Corrigé de l'examen d'analyse spectrale – Théorie spectrale

16 janvier 2013

Question 1. La condition $\langle v, P_K x - x\rangle_H = 0$ étant linéaire en x, et V étant un sous-espace vectorial, on en déduit immédiatement la linéarité de P_V. Plus précisément, étant donnés $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x, y \in H$, on écrit, pour $v \in H$,

$$\begin{aligned}\langle v, P_V(\lambda x + y)\rangle_H &= \langle v, \lambda x + y\rangle_H = \lambda\langle v, x\rangle_H + \langle v, y\rangle_H \\ &= \lambda\langle v, P_V x\rangle_H + \langle v, P_V y\rangle_H = \langle v, \lambda P_V x + P_V y\rangle_H.\end{aligned}$$

L'unicité de la caractérisation de la projection permet de conclure que $P_V(\lambda x+y) = \lambda P_V x + P_V y$.

On a ensuite, en choisissant $v = P_V x$,

$$\|P_V x\|_H^2 = \langle P_V x, x\rangle_H \leq \|P_V x\|_H \|x\|_H,$$

d'où on voit que $\|P_V x\|_H \leq \|x\|_H$. Ceci donne $\|P_V\| \leq 1$. Par ailleurs, on a $P_V v = v$ pour tout $v \in V$, ce qui montre finalement que $\|P_V\| = 1$.

Question 2.

(i) Il est clair que $\pi_{a,b}$ est linéaire. On note que $\|\pi_{a,b} f\|_H = \|\langle b, f\rangle_H a\|_H = |\langle b, f\rangle_H| \, \|a\|_H \leq \|a\|_H \|b\|_H \|f\|_H$, ce qui montre que $\|\pi_{a,b}\| \leq \|a\|_H \|b\|_H$. L'égalité est triviale si $b = 0$. Par ailleurs, si $b \neq 0$,

$$\pi_{a,b}\left(\frac{b}{\|b\|_H}\right) = \|b\|_H a,$$

ce qui montre l'égalité $\|\pi_{a,b}\| = \|a\|_H \|b\|_H$.

(ii) Il est clair que A est linéaire. Un élément $f \in H$ peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n e_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|^2 = \|f\|_H^2 < +\infty.$$

On a alors

$$Af = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{2n} e_{2n},$$

et donc

$$\|Af\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_{2n}|^2 \leq \|f\|_H^2,$$

ce qui montre que $\|A\| \leq 1$. Par ailleurs, on a $Ae_2 = e_2$ ce qui donne finalement $\|A\| = 1$. Pour l'autoadjonction, on considère $f, g \in H$ et on écrit

$$\langle f, Ag\rangle_H = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{f_{2n}} g_{2n} = \langle Af, g\rangle_H,$$

ce qui montre que $A^* = A$. Il est immédiat que $A^2 = A$.

(iii) Il est clair que $\{0,1\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, ces valeurs propres étant de multiplicité infinie. En effet, pour la valeur propre 0, on peut considérer les vecteurs propres e_{2n+1} $(n \geq 0)$, qui sont orthogonaux donc indépendants ; et les vecteurs propres e_{2n} $(n \geq 1)$ pour la valeur propre 1. Soit ensuite $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$ (noter que le spectre est contenu dans $\mathbb{R}$ car A est autoadjoint). On introduit l'opérateur B_λ défini par

$$B_\lambda f = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} f_{2n+1} e_{2n+1} + \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{n=1}^{+\infty} f_{2n} e_{2n}.$$

Cet opérateur est borné, de norme égale à $\min(|\lambda|^{-1}, |1-\lambda|^{-1}) > 0$ (par un traitement similaire à ce qui a été fait auparavant). Par ailleurs, on vérifie facilement que

$$(\lambda - A) B_\lambda = B_\lambda (\lambda - A) = \mathrm{Id}_H,$$

ce qui montre que $\lambda - A$ est inversible, d'inverse B_λ.

