n]\}_{n=0,\dots,N-1}$  par

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2i\pi kn/N}. \quad (2.12)$$

On a également une formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète :

**Proposition 2.3 (Formule d'inversion discrète).** Etant données  $N$  valeurs  $\{f[n]\}_{n=0,\dots,N-1}$  d'une fonction continue régulièrement échantillonnée,

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{2i\pi kn/N}, \quad (2.13)$$

où la transformée de Fourier discrète est définie en (2.12).

**Exercice 2.17.** La démontrer.

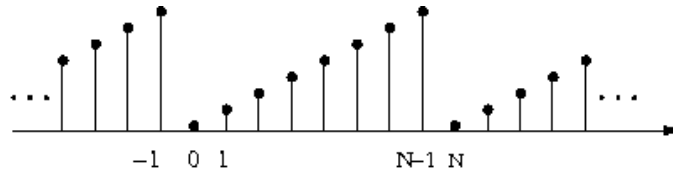
**Remarque 2.5 (Formule de Plancherel discrète).** On peut interpréter ce résultat en considérant l'espace des signaux de période  $N$ , dont la famille

$$\{e_k[n] = e^{2i\pi kn/N}\}_{0 \leq k < N}$$

est une base orthogonale. On montre alors que l'orthogonalité de cette base implique une version discrète de la formule de Plancherel :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}[k]|^2.$$

**Remarque 2.6 (Discontinuités).** Même si la définition de la transformée de Fourier discrète ne fait intervenir que les valeurs de  $f$  échantillonnées aux points  $0, \dots, N-1$ , il faut toujours garder à l'esprit qu'elle se définit comme la série de Fourier de la fonction  $\tilde{f}$  périodisée à partir des  $f[n], n = 0, \dots, N-1$ . Ceci a une importance considérable lorsqu'on s'intéresse à des propriétés de régularité de la fonction  $f$ , car, comme le montre la Figure 2.3, la périodisation peut introduire artificiellement des discontinuités.



**Fig. 2.3.** Apparition de discontinuités lors de la périodisation de l'échantillonnage (voir Remarque 2.6).

## 2.6 Transformée de Fourier rapide

### 2.6.1 Présentation générale de la méthode

Le calcul direct de la transformée de Fourier discrète par la formule (2.12) nécessite *a priori*, si les exponentielles complexes sont stockées à l'avance,  $N^2$  multiplications complexes, et  $N(N-1)$  additions complexes, soit une complexité en  $O(N^2)$ .

Il existe cependant des techniques pour réduire ce coût de calcul, et calculer la transformée de Fourier discrète en  $O(N \log_2 N)$  opérations, par une simple réorganisation des calculs. On parle ainsi d'algorithmes de transformée de Fourier rapide (FFT, pour "Fast Fourier Transform"). Il en existe plusieurs, le plus connu étant celui de Cooley et Tuckey [2], qui s'applique lorsque le nombre de points échantillonnés est une puissance de 2 (voir [4, Section III.B] pour d'autres références). La puissance de cet algorithme en fait un outil numérique incontournable (voir par exemple [4, Section III.B.7] pour une liste d'applications, en traitement du signal et résolution des équations aux dérivées partielles).

Le principe de la méthode est de réaliser le calcul du coefficient  $\hat{f}[k]$  défini en (2.12) en regroupant les termes  $n$  et  $n + N/2$ . On obtient deux formules distinctes, selon que  $k$  soit un entier pair ou impair :

$$\hat{f}[2k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} (f[n] + f[n + N/2]) \exp\left(-\frac{2i\pi kn}{N/2}\right), \quad (2.14)$$

$$\hat{f}[2k + 1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} \exp\left(-\frac{2i\pi n}{N}\right) (f[n] - f[n + N/2]) \exp\left(-\frac{2i\pi kn}{N/2}\right). \quad (2.15)$$

Comme le montrent les expressions (2.14) et (2.15), les fréquences paires et impaires s'obtiennent respectivement par transformée de Fourier discrète des signaux  $N/2$ -périodiques

$$f[n] + f[n + N/2]$$

et

$$(f[n] - f[n + N/2]) \exp\left(-\frac{2i\pi n}{N}\right).$$

Une transformée de Fourier discrète de taille  $N$  peut donc se calculer à partir de deux transformées de Fourier discrètes de taille  $N/2$ .

### 2.6.2 Calcul de complexité

**Exercice 2.18.** *Montrer que la complexité globale de l'algorithme est  $O(N \log_2 N)$ .*



Introduction à la théorie spectrale



---

## Introduction à la théorie spectrale

---

<b>3.1 Opérateurs linéaires</b> .....	<b>31</b>
3.1.1 Définition .....	31
3.1.2 Opérateurs bornés .....	32
3.1.3 Inverse d'un opérateur .....	33
3.1.4 Adjoint d'un opérateur .....	35
<b>3.2 Théorie spectrale des opérateurs bornés</b> .....	<b>37</b>
3.2.1 Théorie générale .....	37
3.2.2 Cas des opérateurs bornés autoadjoints .....	41
3.2.3 Quelques éléments sur la théorie spectrale des opérateurs non bornés .	42
3.2.4 Invariance par transformation unitaire .....	42
<b>3.3 Opérateurs compacts</b> .....	<b>43</b>
3.3.1 Rappels et compléments .....	43
3.3.2 Définition et premières propriétés des opérateurs compacts .....	44
3.3.3 Le théorème de Rellich .....	46
3.3.4 Théorie spectrale des opérateurs compact autoadjoints .....	47
3.3.5 Opérateurs à résolvante compacte .....	49
<b>3.4 Applications</b> .....	<b>50</b>
3.4.1 Equation de la chaleur et équation des ondes .....	50
3.4.2 Equation de Schrödinger .....	52
3.4.3 Equation de Fokker-Planck .....	54

---

Nous présentons dans ce chapitre les fondements de la théorie spectrale des opérateurs (définis en Section 3.1). Cette théorie est particulièrement utile et importante dans l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, un des buts premiers de l'étude d'un opérateur est la détermination de son spectre (Section 3.2), qui est la généralisation en dimension infinie de l'ensemble des valeurs propres d'une matrice. Dans les cas les plus agréables, notamment pour les opérateurs dits compacts (Section 3.3) on peut déterminer de manière qualitative le spectre d'un opérateur, et ensuite l'approcher numériquement. Ceci permet de résoudre complètement des problèmes d'évolution en mécanique, physique, etc, comme l'équation de la chaleur, l'équation des ondes, ou l'équation de Schrödinger (voir Section 3.4).

### 3.1 Opérateurs linéaires

#### 3.1.1 Définition

Soient  $E, F$  deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire est une application linéaire  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ , *i.e.*

$$\forall(x, y) \in D(A)^2, \quad A(x + y) = Ax + Ay, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

On a bien sûr  $A(0) = 0$ . Le domaine de l'opérateur est l'ensemble des éléments de  $E$  pour lesquels  $Ax$  a un sens en tant qu'élément de  $F$  :

$$D(A) = \left\{ x \in E \mid Ax \in F \right\}.$$

On dit qu'un opérateur  $A$  est borné si

$$\|A\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{|x| \leq 1} \|Ax\|_F < +\infty. \quad (3.1)$$

**Exercice 3.1 (Laplacien).** Si  $E = F = L^2(\mathbb{R}^d)$ , on peut définir l'opérateur  $A = -\Delta$  de domaine  $D(A) = H^2(\mathbb{R}^d)$  (On pourrait toutefois considérer un opérateur de domaine plus petit, par exemple restreint aux fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  à support compact). Montrer que  $-\Delta$  n'est pas un opérateur borné de  $E$  dans  $E$ . On pourra considérer la suite  $f_n(x) = n^{d/2}\chi(nx)$  avec  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ .

On verra par la suite qu'il est important de définir à la fois l'action de l'opérateur (appliquer  $-\Delta$  ici) et son domaine (sur quel ensemble de fonctions il agit). Deux opérateurs ayant la même action sont a priori différents si leurs domaines sont différents. On ne peut pas toujours comparer les domaines de deux opérateurs en terme d'inclusion, mais lorsque cela est possible, on parle d'extension.

**Définition 3.1 (Extension d'un opérateur).** On dit qu'un opérateur  $A_2$  est une extension de l'opérateur  $A_1$ , et on note  $A_1 \subset A_2$  si  $D(A_1) \subset D(A_2)$  et  $A_1x = A_2x$  pour tout  $x \in D(A_1)$ .

On supposera toujours dans ce cours que le domaine  $D(A)$  est dense dans  $E$ , i.e. que tout élément  $x \in E$  peut être approché par une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $D(A)$  tels que  $\|x - x_n\|_E \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

### 3.1.2 Opérateurs bornés

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace vectoriel des opérateurs bornés. En général, les opérateurs ne sont pas bornés, comme le montre l'Exemple 3.1.

**Exercice 3.2.** Montrer que  $\|\cdot\|$  définie par (3.1) est une norme.

**Exercice 3.3.** Soient  $E, F, G$  trois espaces de Banach, et  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $B \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que  $BA \in \mathcal{L}(E, G)$  et  $\|BA\| \leq \|A\|\|B\|$ .

**Remarque 3.1 (Extension d'un opérateur borné).** Notons que si  $D(A)$  est dense dans  $E$  et

$$\sup_{x \in D(A) \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} < +\infty,$$

alors on peut étendre de manière unique l'opérateur  $A$  de domaine  $D(A)$  à un opérateur borné sur tout l'espace  $E$ . Il suffit pour cela que  $F$  soit un espace de Banach,  $E$  étant un espace vectoriel normé.

**Lemme 3.1.** Un opérateur  $A$  est borné si et seulement si il est continu.

**Exercice 3.4.** Montrer ce résultat.

**Exercice 3.5 (Opérateurs de shift).** On considère  $E = F = l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  (pour  $1 \leq p \leq +\infty$ ), où

$$l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

et

$$l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < +\infty \right\}.$$

On définit les opérateurs (bornés) de shift à droite et de shift à gauche, de domaine  $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ , par

$$\tau_d(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

et

$$\tau_g(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots).$$

Vérifier que  $\|\tau_d\| = \|\tau_g\| = 1$ .

**Exercice 3.6 (Opérateur de convolution).** Soit  $E = F = L^2(\mathbb{R}^d)$  et  $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Montrer que l'opérateur  $T : E \rightarrow E$  d'action  $Tf = k \star f$  est bien défini et est borné avec  $\|T\| \leq \|k\|_{L^1}$ .

**Exercice 3.7 (Opérateur intégral).** On considère  $E = L^1([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $F = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ , et  $k \in C^0([0, 1]^2, \mathbb{R})$ . On rappelle que la norme sur l'espace de Banach  $F$  est  $\|g\|_F = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$ . On considère l'opérateur  $K$  défini par

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy.$$

Vérifier que  $Kf \in F$  lorsque  $f \in E$  puis que  $K \in \mathcal{L}(E, F)$ .

**Exercice 3.8 (Opérateur de multiplication).** Soit  $E = F = L^2(\mathbb{R}^d)$  et  $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  donnée. Montrer que l'opérateur  $A$  (de domaine  $D(A) = L^2(\mathbb{R}^d)$ ) défini par

$$A\phi = V\phi$$

est borné. Montrer que  $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |V(x)|$  si  $V$  est continue.

**Remarque 3.2.** Pour une fonction mesurable  $V$  qui n'est pas bornée, il faudrait restreindre le domaine de l'opérateur ci-dessus aux fonctions  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  telles que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |V\phi|^2 < +\infty.$$

Il n'est toutefois pas clair que l'on obtiendrait ainsi un sous-ensemble dense de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . C'est toutefois le cas si  $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  car  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset D(A)$  dans ce cas, et  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Concluons cette section par un résultat important.