Question 3. On voit facilement que $A|_{V_n}$ peut être représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} D_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & d(\theta) \end{pmatrix},$$

où D_n est une matrice diagonale de taille $2n \times 2n$, avec alternativement 0 et 1 sur la diagonale et

$$d(\theta) = \Big\langle \cos(\theta) e_{2n+1} + \sin(\theta) e_{2n+2}, A\Big(\cos(\theta) e_{2n+1} + \sin(\theta) e_{2n+2}\Big)\Big\rangle_H = \sin^2(\theta).$$

On en déduit bien sûr que $\sigma\left(A|_{V_n}\right) = \sigma_{\mathrm{p}}\left(A|_{V_n}\right) = \{0, 1, \sin^2(\theta)\}$.

Il est clair que $V_n \subset V_{n+1}$. Par ailleurs, il est facile de montrer que $\overline{\bigcup_{n \geq 1} V_n} = H$ (en approchant un élément $f \in H$ par la troncature de son développement sur la base hilbertienne $\{e_n\}$). La définition des valeurs propres parasites permet de conclure que $\sin^2(\theta) \in \mathrm{Sp}(A)$. Ceci étant vrai pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on en déduit que $\mathrm{Sp}(A) =]0, 1[$ (0 et 1 étant des valeurs propres, il faut les exclure).

Question 4. On a un opérateur de multiplication $Af(x) = m(x) f(x)$ avec $m(x) = \mathbf{1}_{[0,a]}(x)$. On a donc

$$\|Af\|_{L^2} \leq \|m\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$

ce qui montre que $\|A\| \leq 1$. Par ailleurs, avec le choix $f = m$, on a $Am = m$ et donc $\|A\| = 1$. On remarque ensuite que toute fonction de $L^2([0,1], \mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $[0, a]$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, alors que toute fonction de $L^2([0,1], \mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $[a, 1]$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

Question 5. L'espace V_n est engendré par les fonctions de base $\{e_{n,l}\}_{l=0,\ldots,2^n-1}$ avec $e_{n,l} = \mathbf{1}_{I_{n,l}}$. On a par ailleurs

$$\begin{cases} A|_{V_n} e_{n,l} = A e_{n,l} = e_{n,l}, & \text{si } l \leq m_{a,n}, \\ A|_{V_n} e_{n,l} = A e_{n,l} = 0, & \text{si } l \geq m_{a,n} + 1, \end{cases}$$

et $Ae_{n,m_{a,n}} = \mathbf{1}_{[m_{a,n} 2^{-n}, a]}$, donc, en projetant cette fonction sur une fonction constante sur les sous-intervalles,

$$A|_{V_n} e_{n,m_{a,n}} = P_{V_n} A e_{n,m_{a,n}} = \frac{a - m_{a,n} 2^{-n}}{2^{-n}} e_{n,m_{a,n}} = r_n e_{n,m_{a,n}}.$$

Ceci montre que $\sigma\left(A|_{V_n}\right) = \{0, 1, r_n\}$.

Le caractère croissant des inclusions et la densité des espaces V_n dans H est claire (par densité des fonctions étagées par exemple). La décomposition de a montre que

$$r_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{n+k}}{2^k} \in [0,1].$$

Si on considère un élément a tel que ses coefficients a_n dans la décomposition soient périodiques, *i.e.* s'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $a_{k+K} = a_k$, alors, en prenant la suite d'espaces V_{nK} $(n \geq 1)$, on voit que $r_{nK} = a$ pour tout $n \geq 1$, et en fait

$$\sigma\left(A|_{V_{nK}}\right) = \{0, 1, a\}.$$

On peut penser par exemple au cas où $K = 2$, avec $a_{2n+1} = 1$ et $a_{2n} = 0$ (soit $a = 1/2 + 1/8 + 1/32 + \dots$). On peut en fait montrer que l'ensemble des $a \in [0,1]$ dont les coefficients a_n sont périodiques est un ensemble dense (prendre $a \in [0,1]$, tronquer son développement au coefficient K, et compléter en périodisant le reste de la série. Cela produit un élément a_K, avec $|a - a_K| \leq 2^{-K+1}$), et ainsi $\mathrm{Sp}(A) =]0,1[$.