**Proposition 3.1.** Si  $F$  est un espace de Banach et  $E$  un espace normé, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace de Banach.

**Exercice 3.9.** Montrer ce résultat. Pour ce faire, on introduira une suite de Cauchy  $(A_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathcal{L}(E, F)$  pour la norme donnée par (3.1). Un opérateur limite possible  $A$  est construit en prenant la limite point par point des suites  $(A_n x)$  pour tout  $x \in E$ . Il faut toutefois montrer que l'opérateur ainsi obtenu est bien dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , et que  $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ .

### 3.1.3 Inverse d'un opérateur

Pour un opérateur  $A$  de domaine  $D(A)$ , on définit son image

$$\text{Ran}(A) = A(D(A)) = \left\{ y \in F \mid \exists x \in D(A), y = Ax \right\},$$

et son noyau

$$\text{Ker}(A) = \left\{ x \in D(A) \mid Ax = 0 \right\}.$$

On dit que  $A$  est injectif si  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ , et que  $A$  est surjectif si  $\text{Ran}(A) = F$ . L'opérateur est bijectif s'il est à la fois injectif et surjectif.

**Exercice 3.10.** *Etudier l'injectivité et la surjectivité des opérateurs de shift.*

Si  $A$  est injectif, on peut définir l'opérateur inverse, de domaine  $D(A^{-1}) = \text{Ran}(A) \subset F$ , à valeurs dans  $D(A) \subset E$ , par

$$x = A^{-1}y \iff y = Ax.$$

Il n'y a aucune raison *a priori* que l'inverse soit borné. Ceci motive la définition suivante.

**Définition 3.2 (Opérateur inversible).** *On dit qu'un opérateur  $A$  de domaine  $D(A)$  est inversible si  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  est bijectif et a un inverse  $A^{-1} : F \rightarrow D(A) \subset E$  borné (comme opérateur de  $F$  dans  $E$ ).*

Enonçons une propriété qui nous sera utile par la suite, et qui permet de conclure à l'inversibilité d'un opérateur linéaire *borné* dès qu'il est bijectif (la preuve, omise, repose sur le lemme de Baire, voir par exemple [7]).

**Proposition 3.2.** *Si  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $A$  est une bijection de  $E$  vers  $F$ , alors  $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .*

**Exercice 3.11.** *On considère  $H = L^2(\mathbb{R}^d)$  et l'opérateur  $T$  de domaine  $D(T) = H^2(\mathbb{R}^d)$  défini par  $Tf = -\Delta f$ . Montrer que l'opérateur  $(1 + T)^{-1}$  est bien défini comme un opérateur de  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$  et qu'en fait  $(1 + T)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d), H^2(\mathbb{R}^d))$  (on pourra résoudre l'équation  $u - \Delta u = f$  pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ).*

**Exercice 3.12 (De l'importance du domaine).** *Considérons l'espace de Banach des fonctions continues  $E = F = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de la norme*

$$\|f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

*On peut définir un opérateur  $A_M$  de domaine "maximal"  $D(A_M) = C^1([0, 1], \mathbb{R})$  par*

$$A_M f = \frac{df}{dt}.$$

*On peut également en définir plusieurs restrictions, qui ont la même action de dérivation, mais ont des domaines plus petits, en fonction des conditions de bord que l'on souhaite imposer (ou qui sont imposées par la physique du problème) :*

- l'opérateur  $A_k$  (pour  $k \in \mathbb{R}$ ), de domaine  $D(A_k) = \left\{ f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = kf(1) \right\}$ , avec

$$D(A_0) = \left\{ f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}, \quad D(A_\infty) = \left\{ f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(1) = 0 \right\};$$

- l'opérateur  $A_{00}$  de domaine  $D(A_{00}) = \left\{ f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0 \right\}$ ;
- l'opérateur  $A_m$  de domaine "minimal"  $D(A_m) = \mathcal{D}(]0, 1[, \mathbb{R})$ .

*On a bien sûr  $A_m \subset A_{00} \subset A_k \subset A_M$  pour tout  $k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Ces différents opérateurs, bien qu'ayant la même action, ont des comportements très différents en ce qui concerne leur injectivité ou leur surjectivité. Ainsi,*

- montrer que  $A_M$  n'est pas injectif;
- montrer que  $A_k$  est inversible si et seulement si  $k \neq 1$ , auquel cas

$$A_k^{-1} f : t \mapsto \frac{1}{1-k} \left( \int_0^t f + k \int_t^1 f \right).$$

*On vérifie en particulier que  $A_k^{-1} f(0) = k A_k^{-1} f(1)$ ;*

- montrer que  $A_{00}$  est inversible si on remplace  $F$  par le sous-ensemble  $\text{Ran}(A_{00}) = D(A_{00}^{-1}) = \left\{ f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f = 0 \right\}$  avec  $A_{00}^{-1} f : t \mapsto \int_0^t f$  (et en particulier  $A_{00}^{-1} f \in D(A_{00})$ );
- finalement,  $A_m$  n'est inversible que si on restreint l'ensemble d'arrivée à  $\mathcal{D}(]0, 1[, \mathbb{R}) \cap D(A_{00}^{-1})$ .

### 3.1.4 Adjoint d'un opérateur

Pour définir les opérateurs adjoints, on se place sur un espace de Hilbert  $H$ , et on considère des opérateurs  $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ .

#### Adjoint d'un opérateur borné

**Définition 3.3 (Adjoint d'un opérateur borné).** Soit  $H$  un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire (complexe) noté  $(\cdot, \cdot)$ , et  $T \in \mathcal{L}(H)$ . L'adjoint de  $T$  est l'opérateur  $T^*$  défini par

$$\forall (u, v) \in H \times H, \quad (Tu, v) = (u, T^*v).$$

On dit que  $T$  est auto-adjoint si  $T^* = T$ .

**Exercice 3.13.** Vérifier que l'adjoint sur  $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  de l'opérateur  $\tau_d$  de shift à droite est  $\tau_g$ , l'opérateur de shift à gauche (et réciproquement).

**Exercice 3.14.** Vérifier que l'opérateur  $T : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$  qui est tel que  $Tf(x) = V(x)f(x)$  avec  $V \in L^\infty([a, b], \mathbb{R})$  est autoadjoint.

**Exercice 3.15 (Opérateurs de Hilbert-Schmidt).** On considère un opérateur intégral  $\widehat{K} : H \rightarrow H$  avec  $H = L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  et

$$\widehat{K}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y)f(y) dy$$

pour une fonction  $K \in L^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C})$  appelée noyau. Montrer que  $\widehat{K} \in \mathcal{L}(H)$  et que

$$\|\widehat{K}\| \leq \|K\|_{L^2} = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |K(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Montrer également que  $\widehat{K}^*$  est un opérateur intégral de noyau  $\overline{K(y, x)}$ .

Voici quelques propriétés de l'adjoint d'un opérateur borné (voir [5, Section 4.2]).

**Proposition 3.3.** Si  $T \in \mathcal{L}(H)$  alors  $T^* \in \mathcal{L}(H)$ ,  $\|T^*\| = \|T\|$  et  $T^{**} = T$ . Si  $T_1, T_2 \in \mathcal{H}$ , alors  $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$ .

**Exercice 3.16.** Montrer ce résultat.

#### Adjoint d'un opérateur non borné

La définition de l'opérateur adjoint est un peu plus délicate pour des opérateurs non-bornés, et nécessite quelques concepts supplémentaires.

**Définition 3.4.** Soient  $E, F$  deux espaces de Banach. Un opérateur  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  est fermé si pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de  $D(T)$  telle qu'il existe  $u \in E$  et  $v \in F$  avec

$$\|u_n - u\|_E \rightarrow 0, \quad \|Tu_n - v\|_F \rightarrow 0,$$

on a  $u \in D(T)$  et  $v = Tu$ .

**Exercice 3.17.** Considérons  $E = F = L^2(\mathbb{R}^d)$  et  $T = -\Delta$  de domaine  $D(T) = H^2(\mathbb{R}^d)$ . Montrer que  $T$  est fermé.

**Exercice 3.18.** *En revanche, si le domaine est mal choisi (trop petit), il est possible qu'un opérateur ne soit pas fermé. Par exemple, pour  $E = F = L^2([0, 1])$ , l'opérateur de dérivation de domaine  $D(T) = C^1([0, 1])$  défini par  $Tu = u'$  n'est pas fermé. Prouver cette affirmation en considérant la suite*

$$u_n(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

**Exercice 3.19.** *Soit  $T$  un opérateur non-borné fermé, de domaine dense. Montrer que si  $A$  est un opérateur borné sur  $H$  alors  $T + A$  est fermé.*

**Définition 3.5.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ . L'adjoint de  $T$  est l'opérateur fermé défini sur le domaine*

$$\begin{aligned} D(T^*) &= \left\{ u \in H \mid \text{il existe } C_u < +\infty \text{ tel que } \forall w \in D(T), |(Tw, u)| \leq C_u |w|_H \right\} \\ &= \left\{ u \in H \mid \text{il existe } v \in H \text{ tel que } \forall w \in D(T), (Tw, u) = (w, v) \right\} \end{aligned}$$

par  $T^*u = v$ .

Notons que  $(Tv, u) = (v, T^*u)$  pour tout  $(u, v) \in D(T^*) \times D(T)$ . La preuve de l'équivalence entre les deux définitions ci-dessus est une conséquence du théorème de Riesz et de la densité de  $D(T)$  dans  $H$  (ce qui permet d'établir l'unicité de la représentation).

**Exercice 3.20.** *Vérifier que  $T^*$  est fermé.*

Enonçons à présent quelques propriétés de l'adjoint d'un opérateur (voir [5, Section 4.2]).

**Proposition 3.4.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T : D(T) \subset H \rightarrow H$  un opérateur fermé. Alors  $D(T^*)$  est dense dans  $H$  et  $T^{**} = T$ .*

La notion d'opérateur auto-adjoint est également un peu plus subtile que pour les opérateurs bornés.

**Définition 3.6.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Un opérateur  $T : D(T) \subset H \rightarrow H$  est symétrique si  $T^*$  est une extension de  $T$ , c'est-à-dire  $D(T) \subset D(T^*)$  et  $T^*u = Tu$  pour tout  $u \in D(T)$  (i.e. pour tout  $(u, v) \in D(T)^2$ , on a  $(Tv, u) = (v, Tu)$ ).*

*L'opérateur  $T$  est autoadjoint si  $T^* = T$ , c'est-à-dire que  $T$  est symétrique et  $D(T^*) = D(T)$ .*

Notons donc que le caractère auto-adjoint d'un opérateur dépend fortement des domaines qui sont choisis, comme l'illustre l'exercice suivant (tiré de [8, Section X.1]).

**Exercice 3.21 (Extensions auto-adjointes).** *On considère l'opérateur  $T$  sur  $H = L^2([0, 1], \mathbb{C})$  de domaine*

$$D(T) = \left\{ f \in H^1([0, 1], \mathbb{C}) \mid f(0) = f(1) = 0 \right\},$$

défini par  $Tf = if'$ . Montrer que  $T$  est symétrique, et que  $D(T^*) = H^1([0, 1], \mathbb{C})$ . Ceci montre que  $T$  n'est pas autoadjoint. La raison est que les conditions de bord sont si fortes dans  $D(T)$  qu'il n'y en a pas besoin dans  $D(T^*)$ . Il faut donc étendre le domaine de  $D(T)$  de telle manière à ce que  $D(T) = D(T^*)$ . Considérons à cette fin la famille d'opérateurs  $A_\alpha$  de domaines

$$D(A_\alpha) = \left\{ f \in H^1([0, 1], \mathbb{C}) \mid f(0) = \alpha f(1) \right\}$$

pour  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $|\alpha| = 1$ , d'action  $A_\alpha f = if'$ . Montrer que  $A_\alpha$  est une extension de  $T$ , et que  $A_\alpha$  est autoadjoint (en fait, on pourrait même montrer que toute extension auto-adjointe de  $T$  est de la forme  $A_\alpha$  pour un certain  $|\alpha| = 1$ ).



### 3.2 Théorie spectrale des opérateurs bornés

On va à présent étudier de plus près l'inversibilité d'opérateurs bornés d'un espace de Banach  $E$  dans lui-même. De telles considérations sont particulièrement intéressantes lorsqu'il s'agit de résoudre une équation du type

$$(\lambda \text{Id} - A)u = f$$

avec  $u, f \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . En effet, si l'inverse de l'opérateur  $\lambda \text{Id} - A$  est bien défini, alors  $u = (\lambda \text{Id} - A)^{-1}f$  est l'unique solution de cette équation.

#### 3.2.1 Théorie générale

On peut définir aisément l'inverse d'un opérateur  $\text{Id} - A$  lorsque  $A$  est de norme suffisamment petite par le biais d'une série infinie. Plus précisément, la notion pertinente est le rayon spectral.

**Lemme 3.2 (Rayon spectral).** *Soit  $A \in \mathcal{L}(E)$ . Alors la limite suivante existe :*

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{1/n},$$

et est appelée rayon spectral. On a en particulier  $r(A) \leq \|A\|$ .

On peut avoir  $r(A) < \|A\|$ . Le cas le plus frappant est celui des opérateurs *nilpotents*, c'est-à-dire tels qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $A^N = 0$ . Dans ce cas en effet,  $r(A) = 0$ . Par exemple, l'opérateur borné sur  $E = \mathbb{R}^2$  dont la représentation matricielle dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est tel que  $\|A\| = 1$  mais  $A^2 = 0$  et donc  $r(A) = 0$ .

*Preuve.* On suit la preuve de [6, Section I.4.2]. Pour  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a clairement

$$\|A^{n+m}\| \leq \|A^n\| \|A^m\|, \quad \|A^n\| \leq \|A\|^n, \tag{3.2}$$

avec la convention  $A^0 = \text{Id}$ . Ces inégalités proviennent de l'inégalité générale  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  pour  $A, B \in \mathcal{L}(E)$  (voir Exercice 3.3). Notons

$$a_n = \ln \|A^n\|.$$

Alors  $a_n/n \leq \ln \|A\|$ . Il s'agit de montrer que la suite  $(a_n/n)_{n \geq 0}$  converge.

Les inégalités (3.2) montrent que  $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ . Pour  $m \in \mathbb{N}^*$  donné, considérons  $n = qm + r$  avec  $q, r \in \mathbb{N}$  et  $r < m$ . Alors,  $a_n \leq qa_m + a_r$  et ainsi

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q}{n} a_m + \frac{1}{n} a_r.$$

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,  $q/n \rightarrow 1/m$  alors que les valeurs de  $r$  sont limitées à  $0, \dots, m - 1$ . Ainsi,

$$\sup_{r=0, \dots, m-1} \frac{1}{n} a_r \longrightarrow 0$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , et donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}.$$

Comme  $m$  est arbitraire, on en déduit que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{m \geq 1} \frac{a_m}{m}.$$

Par ailleurs, on a trivialement

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \geq \inf_{m \geq 1} \frac{a_m}{m},$$

et on en déduit donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{m \geq 1} \frac{a_m}{m} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Les inégalités ci-dessus sont finalement des égalités, ce qui montre que la suite  $(a_n/n)_{n \geq 0}$  est bien convergente.  $\square$

**Exercice 3.22.** *Montrer que  $r(\tau_g) = r(\tau_d) = 1$ .*

On peut à présent définir l'inverse de l'opérateur  $\text{Id} - A$  lorsque  $A$  a un rayon spectral strictement plus petit que 1.

**Lemme 3.3 (Série de Neumann).** *Soit  $A \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $r(A) < 1$ . Alors l'opérateur  $\text{Id} - A$  a un inverse borné  $(\text{Id} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$  et*

$$(\text{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n. \quad (3.3)$$

*Preuve.* Le théorème de Cauchy-Hadamard,<sup>1</sup> l'hypothèse  $r(A) < 1$  et la définition de  $r(A)$  montrent que la série du membre de droite de (3.3) converge en norme dans  $\mathcal{L}(E)$ . En effet,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \|A^n\|$$

converge pour  $|z| \leq r(A)^{-1}$  et donc pour  $z = 1$ . On montre ensuite facilement que  $(\text{Id} - A) \sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \text{Id}$  en passant à la limite dans l'égalité  $(\text{Id} - A) \sum_{n=1}^N A^n = \text{Id} - A^{N+1}$  (utiliser  $\|A^N\|^{1/N} \rightarrow r(A) < 1$  et donc  $\|A^N\| \leq (1 - \varepsilon)^N$  pour  $N \geq N_\varepsilon$ ). Ceci donne le résultat escompté.  $\square$

**Définition-Théorème 3.1.** *Soit  $E$  un espace de Banach et  $T \in \mathcal{L}(E)$ .*

(1) *On appelle ensemble résolvant de  $T$  l'ensemble*

$$\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda - T \text{ inversible} \right\}.$$

*L'ensemble résolvant  $\rho(T)$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ .*

(2) *Pour  $\lambda \in \rho(T)$ , on note  $R(\lambda) = (\lambda - T)^{-1}$ . La famille d'opérateurs linéaires bornés  $(R(\lambda))_{\lambda \in \rho(T)}$  est appelée la résolvente de  $T$ . La fonction  $\lambda \mapsto R(\lambda)$  est analytique de  $\rho(T)$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et on a, pour tout  $(\lambda, \mu) \in \rho(T) \times \rho(T)$ , l'identité de la résolvente*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu).$$

(3) *On appelle spectre de  $T$  l'ensemble*

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda - T \text{ non inversible} \right\}.$$

*L'ensemble  $\sigma(T)$  est un compact de  $\mathbb{C}$ .*

(4) *On a  $\sigma(T) \subset \overline{D(0, r(T))}$  (disque centré en 0, de rayon  $r(T)$ ) et  $\sigma(T) \cap C(0, r(T)) \neq \emptyset$  (cercle de centre 0, de rayon  $r(T)$ ). En particulier le spectre d'un opérateur borné n'est jamais vide.*

1. Ce résultat dit que le rayon de convergence  $R$  de la série  $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  est  $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}}$ .

(5) L'ensemble  $\sigma(T)$  se décompose en l'union disjointe

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T),$$

avec

$$\sigma_p(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda - T \text{ non injectif} \right\},$$

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda - T \text{ injectif et } \overline{(\lambda - T)E} \neq E \right\},$$

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda - T \text{ injectif et } (\lambda - T)E \neq \overline{(\lambda - T)E} = E \right\}.$$

L'ensemble  $\sigma_p(T)$  est appelé le spectre ponctuel de  $T$ ,  $\sigma_c(T)$  le spectre continu de  $T$ ,  $\sigma_r(T)$  le spectre résiduel de  $T$ .

Notons que les trois types de spectre définis ci-dessus ont été classés par ordre croissant de défaut d'inversibilité : pour le spectre ponctuel, on a un défaut d'injectivité ; pour le spectre résiduel, on a un défaut majeur de surjectivité (même en prenant l'adhérence de l'image de  $E$  on ne retrouve pas  $E$ ) ; pour le spectre continu, l'inverse est bien défini sur un domaine dense, mais n'est pas borné.

**Remarque 3.3.** Notons que  $\sigma_p(T)$  est l'ensemble des valeurs propres de  $T$ , i.e. l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels qu'il existe  $u \in E \setminus \{0\}$  tel que

$$Tu = \lambda u.$$

En dimension finie, un opérateur linéaire injectif est bijectif. Ainsi,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T)$$

est simplement l'ensemble des valeurs propres de  $T$  dans ce cas.

**Remarque 3.4 (Autre décomposition du spectre).** Dans certains cas, il est plus commode de décomposer  $\sigma(T)$  sous la forme  $\sigma(T) = \sigma_d(T) \cup \sigma_{\text{ess}}(T)$ , où  $\sigma_d(T) \subset \sigma_p(T)$  est le spectre discret, qui est composé des valeurs propres isolées de multiplicité finie :

$$\sigma_d(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < \dim(\text{Ker}(\lambda - T)) < +\infty, \exists \varepsilon > 0, \quad ]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[ \cap \sigma(T) = \{\lambda\} \right\}.$$

Avant de faire la preuve d'un certain nombre d'assertions du Théorème 3.1, donnons quelques exemples de spectre résiduel et continu, afin de donner un début d'intuition sur ces notions.

**Exercice 3.23 (Spectre résiduel).** On considère l'opérateur de shift à droite  $\tau_d$  dans  $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ . Vérifier que  $\sigma_p(\tau_d) = \emptyset$  et  $\lambda - \tau_d$  est injectif pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Montrer pour commencer que  $0 \in \sigma_r(\tau_d)$ . On pourra considérer  $\langle \tau_d y, (1, 0, 0, \dots) \rangle_{l^2}$  pour tout  $y \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ . Montrer par un raisonnement analogue que  $\{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\} \subset \sigma_r(\tau_d)$  en considérant  $x_\lambda = (1, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \dots)$ .

**Exercice 3.24 (Spectre continu).** Soit  $a < b$  deux réels,  $E = L^2([a, b], \mathbb{C})$  et  $T \in \mathcal{L}(E)$  défini par

$$Tf(x) = x f(x).$$

Montrer que  $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [a, b]$ . Procéder pour ce faire en deux étapes :

(1) Tout d'abord montrer que  $\sigma(T) \subset [a, b]$ , puis que  $\sigma(T) = [a, b]$  (en supposant qu'il existe  $\lambda \in [a, b]$  tel que  $\lambda - T$  soit inversible, et en considérant  $\phi \in C^\infty([a, b], \mathbb{C})$  valant 1 au voisinage de  $\lambda$ ).

(2) Dans un second temps, montrer que  $\sigma(T) = \sigma_c(T)$ . en établissant d'abord que  $\sigma_p(T) = \emptyset$ , puis en prouvant que  $\overline{\text{Ran}(\lambda - T)} = E$  pour tout  $\lambda \in [a, b]$ . Pour ce dernier point, pour  $f \in E$  donnée, considérer la suite  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  de  $E$  définie par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\lambda - x} & \text{si } |x - \lambda| \geq \frac{1}{n} \text{ et } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 3.25.** Le schéma de preuve ci-dessus montre qu'on peut en fait étendre l'argument à des opérateurs plus généraux, définis sur  $E = L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ , de domaine

$$D(T) = \left\{ f \in E \mid \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |V(x)|^2) |f(x)|^2 dx < +\infty \right\},$$

pour  $V \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et d'action

$$Tf(x) = V(x) f(x).$$

Ainsi, pour une fonction  $V$  continue, on montrera que  $\sigma(T) = [\min V, \max V]$ , et que  $\sigma(T) = \sigma_c(T)$  si  $V^{-1}(\{\lambda\})$  est un ensemble au plus dénombrable sans point d'accumulation pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Notons en revanche que si on considère une fonction  $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ , valant  $c \in \mathbb{R}$  dans un voisinage  $] - \eta, \eta[$  de l'origine, alors  $c \in \sigma_p(T)$ .