Question 6. On note N_n la dimension de V_n et on introduit une base hilbertienne $(e_1, e_2, \dots, e_{N_n})$ de cet espace. L'opérateur $A|_{V_n}$ peut alors être représenté par une matrice dont les coefficients $a_{i,j}$ sont

$$a_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle_H.$$

Il est clair que $A|_{V_n}$ est autoadjoint et que

$$\|A|_{V_n}\| \leq \|P_{V_n}\|\|A\| = \|A\|.$$

On en déduit que $\sigma(A|_{V_n}) \subset [-\|A\|, \|A\|]$, et donc, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on a forcément $\lambda \in [-\|A\|, \|A\|]$.

Question 7. Rappelons pour commencer que A est autoadjoint et donc $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(A)$. Pour montrer que $\Sigma(A) \subset \sigma(A)$, on considère un élément $\lambda \in \Sigma(A)$ et une suite (x_n) de H telle que $\|x_n\|_H = 1$ et $y_n = (\lambda - A)x_n \to 0$. Si $\lambda - T$ était inversible, alors on aurait $x_n = (\lambda - A)^{-1} y_n \to 0$ par continuité de $\lambda - A$, ce qui est en contradiction avec $\|x_n\|_H = 1$. On en déduit que $\lambda \in \sigma(A)$.

Pour l'autre inclusion, on considère $\lambda \in \sigma(A)$ et on distingue deux cas :

(1) si $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, on note x_1 un vecteur propre associé, de norme 1, et on définit la suite $x_n = x_1$ pour tout $n \geq 1$;

(2) si $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(A)$, on considère $y \in H \backslash \mathrm{Ran}(\lambda - T)$. Par densité de l'image de $\lambda - T$, il existe une suite $y_n = (\lambda - T)z_n$ telle que $y_n \to y$. La suite (z_n) est telle que $\|z_n\|_H \to +\infty$, sans quoi il existerait une sous-suite bornée, et à extraction près, on pourrait construire une sous-suite $(z_{n_k})_k$ convergeant faiblement vers un élément $z^* \in H$. Par continuité, on aurait alors la convergence faible de y_{n_k} vers $(\lambda - A)z^*$. Comme par ailleurs y_n converge fortement vers y, on en déduit, par unicité de la limite faible, que $y = (\lambda - A)z^*$, ce qui est en contradiction avec $y \notin \mathrm{Ran}(\lambda - T)$. Ainsi, $\|z_n\|_H \to +\infty$. On introduit finalement la suite $x_n = z_n / \|z_n\|_H$, dont on vérifie qu'elle satisfait les propriétés requises.

Question 8. Par définition de $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, il existe une suite d'éléments $x_n \in V_n \backslash \{0\}$ telle que $P_{V_n} A x_n = \lambda_n x_n$ et $\lambda_n \to \lambda$. Quitte à changer x_n en $x_n / \|x_n\|_H$, on peut toujours supposer que $\|x_n\|_H = 1$. On a alors

$$P_{V_n}(A - \lambda)x_n = (\lambda_n - \lambda)x_n \to 0.$$

Il reste à montrer que $(x_n)_n$ converge faiblement vers 0. Pour ce faire, on note qu'à extraction près il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergeant faiblement vers un élément $x^* \in H$. Pour un élément

$y \in \bigcup_{m\geq 1} V_m$, il existe $k_y \in \mathbb{N}$ tel que $y \in V_{n_{k_y}}$, et donc

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to+\infty} \left\langle P_{V_{n_k}}(A-\lambda)x_{n_k}, y\right\rangle_H \\ &= \lim_{k\to+\infty} \left\langle x_{n_k}, (A-\lambda)P_{V_{n_k}} y\right\rangle_H \\ &= \lim_{k\to+\infty} \langle x_{n_k}, (A-\lambda)y\rangle_H \\ &= \langle x^*, (A-\lambda)y\rangle_H = \langle (A-\lambda)x^*, y\rangle_H . \end{aligned}$$

Comme $\bigcup_{m\geq 1} V_m$ est dense, on en déduit que $(A-\lambda)x^* = 0$. Si $x^* \neq 0$, on aurait une contradiction avec le fait que $\lambda \notin \sigma(A)$. On conclut donc que $x^* = 0$.