*Preuve (Théorème 3.1).* Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , tel que  $|\lambda| > r(T)$ . En utilisant le théorème de Cauchy-Hadamard, on voit que la série

$$S = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}$$

est absolument convergente donc convergente dans le Banach  $\mathcal{L}(E)$ . De plus

$$(\lambda - T)S = S(\lambda - T) = I.$$

Donc  $\lambda \in \rho(T)$  et  $S = R(\lambda)$ . Il en découle que

$$\sigma(T) \subset \overline{D(0, r(T))}.$$

Soit maintenant  $\mu \in \rho(T)$ .

$$\lambda - T = \mu - T + (\lambda - \mu)I = (\mu - T) \left( I + (\lambda - \mu)(\mu - T)^{-1} \right)$$

est inversible si  $|\lambda - \mu| \|(\mu - T)^{-1}\| < 1$ . On en déduit

- que  $\rho(T)$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,
- que  $\sigma(T)$  est un compact de  $\mathbb{C}$ ,
- que  $R(\lambda)$  est analytique dans  $\rho(T)$ .

En multipliant les deux membres de l'égalité

$$(\lambda - T) = (\mu - T) + (\lambda - \mu)I$$

à gauche par  $R(\lambda)$  et à droite par  $R(\mu)$ , on obtient l'identité de la résolvante.

Supposons que  $\sigma(T) \cap C(0, r(T)) = \emptyset$ . Comme  $\sigma(T)$  est compact, il existe  $\varepsilon \in ]0, r(T)[$  tel que

$$\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r(T) - \varepsilon)} \subset \rho(T).$$

Comme  $R(\lambda)$  est analytique sur  $\rho(T)$ , il en résulte que  $f(z) = R(1/z)$  est analytique sur  $D(0, (r(T) - \varepsilon)^{-1})$ . Or, un calcul explicite montre que le développement en série entière de  $f(z)$  en 0 est donné par

$$f(z) = z \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n T^n.$$

En utilisant le critère de Cauchy-Hadamard, on voit que cette série est convergente seulement pour

$$|z| \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{1/n} < 1,$$

et donc  $|z| < r(T)^{-1}$ , ce qui est en contradiction avec l'analyticité de la fonction sur  $D(0, (r(T) - \varepsilon)^{-1})$ .  $\square$

### 3.2.2 Cas des opérateurs bornés autoadjoints

Les opérateurs bornés auto-adjoints ont des propriétés intéressantes, qui se traduisent sur leur spectre.

**Proposition 3.5.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Si  $T$  est auto-adjoint, on a*

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R}.$$

De plus  $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$  et l'une au moins des deux extrémités du segment est dans  $\sigma(T)$ . Enfin,  $\sigma_r(T) = \emptyset$  et les vecteurs propres associés à des éléments différents de  $\sigma_p(T)$  sont orthogonaux.

**Exercice 3.26.** *Prouver ce résultat. Pour cela, on établira successivement que*

- si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est tel que  $\alpha = |\text{Im}(\lambda)| \neq 0$ , alors  $\lambda - T$  est inversible. On montrera pour ce faire l'inégalité de coercivité

$$|((\lambda - T)x, x)| \geq \alpha \|x\|^2,$$

en montrant au préalable que  $(Tx, x) \in \mathbb{R}$  et on en déduira que  $\lambda - T$  est injectif. Montrer ensuite la surjectivité :  $V = \text{Ran}(\lambda - T) = H$ , en établissant tout d'abord que  $V$  est fermé dans  $H$  puis que  $V$  est dense (ce qui revient à  $V^\perp = \{0\}$ ).

- en déduire que  $\sigma(T) \subset [-r(T), r(T)]$  et que  $\sigma(T) \cap \{-r(T), r(T)\} \neq \emptyset$ .
- montrer ensuite que si  $T$  est auto-adjoint, alors  $r(T) = \|T\|$ . Pour ce faire noter que  $\|T^*T\| \leq \|T\| \|T^*\| = \|T\|^2$ , et montrer par ailleurs que  $\|T^*T\| \geq \|T\|^2$  en partant de  $\|T^*T\| \geq \sup_{\|x\|=1} |(x, T^*Tx)|$ . Ainsi,  $\|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$ . Etablir ensuite que  $\|T\|^n = \|T^n\|$  pour tout entier (en commençant par  $n = 2^p$ ). Conclure.
- pour montrer que  $\sigma_r(T) = \emptyset$  si  $T$  est auto-adjoint, considérer  $\lambda \in \sigma(T)$  tel que  $\text{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$  et montrer que  $\lambda \in \sigma_c(T)$ . Prouver au préalable que, de manière générale,

$$\text{Ran}(\lambda - T)^\perp = \text{Ker}(\bar{\lambda} - T^*). \tag{3.4}$$

car  $((\lambda - T)x, y) = (x, (\bar{\lambda} - T^*)y)$ .

- enfin, montrer l'assertion sur l'orthogonalité des vecteurs propres.

**Remarque 3.5 (Lien entre spectre d'un opérateur et de son adjoint).** *On peut montrer que si  $T : D(T) \subset H \rightarrow H$  est fermé, alors  $\sigma(T^*)$  est le complexe conjugué de  $\sigma(T)$  (voir [5, Section 4.2]).*

**Remarque 3.6 (Lien entre spectre résiduel d'un opérateur et spectre ponctuel de son adjoint).** *La relation (3.4) montre de manière générale que, pour un opérateur borné  $T \in \mathcal{L}(E)$ , si  $\lambda \in \sigma_r(T)$ , alors  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ . Bien sûr, dans le cas des opérateurs autoadjoints, on a  $T^* = T$  et donc  $\lambda \in \sigma_r(T) \cap \sigma_p(T) = \emptyset$  par définition des différentes parties du spectre. Ceci montre bien que  $\sigma_r(T) = \emptyset$  pour des opérateurs autoadjoints.*

*Par ailleurs, on peut montrer que si  $\lambda \in \sigma_p(T)$ , alors  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$ .*

**Exercice 3.27.** *Donner un exemple d'opérateur borné tel que  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$  lorsque  $\lambda \in \sigma_p(T)$ , et un exemple d'opérateur borné tel que  $\bar{\lambda} \in \sigma_r(T^*)$  lorsque  $\lambda \in \sigma_p(T)$ .*

### 3.2.3 Quelques éléments sur la théorie spectrale des opérateurs non bornés

Beaucoup de définitions et de résultats exposés dans les sections précédentes sont encore valables pour des opérateurs non bornés, à condition qu'ils soient *fermés*. Commençons par un résultat important pour définir le spectre d'un opérateur.

**Proposition 3.6.** *Soit  $E, F$  deux espaces de Banach et  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  un opérateur fermé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $T$  est injectif, d'inverse  $T^{-1} : \text{Ran}(T) \rightarrow D(T)$  borné ;
- (ii) il existe  $m > 0$  tel que  $\|Tu\|_F \geq m\|u\|_E$  pour tout  $u \in D(T)$  ;
- (iii)  $\text{Ran}(T)$  est fermé dans  $F$  et  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ .

Une preuve de cette proposition est disponible dans [4, Section VI.2.3.5], et repose sur le théorème du graphe fermé. On peut alors définir l'ensemble résolvant  $\rho(T)$  d'un opérateur  $T : E \rightarrow E$  fermé :

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \text{ inversible} \right\} \\ &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \text{ injectif et } \text{Ran}(\lambda - T) = E \right\}. \end{aligned}$$

Notons en effet que le point (iii) de la Proposition ci-dessus assure que  $(\lambda - T)^{-1}$  est borné dès que  $\text{Ran}(\lambda - T)$  est fermé dans  $E$ , ce qui montre l'équivalence entre les deux définitions.

Une fois le spectre défini, on peut à nouveau classer ses éléments en spectre ponctuel ( $\text{Ker}(\lambda - T) \neq \{0\}$ ), spectre résiduel ( $\text{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$  et  $\text{Ran}(\lambda - T) \neq E$ ), et spectre continu ( $\text{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$  et  $\text{Ran}(\lambda - T) = E$ , mais  $\text{Ran}(\lambda - T) \neq E$ ).

**Exercice 3.28 (Lien entre spectre et caractère fermé d'un opérateur).** *Soit  $T : D(T) \subset H \rightarrow H$  un opérateur non-borné de domaine dense. Montrer que s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda - T$  est inversible, alors  $T$  est fermé.*

### 3.2.4 Invariance par transformation unitaire

Dans certains cas, il est plus facile d'étudier le spectre d'un opérateur  $UTU^{-1}$  que le spectre de l'opérateur  $T$  directement. Les deux opérateurs ci-dessus ont le même spectre sous certaines conditions sur la transformation  $U$ .

**Définition 3.7.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Un opérateur  $U \in \mathcal{L}(H)$  est une isométrie si  $\|Ux\|_H = \|x\|_H$  pour tout  $x \in H$ , ou, de manière équivalente, si  $(Ux, Uy) = (x, y)$  pour tout  $(x, y) \in H^2$ .*

Notons qu'une isométrie est telle que  $U^*U = \text{Id}$ , et est également une application injective. Par exemple, l'opérateur de shift à droite est une isométrie. Cependant, une isométrie n'est pas nécessairement une bijection, ce qui motive la définition suivante.

**Définition 3.8.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Un opérateur  $U \in \mathcal{L}(H)$  est unitaire si  $U$  est une isométrie et  $\text{Ran}(U) = H$ .*

Un opérateur unitaire est donc borné, et injectif et surjectif donc bijectif. Ceci implique que  $U^{-1}$  existe et est borné, et donc un opérateur unitaire est inversible. On a par ailleurs  $U^{-1} = U^*$ .

**Exemple 3.1.** La transformée de Fourier est une transformation unitaire de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  si on la normalise correctement. En effet, définissons  $U : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  sur le sous-ensemble dense  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  par

$$Uf(k) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ik \cdot x} dx = \widehat{f}(k),$$

et étendons cette définition à tout l'espace  $L^2(\mathbb{R}^d)$  par densité. On vérifie facilement que  $U$  est borné, que  $U$  est une isométrie (c'est la formule de Parseval) et que  $U$  est surjectif. Donc  $U$  est unitaire.

**Exercice 3.29.** Montrer que, pour tout  $\eta > 0$ , l'opérateur  $U_\eta : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  tel que  $U_\eta f(x) = \eta^{d/2} f(\eta x)$  est une isométrie. Est-il unitaire ?

**Exercice 3.30.** Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$ , l'opérateur de translation  $\tau_a$  défini sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est unitaire.

**Proposition 3.7.** Soit  $H$  un espace de Hilbert,  $T$  un opérateur borné, ou non-borné fermé de domaine dense, et  $U$  un opérateur unitaire. On considère l'opérateur (fermé) de domaine dense

$$T_U = UTU^{-1} = UTU^*.$$

Alors  $\sigma(T_U) = \sigma(T)$ , et si  $T$  est autoadjoint,  $T_U$  l'est aussi.

La preuve de cette proposition est très simple, et repose sur le fait que si  $\lambda \in \rho(T)$ , alors  $(\lambda - T_U)^{-1} = U(\lambda - T)^{-1}U^{-1}$ , ce qui montre que  $\lambda \in \rho(T_U)$ . On montre de même l'implication contraire.

**Exercice 3.31 (Spectre de l'opérateur Laplacien sur  $\mathbb{R}^d$ ).** On considère l'opérateur  $T$  de domaine  $H^2(\mathbb{R}^d)$  sur l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^d)$  d'action  $-\Delta$ . Montrer que cet opérateur est unitairement équivalent, par une transformation unitaire  $U$  que l'on précisera, à l'opérateur  $T_U$  de domaine

$$D(T_U) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^4) |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

défini par  $T_U f(x) = |x|^2 f(x)$ . En déduire que  $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0, +\infty[$ .

Montrer ensuite que  $\sigma((1 + T)^{-1}) = \sigma_c((1 + T)^{-1}) = [0, 1]$  (on rappelle que cet opérateur est bien défini, voir Exercice 3.11).

## 3.3 Opérateurs compacts

### 3.3.1 Rappels et compléments

**Définition 3.9.** Soit  $E$  un espace de Banach et  $K \subset E$ . On dit que  $K$  est compact si de toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$ , on peut extraire une sous-suite  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge dans  $K$ .

**Proposition 3.8.** Soit  $E$  un espace de Banach. Tout compact de  $E$  est fermé et borné.

**Exercice 3.32.** Prouver ce résultat.

On rappelle que si  $E$  est de dimension finie, la réciproque est vraie : les fermés bornés sont compacts. On rappelle également le

**Théorème 3.1.** (Théorème de Riesz). Soit  $E$  un espace de Banach. La boule unité fermée  $\overline{B}_1 = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$  est compacte si et seulement si  $E$  est de dimension finie.

**Définition 3.10.** Soit  $E$  un espace de Banach et  $K \subset E$ . On dit que  $K$  est relativement compact si  $\overline{K}$  est compact.

Pour prouver qu'un sous-ensemble  $K$  d'un espace de Banach  $E$  est relativement compact, il suffira donc de prouver que de toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$  on peut extraire une sous-suite de Cauchy (i.e. une sous-suite qui converge dans  $E$ ).

### 3.3.2 Définition et premières propriétés des opérateurs compacts

**Définition 3.11.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $T$  un opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$ . On dit que l'opérateur  $T$  est compact si pour tout  $B \subset E$ ,

$$B \text{ borné dans } E \Rightarrow T(B) \text{ relativement compact dans } F.$$

On note  $\mathcal{K}(E, F)$  l'ensemble des opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$ .

Ainsi, un opérateur compact transforme à extraction près une suite bornée en une suite convergente.

**Proposition 3.9.** Tout opérateur linéaire compact est continu, i.e.  $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ .

**Exercice 3.33.** Prouver ce résultat (considérer l'image de la boule unité).

**Remarque 3.7 (Définition alternative).** Si  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $E, F$  sont deux espaces de Banach,  $E$  étant réflexif (on rappelle que cela signifie que  $E'' = (E')' = E$ ), une caractérisation alternative de la compacité est de dire que  $T$  transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente (à extraction près toutefois).

En effet, soit  $T$  un opérateur compact. On considère une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de  $E$  faiblement convergente, i.e. telle qu'il existe  $u \in E$  tel que, pour tout élément pour tout  $v \in E'$ ,

$$\langle u_n, v \rangle_{E, E'} \longrightarrow \langle u, v \rangle_{E, E'}.$$

Alors  $(u_n)_{n \geq 0}$  est bornée (voir par exemple [4, Section VI.5.3]). Par conséquent, comme  $T$  est un opérateur compact, on peut extraire une sous-suite telle que  $(Tu_{n_k})_{k \geq 0}$  converge fortement, vers une limite notée  $v$ . Par ailleurs,  $T$  étant continu,  $(Tu_n)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers  $Tu$ . L'unicité de la limite faible montre que  $v = Tu$ , et ainsi  $Tu_{n_k} \rightarrow Tu$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

Réciproquement, supposons que  $T$  est tel que, pour toute suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  convergeant faiblement, il existe une sous-suite extraite  $(Tv_{n_k})_{k \geq 0}$  convergeant fortement. Considérons alors une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  bornée dans  $E$ . Comme  $E$  est réflexif, le théorème de Kakutani (voir [1, Théorème III.16]) montre qu'il existe une sous-suite extraite  $(u_{n_k})_{k \geq 0}$  convergeant faiblement. Alors, il existe une sous suite extraite de la précédente, notée  $(\tilde{u}_m)_{m \geq 0}$ , qui converge fortement. Ceci montre que  $T$  est compact.

**Exercice 3.34.** Montrer que les opérateurs suivants sont compacts :

- l'identité de  $E$  est compacte si et seulement si  $E$  est de dimension finie ;
- si l'un des espaces  $E$  ou  $F$  est de dimension finie, alors tout opérateur linéaire continu de  $E$  dans  $F$  est compact,
- si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux opérateurs linéaires compacts de  $E$  dans  $F$ , alors  $T_1 + T_2$  est un opérateur compact ;
- la restriction d'un opérateur compact  $T \in \mathcal{K}(E, F)$  à un sous-espace vectoriel  $\tilde{E}$  de  $E$  est compacte.

**Exercice 3.35.** On considère l'opérateur de l'Exercice 3.7. Montrer que  $K \in \mathcal{K}(E, F)$  en admettant le résultat de compacité suivant, connu sous le nom de lemme d'Ascoli : si  $\mathcal{F}$  est un sous-ensemble borné de  $F = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  tel que la propriété d'équicontinuité suivante soit satisfaite : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|x - x'| \leq \delta \Rightarrow \forall u \in \mathcal{F}, |u(x) - u(x')| \leq \varepsilon,$$

alors  $\mathcal{F}$  est relativement compact dans  $F$ .

**Théorème 3.2.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. L'ensemble  $\mathcal{K}(E, F)$  est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$ .



*Preuve.* Il est facile de montrer que  $\mathcal{K}(E, F)$  est un espace vectoriel. De par la Proposition 3.9 on sait qu'il est inclus dans  $\mathcal{L}(E, F)$ . Il reste à prouver que c'est un sous-espace *fermé* de  $\mathcal{L}(E, F)$ . Considérons pour cela une suite d'opérateurs compacts  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  qui converge dans  $\mathcal{L}(E, F)$  vers un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  et montrons que  $T$  est compact. Soit donc  $B$  un borné de  $E$ ,  $R > 0$  un réel tel que  $B \subset \{x \in E, \|x\| \leq R\}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $T(B)$ ; il faut montrer que de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on peut extraire une sous-suite de Cauchy (ceci prouvera que  $T(B)$  est relativement compact et donc que  $T$  est compact).

Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $B$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(w_n) = u_n$ . On va extraire de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite de Cauchy en utilisant un procédé diagonal : posons  $w_n^0 = w_n$  et utilisons le caractère compact des opérateurs  $T_k$  pour construire par récurrence pour tout  $k \geq 1$  une sous-suite  $(w_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(w_n^{k-1})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $(T_k(w_n^k))_{n \in \mathbb{N}}$  soit de Cauchy. Définissons maintenant la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $v_n = w_n^n$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(v_n)_{n \geq k}$  est une sous-suite de  $(w_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ ; la suite  $(T_k(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc de Cauchy.

Posons  $\tilde{u}_n = T(v_n)$ . La suite  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\|T - T_k\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \frac{\varepsilon}{3R}.$$

Soit ensuite  $N \geq 0$  tel que  $\forall q > p \geq N$ ,

$$\|T_k(v_p) - T_k(v_q)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \forall q > p \geq N, \quad \|\tilde{u}_p - \tilde{u}_q\| &= \|T(v_p) - T(v_q)\|_F \\ &\leq \|T(v_p) - T_k(v_p)\|_F + \|T_k(v_p) - T_k(v_q)\|_F + \|T_k(v_q) - T(v_q)\|_F \\ &\leq \|T - T_k\|_{\mathcal{L}(E, F)} (\|v_p\|_E + \|v_q\|_E) + \|T_k(v_p) - T_k(v_q)\|_F \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc de Cauchy. Ceci conclut la preuve.  $\square$

Une des conséquences importantes de ce résultat est que si  $T$  est une limite d'une suite d'opérateurs  $(T_n)_{n \geq 0}$  de rang fini (*i.e.* tels que la dimension de  $\text{Ran}(T_n)$  est finie) :

$$\|T_n - T\| \longrightarrow 0,$$

où la norme est définie en (3.1), alors l'opérateur limite  $T$  est compact. En général, la réciproque est fautive : on ne peut pas approcher n'importe quel opérateur compact par une suite d'opérateurs de rang fini. C'est cependant le cas si on considère  $\mathcal{K}(E, F)$  lorsque  $F$  est un espace de Hilbert, voir [1, Section VI.1] ou la Remarque 3.9 pour le cas où  $E = F = H$  est un espace de Hilbert.

**Théorème 3.3.** *Soit  $E, F$  et  $G$  trois espaces de Banach.*

$$\begin{aligned} (S \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } T \in \mathcal{K}(F, G)) &\quad \Rightarrow \quad T \circ S \in \mathcal{K}(E, G) \\ (S \in \mathcal{K}(E, F) \text{ et } T \in \mathcal{L}(F, G)) &\quad \Rightarrow \quad T \circ S \in \mathcal{K}(E, G). \end{aligned}$$

**Exercice 3.36.** *Prouver ce résultat.*

On déduit immédiatement des deux théorèmes ci-dessus le

**Corollaire 3.1.** *Soit  $E$  un espace de Banach. L'ensemble des opérateurs linéaires compacts de  $E$  dans  $E$  noté  $\mathcal{K}(E)$  est un idéal bilatère fermé de  $\mathcal{L}(E)$ .*

Concluons enfin avec deux exercices d'application.

**Exercice 3.37 (Opérateurs de Hilbert-Schmidt).** *Montrer que l'opérateur  $\widehat{K}$  de l'Exercice 3.15 est compact. Pour ce faire, on considère une base orthonormale  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de l'espace de Hilbert  $H$ . Un élément  $f \in E$  peut s'écrire*

$$f = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle \phi_i, f \rangle_{L^2} \phi_i, \quad \sum_{i=0}^{+\infty} |\langle \phi_i, f \rangle_{L^2}|^2 < +\infty,$$

et donc  $\widehat{K}f = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle \phi_i, f \rangle_{L^2} \psi_i$  avec  $\psi_i = \widehat{K}\phi_i$ . Montrer que  $\sum_{i=0}^{+\infty} \|\psi_i\|_{L^2}^2 < +\infty$  (on pourra écrire que

$K(x, y) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} c_{n, m} \phi_n(x) \overline{\phi_m(y)}$ ). On définit ensuite, pour  $N \in \mathbb{N}$ , l'opérateur  $\widehat{K}_N : E \rightarrow E$  par

$$\widehat{K}_N f = \sum_{i=0}^N \langle \phi_i, f \rangle_{L^2} \psi_i.$$

Montrer que  $\|\widehat{K} - \widehat{K}_N\| \rightarrow 0$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$  et en déduire que  $\widehat{K}$  est compact.

**Exercice 3.38.** *On considère l'opérateur  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  défini par*

$$Tu(x) = V(x) \left( (1 - \Delta)^{-1} u \right) (x),$$

où  $V \in L^2(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}} n(x, y) u(y) dy$$

pour une fonction  $n \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  que l'on déterminera et en conclure que  $T$  est compact en utilisant le résultat de l'Exercice 3.37. Au préalable, on vérifiera que  $(1 - \Delta)^{-1} u = g \star u$  avec  $g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$  en calculant la transformée de Fourier suivante :  $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|x|} e^{ikx} dx$ .

### 3.3.3 Le théorème de Rellich

On va à présent énoncer un résultat de compacité important, qui est très utile dans l'étude d'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles.

**Théorème 3.4.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . L'injection canonique de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte.*

Un des intérêts de ce résultat est que, si on arrive à obtenir une borne a priori  $H^1(\Omega)$  sur une suite de fonctions approchant la solution d'une équation (par exemple, en montrant qu'une énergie est uniformément bornée), alors on peut extraire de cette suite une limite possible. Cette limite est alors un candidat naturel pour être une solution de l'équation de départ. Dans ce chapitre, ce résultat va nous permettre de montrer que les inverses de certains opérateurs sont compacts, ce qui permettra de décrire complètement de manière qualitative le spectre de l'opérateur en question.

**Exercice 3.39.** *Prouver ce résultat en procédant comme suit :*

- traiter le cas où  $\Omega = ]0, \pi[$ . En notant  $e_k(x) = \sqrt{2/\pi} \sin(kx)$  le  $k$ -ième mode de Fourier valant 0 au bord on peut caractériser les espaces  $L^2(0, \pi)$  et  $H_0^1(0, \pi)$  par

$$L^2(0, \pi) = \left\{ u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k(x), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty \right\}$$

et

$$H_0^1(-\pi, \pi) = \left\{ u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k(x), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (1 + k^2) |c_k|^2 < +\infty \right\}.$$

De plus,

$$\|u\|_{L^2} = \left( \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{H^1} = \left( \sum_{k=1}^{+\infty} (1+k^2)|c_k|^2 \right)^{1/2}.$$

En effet, pour montrer la complétude de la base des  $\{e_k\}$  dans  $L^2(0, \pi)$ , il suffit de prendre une fonction de  $L^2(0, \pi)$ , de l'antisymétriser pour en faire une fonction sur  $]-\pi, \pi[$ , d'étendre la fonction à tout  $\mathbb{R}$  en la périodisant, et enfin de développer cette fonction sur la base des sinus et cosinus (en utilisant la théorie des séries de Fourier).

Introduire

$$i : H_0^1(0, \pi) \longrightarrow L^2(0, \pi) \\ u \mapsto u$$

l'injection canonique de  $H_0^1(0, \pi)$  dans  $L^2(0, \pi)$  et la suite d'opérateurs linéaires  $(i_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  par

$$i_N : H_0^1(0, \pi) \longrightarrow L^2(0, \pi) \\ u = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \mapsto i_N(u) = \sum_{k=1}^N c_k e_k.$$

Montrer que la suite  $(i_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $i$  dans  $\mathcal{L}(H_0^1, L^2)$  et conclure.

- pour  $\omega = ]0, \pi[^d$ , on montre de même que l'injection canonique de  $H_0^1(\omega)$  dans  $L^2(\omega)$  est compacte en développant les fonctions  $u \in H_0^1(\omega)$  dans la base tensorielle de Fourier :

$$u(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_d=1}^{+\infty} c_{k_1 k_2 \dots k_d} \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \dots \sin(k_d x_d).$$

Conclure pour un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  quelconque en se ramenant par homothétie et translation au cas où  $\Omega \subset \omega = ]0, \pi[^d$ , et en remarquant que l'injection  $i_\Omega$  de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  peut se décomposer en

$$i_\Omega : H_0^1(\Omega) \xrightarrow{p} H_0^1(\omega) \xrightarrow{i_\omega} L^2(\omega) \xrightarrow{r} L^2(\Omega)$$

où  $p$  désigne l'opérateur linéaire qui transforme une fonction de  $H_0^1(\Omega)$  en une fonction de  $H_0^1(\omega)$  en la prolongeant par 0 dans  $\omega \setminus \Omega$ ,  $i_\omega$  l'injection canonique de  $H_0^1(\omega)$  dans  $L^2(\omega)$  et  $r$  l'opérateur de restriction qui à  $u \in L^2(\omega)$  associe la fonction  $u|_\Omega$  (qui est dans  $L^2(\Omega)$ ).

**Remarque 3.8 (Injection compacte de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ ).** Une modification de la preuve ci-dessus permet de montrer facilement que l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte lorsque le domaine  $\Omega$  est un parallélépipède  $\Omega = \prod_{i=1}^d ]a_i, b_i[$ . Pour des domaines généraux, la question est plus difficile : ce qui pose problème dans la preuve ci-dessus, c'est de montrer que l'opérateur d'extension (celui qui à une fonction  $f \in H^1(\Omega)$  associe une fonction  $\tilde{f} \in H^1(\omega)$  avec  $\omega$  un cube et  $\tilde{f}|_\Omega = f$ ) est bien défini et est borné. De tels résultats existent pour des domaines bornés réguliers, voir par exemple [3, Théorème 7.1.7] et [1, Théorème IX.7].

### 3.3.4 Théorie spectrale des opérateurs compact autoadjoints

Les opérateurs autoadjoints compacts ont une structure spectrale très particulière, qui ressemble beaucoup à celle des opérateurs linéaires en dimension finie.

**Théorème 3.5 (Diagonalisation de T).** Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint compact. Alors il existe une suite  $(\mu_n)$  de réels non nuls, finie ou tendant vers 0, et une base hilbertienne  $(e_n) \cup (f_n)$  de  $H$  telle que

$$(1) \sigma(T) = (\mu_n) \cup \{0\},$$

- (2)  $(f_n)$  est une base de  $\text{Ker}(T)$ ,
- (3)  $Te_n = \mu_n e_n$ .

En outre, pour tout  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ , l'espace propre  $E_\lambda = \text{Ker}(\lambda - T)$  est de dimension finie.

En fait, plusieurs cas peuvent se présenter :

- (i) ou bien  $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$ , auquel cas  $T = 0$ . Dans ce cas, la base  $(f_n)$  engendre tout l'espace, et la base  $(e_n)$  est vide ;
- (ii) ou bien  $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\mu_n\}_{n \in \{1, \dots, N\}} \cup \{0\}$ , c'est-à-dire que  $T$  est de rang fini. Dans ce cas, la base  $(e_n)$  est de cardinal fini  $N$ , et la base  $(f_n)$  est de cardinal infini ;
- (iii) ou bien  $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\mu_n\}_{n \geq 0} \cup \{0\}$ , auquel cas  $T$  est non injectif. La base  $(e_n)$  est de cardinal infini, alors que la base  $(f_n)$  peut être de cardinal fini ou infini en fonction de la dégénérescence de la valeur propre 0 ;
- (iv) ou bien  $\sigma_p(T) = \{\mu_n\}_{n \geq 0}$  et  $0 \notin \sigma_p(T)$ , auquel cas  $T$  est injectif. Dans ce cas,  $\sigma_c(T) = \{0\}$  car  $\sigma_r(T) = \emptyset$  (voir la Proposition 3.5).

**Exercice 3.40.** Nous décomposons la (longue) preuve du Théorème 3.5 en plusieurs étapes.

(1) Montrer pour commencer que

$$\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}.$$

Pour ce faire, considérer  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que  $\lambda \notin \sigma_p(T)$ . Il s'agit de montrer que  $\lambda \notin \sigma(T)$ . Pour l'étude de la surjectivité de  $(\lambda - T)$ , prouver que  $V = \text{Ran}(\lambda - T) = H$  en montrant que cet espace est dense et fermé (pour ce dernier point, introduire une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\lambda - T)v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $V$  qui converge vers  $w$  dans  $H$ , et montrer par l'absurde que  $(v_n)$  admet une sous-suite bornée).

- (2) Montrer que  $\sigma_p(T)$  est ou bien une suite finie, ou bien une suite infinie qui converge vers 0 en procédant par contradiction (extraire de  $\sigma_p(T)$  une suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels non nuls tous distincts qui converge vers un réel  $\mu \neq 0$  et  $e_n \in \text{Ker}(\lambda_n - T)$  tel que  $\|e_n\| = 1$ . Montrer qu'il existe une sous-suite convergente, ce qui n'est pas possible car les  $(e_n)$  sont orthogonaux entre eux).
- (3) A tout point  $\lambda_n \in \sigma_p(T)$  tel que  $\lambda_n \neq 0$ , on associe  $E_n = \text{Ker}(\lambda_n - T)$ . Montrer que les espaces  $E_n$  sont de dimension finie en considérant  $T_n = T|_{E_n} = \lambda_n \text{Id}_{E_n}$  (avec  $\lambda_n \neq 0$ ).
- (4) Les espaces  $E_n$  sont deux à deux orthogonaux (par la Proposition 3.5). Montrer qu'ils sont aussi orthogonaux à  $F = \text{Ker}(T)$ .
- (5) Soit enfin  $E = \bigoplus_n E_n$ . Montrer que  $H = E \oplus F$ , où les sommes directes sont des sommes orthogonales dans les deux cas (selon le point précédent). Pour ce faire, remarquer tout d'abord que  $E$  et  $E^\perp$  sont stables par  $T$ . On peut alors définir  $\tilde{T}$ , la restriction de  $T$  à l'ensemble fermé  $E^\perp$  :

$$\begin{aligned} \tilde{T} &: E^\perp \rightarrow E^\perp \\ v &\mapsto Tv. \end{aligned}$$

En particulier,  $\tilde{T}$  est auto-adjoint et compact. Donc  $\sigma(\tilde{T}) \subset \sigma_p(\tilde{T}) \cup \{0\}$ . Montrer, en procédant par contradiction, que  $\sigma_p(\tilde{T}) \subset \{0\}$ . En déduire  $r(\tilde{T}) = \|\tilde{T}\| = 0$  et conclure que  $F = E^\perp$ .

On conclut la preuve en notant  $n_k$  la dimension de  $E_k$ , et en prenant  $\mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_{n_1} = \lambda_1$  avec  $(e_1, \dots, e_{n_1})$  une base orthonormale de  $E_1$  ; puis  $\mu_{n_1+1} = \lambda_1, \dots, \mu_{n_1+n_2} = \lambda_2$ , et  $(e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2})$  une base orthonormale de  $E_2$  ; etc.

**Remarque 3.9.** La preuve précédente montre qu'on peut écrire tout opérateur autoadjoint de  $\mathcal{K}(H)$  (lorsque  $H$  est un espace de Hilbert) comme une limite d'opérateurs de rang fini (voir [1]). En effet, on peut écrire tout  $u \in H$  sous la forme

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n,$$

et l'application  $T$  est diagonale dans cette base :

$$Tu = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n, \tag{3.5}$$

avec  $\lambda_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (éventuellement, il est possible que  $\lambda_n = 0$  à partir d'un certain rang). Définissant les opérateurs de rang fini  $T_N$  par

$$T_N u = \sum_{n=1}^N \lambda_n u_n,$$

on voit facilement que  $\|T - T_N\| \leq \sup_{m \geq N} |\lambda_m| \rightarrow 0$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

**Remarque 3.10 (Calcul fonctionnel).** Notons également que la décomposition (3.5) permet de définir des opérateurs  $f(T)$  par la formule

$$f(T)u = \sum_{n=1}^{+\infty} f(\lambda_n)u_n.$$

Ceci généralise les opérations faites sur les matrices symétriques réelles. La décomposition ci-dessus reste vraie pour des opérateurs à résolvante compacte (voir Section 3.3.5).

**Exercice 3.41.** Montrer que l'opérateur  $(1 + T)^{-1}$  de l'Exercice 3.31 n'est pas compact.

### 3.3.5 Opérateurs à résolvante compacte

Un corollaire intéressant du Théorème 3.5 est qu'il permet de déterminer le spectre des opérateurs dont la résolvante est compacte. Plus précisément, on montre que le spectre de tels opérateurs est discret (valeurs propres isolées et espaces propres associés de dimension finie).

**Proposition 3.10.** Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, et  $T$  un opérateur autoadjoint non borné sur  $H$ . On suppose qu'il existe  $\lambda \in \rho(T) \cap \mathbb{R}$  tel que  $R(\lambda) = (\lambda - T)^{-1}$  est un opérateur compact de  $H$  dans  $H$ . Alors, il existe une suite de réels  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  telle que  $|\mu_n| \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , et une base hilbertienne  $(e_n)_{n \geq 0}$  de  $H$  telle que

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\mu_n, n \geq 0\},$$

avec  $Te_n = \mu_n e_n$  et  $\dim(\text{Ker}(\mu_n - T)) < +\infty$  pour tout  $n \geq 0$ .

Notons que, pour  $\lambda \in \rho(T)$ , l'opérateur  $R(\lambda) = (\lambda - T)^{-1} : H \rightarrow D(T)$  est borné. On obtient un opérateur compact de  $H$  dans  $H$  lorsque l'injection canonique de  $D(T)$  dans  $H$  est compacte (voir par exemple le cas traité à la Section 3.4.1).

**Remarque 3.11.** Notons que, dans ce résultat, il est important que l'opérateur soit authentiquement non borné, i.e. qu'il ne soit pas borné. La preuve de ce résultat montre en effet que  $(\lambda - T)^{-1}$  ne peut pas être compacte si  $T$  est borné.

**Exercice 3.42.** Prouver ce résultat. Pour voir que  $R(\lambda)$  est autoadjoint, on écrira  $\langle R(\lambda)y_1, y_2 \rangle = \langle x_1, (\lambda - T)x_2 \rangle$ .

## 3.4 Applications

### 3.4.1 Equation de la chaleur et équation des ondes

#### Opérateur Laplacien sur un domaine borné

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier et  $f \in L^2(\Omega)$ . Le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \end{cases}$$

admet une solution et une seule et  $S : f \mapsto u$  est un opérateur linéaire continu de  $L^2(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  (on prouve cela en utilisant le théorème de Lax-Milgram). En fait, on peut même montrer que si la frontière de  $\Omega$  est suffisamment régulière (ce que nous supposons par la suite), alors  $u \in H^2(\Omega)$ .

On peut donc définir l'opérateur  $-\Delta_D^{-1}$  (l'indice D rappelle que l'on utilise des conditions de bord de Dirichlet)

$$T = -\Delta_D^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \xrightarrow{i} L^2(\Omega)$$

$$f \quad \mapsto \quad u \quad \mapsto \quad u,$$

$i$  désignant l'injection canonique de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

**Exercice 3.43.** *Montrer que  $T$  est compact et auto-adjoint.<sup>2</sup> Montrer également que cet opérateur est strictement positif au sens où, pour tout  $f \in L^2(\Omega)$  avec  $f \neq 0$ , on a  $(Tf, f)_{L^2} > 0$ . En déduire qu'il existe une suite croissante  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  de réels strictement positifs telle que  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  et une base hilbertienne  $(e_n)_{n \geq 1}$  de  $L^2(\Omega)$  tel que*

$$\begin{cases} e_n \in H_0^1(\Omega), \\ -\Delta e_n = \lambda_n e_n. \end{cases} \quad (3.6)$$

*Montrer finalement que  $e_n \in H^m(\Omega)$  pour tout  $m \geq 0$  et donc que  $e_n \in C^\infty(\Omega)$ .*

**Définition 3.12.** *Les  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  (resp. les  $(e_n)_{n \geq 1}$ ) sont appelées les valeurs propres (resp. les modes propres) du Laplacien de Dirichlet.*

**Remarque 3.12.** *Notons que nous aurions aussi pu utiliser la Proposition 3.10 pour montrer ce résultat. Pour cela, il faut en premier lieu montrer que l'opérateur de domaine  $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  défini par  $Au = -\Delta u$  est autoadjoint, et ensuite procéder comme ci-dessus en montrant que  $A^{-1}$  est bien défini et est compact (ce qui correspond au choix  $\lambda = 0$  dans la Proposition 3.10).*

En pratique, les modes propres  $e_n$  et les valeurs propres  $\lambda_n$  associées ne sont pas connus explicitement, sauf si la géométrie du domaine est très simple. Mais ils peuvent être approchés numériquement en discrétisant le problème sur une base de Galerkin de dimension  $N$  (par exemple par la méthode des éléments finis). Dans ce cas, on a une représentation matricielle de l'opérateur dans la base donnée (matrice  $T_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , symétrique car  $T$  est auto-adjoint), et un problème aux valeurs propres de la forme  $T_N x = \lambda M_N x$  à résoudre ( $M_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  étant la matrice de masse). L'opérateur que l'on cherche à approcher ayant un spectre discret, on peut par ailleurs montrer que la  $i$ -ème valeur propre de  $T_N$ , notée  $\lambda_i^N$ , converge, lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , vers  $\lambda_i$ , la  $i$ -ème valeur propre de  $T$ , et que  $\lambda_i \leq \lambda_i^{N+1} \leq \lambda_i^N$  (en utilisant la formule de Courant-Fisher).

**Exercice 3.44.** *Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  un ouvert régulier, et  $a \in C^1(\Omega)$  telle que  $a(x) \geq \alpha > 0$  pour presque tout  $x \in \Omega$  et  $\nabla a \in L^\infty(\Omega)^d$ . Montrer que l'opérateur de domaine  $D(B) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , défini par  $Bu = -\nabla \cdot (a \nabla u)$ , a un spectre discret.*

2. Rappelons que  $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , et que, pour un ouvert  $\Omega$  régulier,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma$$

si  $f \in H^2(\Omega)$  et  $g \in H^1(\Omega)$ .

### Equation de la chaleur

Considérons à présent l'équation de la chaleur

$$\partial_t \theta(t, x) = \kappa \Delta \theta(t, x), \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.7)$$

avec la condition initiale  $\theta(0, x) = \theta_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ , la conductivité thermique  $\kappa$  étant supposée constante. On prendra  $\kappa = 1$  par la suite pour simplifier les expressions. Développant la condition initiale et la solution au temps  $t$  sur la base hilbertienne des modes propres (3.6) :

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_0^n e_n, \quad \theta(t, \cdot) = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta^n(t) e_n,$$

on obtient par identification l'équation déterminant l'évolution des coefficients  $\theta^n(t)$  en utilisant (3.7) :

$$\frac{d\theta^n(t)}{dt} = -\lambda_n \theta^n(t), \quad \theta^0(0) = \theta_0^n = (\theta_0, e_n).$$

Ceci montre que  $\theta^n(t) = (\theta_0, e_n) e^{-\lambda_n t}$ . On a ainsi une solution explicite de (3.7) :

$$\theta(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\theta_0, e_n) e^{-\lambda_n t} e_n(x).$$

**Remarque 3.13.** *On pourra comparer cette solution à celle obtenue dans le cas du Laplacien sur  $\mathbb{R}^d$ . La différence entre ces deux expressions provient du fait que les opérateurs  $-\Delta$  sur  $\mathbb{R}^d$  ou sur un domaine borné ont des spectres très différents !*

### Equation des ondes

On considère l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u(t, x) - c^2 \Delta u(t, x) = g(x) \cos(\omega t), \quad u|_{\partial\Omega}, \quad u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = 0, \quad (3.8)$$

qui décrit par exemple l'évolution d'une membrane élastique initialement au repos,  $u$  étant dans ce cas le déplacement vertical,  $c$  la vitesse du son, et  $g \in L^2(\Omega)$  un terme source (forçage mécanique).

Cherchons à nouveau une solution en décomposant  $u(t)$  sur la base  $(e_n)_{n \geq 1}$  des fonctions propres du Laplacien de Dirichlet :

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) e_n(x).$$

En reportant cette expression dans (3.8) et en notant

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k e_k(x)$$

le développement de  $g$  sur les  $e_n$ , on en déduit la loi d'évolution des  $u_n(t)$  :

$$u_n''(t) + c^2 \lambda_n u_n(t) = g_n \cos(\omega t),$$

avec pour condition initiale  $u_n(0) = u_n'(0) = 0$ . Il vient, en notant  $\omega_n = c\sqrt{\lambda_n}$ , et en supposant  $\omega \neq \omega_n$  pour tout  $n \geq 1$  :

$$u_n(t) = c^2 g_n \frac{\cos(\omega_n t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_n^2}.$$

D'où finalement, la solution

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c^2 g_n \frac{\cos(\omega_n t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_n^2} e_n(x).$$

On voit sur cette expression que les fréquences de résonance du système correspondent bien aux fréquences propres de l'opérateur sous-jacent (ici le Laplacien de Dirichlet).

### 3.4.2 Equation de Schrödinger

L'objectif est de trouver des fonctions propres  $\psi$  (appelées fonctions d'onde) telles que

$$h\psi = (-\Delta + V)\psi = E\psi, \quad (3.9)$$

où  $E$  est l'énergie de la particule. L'opérateur  $h = -\Delta + V$  est le Hamiltonien du système. On se place sur  $H = L^2(\Omega)$ , avec  $\Omega = \mathbb{R}^d$  ou un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ . Cet espace est naturel car on interprète  $|\psi|^2$  comme une densité de probabilité, et on normalise les états propres de (3.9) de manière à ce que

$$\int_{\Omega} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Notons que si on arrive à établir que  $h$  a un spectre purement discret, on pourra, comme dans la section précédente, résoudre explicitement l'évolution temporelle du système, ici régie par l'équation de Schrödinger  $i\partial_t\psi = h\psi$ .

#### Particule confinée strictement

On considère une particule quantique dans un puits de potentiel infini. Ceci correspond au cas d'un confinement strict dans un domaine  $\Omega$  ouvert borné. Le potentiel  $V$  est de la forme

$$V(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ +\infty & \text{si } x \notin \Omega, \end{cases} \quad (3.10)$$

avec  $v \in L^\infty(\Omega)$ . On ne considère que des fonctions d'onde d'énergie finie. On se restreint ainsi à des fonctions à support dans  $\Omega$ , par exemple  $\psi \in L^2(\Omega)$ . On peut montrer en fait que les états admissibles sont dans  $H_0^1(\Omega)$ . Pour ce faire, on peut utiliser un théorème de Lax-Milgram pour montrer qu'il existe une unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  au problème (3.9) pour le potentiel donné par (3.10).

Vérifions que le spectre de  $h$  est discret. Pour ce faire, on pose  $c = -\text{ess inf}_{\Omega} v$  (notons que  $v + c \geq 0$ ), et on considère l'opérateur  $\tilde{h} = h + c$ , de domaine  $D(\tilde{h}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Le théorème de Lax-Milgram montre que l'application qui à  $f \in L^2(\Omega)$  associe la fonction  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\tilde{h}\psi = f$  est bien définie et continue, et on peut donc définir l'opérateur

$$T = \tilde{h}^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \xrightarrow{i} L^2(\Omega) \\ f \quad \mapsto \quad \psi \quad \mapsto \quad \psi.$$

**Exercice 3.45.** Vérifier que  $\tilde{h}^{-1}$  est compact, autoadjoint, et strictement positif (Les preuves de ces assertions sont similaires à celles de la Section 3.4.1).

On peut donc appliquer le Théorème 3.5 à  $\tilde{h}^{-1}$  : il existe une suite  $\mu_n$  de réels strictement positifs, décroissant vers 0, et une base orthonormale  $(e_n)$  de  $L^2(\Omega)$  telles que

$$\tilde{h}^{-1}e_n = \mu_n e_n.$$

Finalement, en posant  $E_n = \mu_n^{-1} - c$ , on a

$$he_n = E_n e_n,$$

avec  $E_n \rightarrow +\infty$ . Le fait que le spectre de  $h$  soit purement discret correspond à ce qu'on appelle la *quantification* en physique quantique.



**Potentiel confinant**

Considérons à présent le cas  $\Omega = \mathbb{R}$ , et  $V(x) = |x|^2$ . Ce potentiel est dit confinant car, afin de garder une énergie finie, la fonction d'onde va se concentrer autour de l'origine. Le domaine de l'opérateur est

$$D(h) = \left\{ \psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} |V(x)\psi(x)|^2 dx < +\infty \right\} = H^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}(H^2(\mathbb{R})).$$

On considère l'espace  $\mathcal{E}$ , complété de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$  induite par le produit scalaire

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\mathcal{E}} = \int_{\mathbb{R}} (1 + V(x)) \overline{\psi(x)} \phi(x) dx + \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(x)} \phi'(x) dx,$$

et la forme bilinéaire

$$a(\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}} V(x) \overline{\psi(x)} \phi(x) dx + \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(x)} \phi'(x) dx.$$

**Exercice 3.46.** *Montrer que  $\mathcal{E}$  est un espace de Hilbert, et que  $a$  est bilinéaire et continue sur  $\mathcal{E}$ .*

Montrons que  $a$  est coercive. On a ce résultat s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2 + |\psi'(x)|^2 dx. \tag{3.11}$$

En effet, on a dans ce cas, pour  $0 \leq \eta \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} a(\psi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2 + |\psi'(x)|^2 dx \\ &\geq \eta \int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2 + |\psi'(x)|^2 dx + \frac{1-\eta}{C} \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 \\ &\geq \frac{1}{1+C} \|\psi\|_{\mathcal{E}}^2 \end{aligned}$$

pour le choix optimal  $\eta = 1/(1 + C)$ .

**Exercice 3.47.** *Montrer (3.11). Pour ce faire, on procédera par contradiction en supposant que (3.11) ne soit pas satisfaite. Alors il existe une suite  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathcal{E}$  telle que*

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |\psi_n|^2 \geq n \left( \int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi_n(x)|^2 + |\psi_n'(x)|^2 dx \right).$$

*En déduire que  $(\psi_n)$  est une suite équicontinue et qu'en fait il existe  $\alpha > 0$  tel que  $|\psi_n(x) - \psi_n(y)| \leq \alpha \sqrt{|x - y|}$ . Montrer ensuite que  $\psi_n(x) \rightarrow 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et obtenir une contradiction.*

On peut alors appliquer le théorème de Lax-Milgram, qui assure que l'application qui à  $f \in L^2(\mathbb{R})$  associe l'unique solution dans  $\mathcal{E}$  du problème  $h\psi = f$  est continue. On définit ainsi l'opérateur

$$\begin{aligned} T = h^{-1} : L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{i} L^2(\Omega) \\ f &\mapsto \psi \mapsto \psi. \end{aligned}$$

**Exercice 3.48.** *Montrer que  $T$  est autoadjoint et compact. Pour montrer que l'injection canonique  $\mathcal{E} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  est compacte, on pourra commencer, pour une suite  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  donnée, bornée dans  $\mathcal{E}$ , par procéder à une extraction diagonale pour obtenir une sous suite  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  convergeant fortement dans  $L^2([-M, M])$  pour tout  $M \in \mathbb{N}^*$ .*

On peut alors conclure comme dans le cas précédent, et trouver une suite  $E_n$  de réels positifs tendant vers l'infini, et une base orthonormale  $(e_n)$  de  $L^2(\mathbb{R})$  telles que

$$he_n = E_n e_n.$$

### 3.4.3 Equation de Fokker-Planck

On s'intéresse dans cette section à la convergence en loi lorsque  $t \rightarrow +\infty$  des solutions de l'équation différentielle stochastique suivante, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  :

$$dX_t = -\nabla V(X_t) dt + \sqrt{\frac{2}{\beta}} dW_t,$$

où  $W_t$  est un mouvement Brownien standard en dimension  $n$ . On suppose que la solution est bien définie (existence et unicité de la solution forte). Ce modèle est appelé *équation de Langevin suramortie* en physique statistique. On peut montrer que la loi de  $X_t$  a une densité  $\psi(t, x)$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $dx$  pour tout  $t > 0$ , et que l'évolution de cette densité est régie par l'équation aux dérivées partielles suivante, dite équation de Fokker-Planck :

$$\partial_t \psi = \mathcal{L}\psi = \nabla \cdot \left( \psi \nabla V + \frac{1}{\beta} \nabla \psi \right), \quad (3.12)$$

avec les conditions

$$\psi(t, x) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t, x) dx = 1. \quad (3.13)$$

On peut montrer que si la condition initiale  $\psi(0, x) = \psi_0(x)$  vérifie les conditions (3.13), alors il en est de même de la solution de (3.12) à tout temps  $t \geq 0$ .

On vérifie facilement que  $\mathcal{L}\psi_\infty = 0$  pour le choix  $\psi_\infty(x) = e^{-\beta V(x)}$ . Ceci montre que la mesure de probabilité

$$\mu_\infty(dx) = \frac{\psi_\infty(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\infty} dx$$

est invariante, *i.e.* que si  $X_0 \sim \mu_\infty$ , alors  $X_t \sim \mu_\infty$  pour tout temps  $t \geq 0$ . On suppose par la suite que  $V$  est suffisamment régulier pour que  $e^{-\beta V(x)} > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et que  $e^{-\beta V} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  (ce qui demande que  $V$  croisse suffisamment vite à l'infini). Notons également que (3.12) peut se réécrire sous la forme :

$$\partial_t \psi = \mathcal{L}\psi = \nabla \cdot \left[ \psi_\infty \nabla \left( \frac{\psi}{\psi_\infty} \right) \right]. \quad (3.14)$$

En physique statistique,  $\beta$  est proportionnel à l'inverse de la température du système. Ici, quitte à multiplier  $V$  par une constante, on peut supposer que  $\beta = 1$ .

**Exercice 3.49.** Montrer que  $\mathcal{L} \geq 0$  (au sens suivant : pour toute fonction  $\psi \in D(\mathcal{L})$ , on a  $(\mathcal{L}\psi, \psi)_{L^2} \geq 0$ ). En déduire que  $\sigma(\mathcal{L}) \subset [0, +\infty[$ .

Une question naturelle est la suivante : étant donnée une densité initiale  $\psi_0$ , est-ce que la solution de (3.12) avec  $\psi|_{t=0} = \psi_0$  converge vers  $\psi_\infty$ ? Si oui, à quelle vitesse? Pour répondre à cette question, il faut tout d'abord se placer dans un cadre fonctionnel adéquat. Il est possible de reformuler le problème (3.12) ou (3.14) de manière plus symétrique en faisant le changement de fonction inconnue

$$f(t, x) = \frac{\psi(t, x)}{\sqrt{\psi_\infty(x)}}.$$

Un calcul simple montre que

$$\partial_t f = \tilde{\mathcal{L}}f = -\left(-\Delta + W\right)f,$$

avec

$$W(x) = \frac{1}{4}|\nabla V(x)|^2 - \frac{1}{2}\Delta V(x).$$

Notons que l'opérateur sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  ainsi obtenu est formellement symétrique. Si  $V(x) = c|x|^{2\alpha}$  pour  $|x| \geq R$  et  $\alpha > 0$ , alors  $W(x) = c^2\alpha^2|x|^{2(2\alpha-1)} - c\alpha(n+2\alpha-2)|x|^{2(\alpha-1)}$  pour  $|x| \geq R$ . Ainsi,  $W(x) \rightarrow +\infty$  si  $\alpha > 1/2$  et on peut dans ce cas utiliser des techniques similaires à celles de la Section 3.4.2 pour montrer que  $\tilde{\mathcal{L}}$  a un spectre discret (voir [9, Théorème XIII.67]). Toutefois,

l'inconvénient de cette approche est que les propriétés asymptotiques de  $W$  ne sont pas faciles à établir en fonction de celles de  $V$ .

Une fois établie une décomposition de l'opérateur  $\tilde{\mathcal{L}}$  selon ses modes discrets, on peut écrire l'évolution en temps comme on l'a fait pour l'équation de la chaleur en Section 3.4.1, et montrer que  $\psi(t)$  converge vers le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre lorsque celle-ci est non-dégénérée. Ici, la plus petite valeur propre est positive ou nulle car  $\tilde{\mathcal{L}}f = \lambda f$  est équivalent à  $\mathcal{L}(\sqrt{\psi_\infty}f) = \lambda\sqrt{\psi_\infty}f$ . Or, le spectre de  $\mathcal{L}$  est contenu dans  $[0, +\infty[$ , et  $0 \in \sigma_p(\mathcal{L})$  pour le vecteur propre  $\psi_\infty$ . Ceci permet de montrer que  $\psi(t) \rightarrow \psi_\infty$ , avec un taux de convergence exponentiellement rapide de la forme  $e^{-\mu t}$ , où  $\mu > 0$  est la première valeur propre non nulle.



## Rappels et compléments

---

### 4.1 Distributions à support compact

**Définition 4.1.** Soit  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

- (1) Soit  $\omega$  ouvert inclus dans  $\Omega$ . On dit que  $T$  est nulle sur  $\omega$  si pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  telle que  $\text{Supp}(\phi) \subset \omega$ , on a  $\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0$ .
- (2) Le support de  $T$  est le complémentaire dans  $\Omega$  de la réunion des ouverts de  $\Omega$  sur lesquels  $T$  est nulle.

**Définition 4.2.** On note  $\mathcal{E}'(\Omega)$  l'espace vectoriel des distributions sur  $\Omega$  à support compact.

On a le résultat suivant.

**Théorème 4.1.** Si une distribution de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est à support compact, elle est d'ordre fini.

*Preuve.* Soit  $K$  le support de  $T$  et  $\alpha = d(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$  (dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , on prendra  $\alpha = +\infty$ ). Posons  $\beta = \inf(1, \alpha)$  et considérons les ensembles

$$K' = \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \quad d(x, K) \leq \frac{\beta}{3} \right\},$$

et

$$\Omega' = \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \quad d(x, K) < \frac{2\beta}{3} \right\}.$$

Il est clair que  $K'$  est compact et que  $\Omega'$  est un ouvert de fermeture compacte. De plus, on a

$$K \subset K' \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega.$$

Soit  $p$  un entier et  $C$  une constante réelle tels que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega'}}(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C \sup_{x \in \overline{\Omega'}, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Soit maintenant  $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$  égale à 1 sur  $K'$  et à support dans  $\Omega'$ . On a pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \rho\phi \rangle + \langle T, (1 - \rho)\phi \rangle$$

et  $\langle T, (1 - \rho)\phi \rangle = 0$  puisque les supports de  $T$  et de  $(1 - \rho)\phi$  sont disjoints. De plus, comme  $\text{Supp}(\rho\phi) \subset \Omega'$ , on a

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha (\rho\phi)(x)|.$$

D'après la formule de Leibniz,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C' \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

avec

$$C' = C \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq p, \beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} |\partial^\beta \rho(x)|.$$

Donc  $T$  est d'ordre fini inférieur ou égal à  $p$ .

**Remarque 4.1.** Soit  $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$  une distribution à support compact,  $p$  son ordre,  $K$  un voisinage compact de  $\text{Supp } T$  et  $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$  valant 1 sur  $K$ . Posons pour tout  $\phi \in C^\infty(\Omega)$ ,

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty} = \langle T, \chi \phi \rangle.$$

Cette définition est indépendante de  $\chi$  : soit en effet  $\chi_1$  et  $\chi_2$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  valant 1 sur  $K$  ; on a

$$\langle T, \chi_1 \phi \rangle - \langle T, \chi_2 \phi \rangle = \langle T, (\chi_1 - \chi_2) \phi \rangle.$$

La fonction  $\tilde{\phi} = (\chi_1 - \chi_2) \phi$  étant nulle sur  $K$  voisinage de  $\text{Supp } u$ , on a

$$\langle T, (\chi_1 - \chi_2) \phi \rangle = 0.$$

On a ainsi associé à une distribution à support compact une forme linéaire sur  $C^\infty(\Omega)$ .

---

## Bibliographie

- [1] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications* (Dunod, 1999).
- [2] J. W. COOLEY ET J. W. TUKEY, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comput.* **19** (1965) 297–301.
- [3] E. B. DAVIES, *Spectral Theory and Differential Operators*, volume 42 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* (Cambridge University Press, 1995).
- [4] R. DAUTRAY ET J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume I-III (Masson, 1987).
- [5] P. D. HISLOP ET I. M. SIGAL, *Introduction to Spectral Theory with Application to Schrödinger Operators*, volume 113 of *Applied Mathematical Science* (Springer-Verlag, 1996).
- [6] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, volume 132 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* (Springer-Verlag, 1976).
- [7] M. REED ET B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional Analysis* (Academic Press, 1980).
- [8] M. REED ET B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis, Self-adjointness* (Academic Press, 1980).
- [9] M. REED ET B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators* (Academic Press, 1980).
- [10] L. SCHWARTZ, *Analyse*, volume IV (Hermann, 1993).
- [11] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions* (Hermann, 1998).
- [12] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series* (Cambridge Mathematical Library, 1990).