Corrigé de l'examen d'analyse spectrale – Transformation de Fourier

7 novembre 2012

Autour du potentiel de Coulomb

Question 1. On effectue un changement de variables pour passer en coordonnées sphériques, en prenant comme axe de référence pour la colatitude θ la direction donnée par ξ. Ainsi, $\xi \cdot x = |\xi| r \cos\theta$ et

$$\begin{aligned}
\widehat{V_\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} V_\mu(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\, dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\xi| r\cos\theta} r^2 \sin\theta\, d\phi\, d\theta\, dr \\
&= 2\pi \int_0^{\pi}\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-\mu r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\xi| r\cos\theta} \sin\theta\, d\theta\, dr \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-\mu r} \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\xi| r\cos\theta}}{\mathrm{i}|\xi| r}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr \\
&= \frac{2\pi}{\mathrm{i}|\xi|}\int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-(\mu-\mathrm{i}|\xi|)r} - \mathrm{e}^{-(\mu+\mathrm{i}|\xi|)r}\right) dr \\
&= \frac{2\pi}{\mathrm{i}|\xi|}\left(\frac{1}{\mu-\mathrm{i}|\xi|} - \frac{1}{\mu+\mathrm{i}|\xi|}\right) = \frac{4\pi}{\mu^2+|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

Question 2. On note que $v = v\mathbf{1}_{|x|\le 1} + v\mathbf{1}_{|x|>1} \in L^1(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$, ce qui montre que $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$. Une décomposition similaire prouve également que $V_\mu \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$.

Notons que $V_\mu(x) \to v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Considérons à présent $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. On a

$$\langle V_\mu, \varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \int_{\mathbb{R}^3} V_\mu\varphi \to \int_{\mathbb{R}^3} v\varphi$$

en application du théorème de convergence dominée, la suite de fonctions $V_\mu\varphi$ étant uniformément intégrable car $|V_\mu\varphi| \le v|\varphi|$. Ceci montre donc que V_μ converge vers v dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$.

Question 3. On a la convergence dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$

$$\mathcal{F}v = \lim_{\mu\to 0} \mathcal{F}V_\mu.$$

On montre facilement comme ci-dessus (par dualité contre une fonction test et avec le théorème de convergence dominée) que

$$\hat{v}(\xi) = \frac{4\pi}{|\xi|^2}.$$

Par ailleurs, $\mathcal{F}(-\Delta v)(\xi) = |\xi|^2\hat{v}(\xi) = 4\pi = 4\pi\mathcal{F}\delta_0$, l'égalité ayant lieu au sens des distributions tempérées. Une application de la transformée de Fourier inverse donne bien $-\Delta v = 4\pi\delta_0$.

Transformée de Hilbert

Question 1. On a

$$H_{\varepsilon,M}f(x) = \int_{\varepsilon\leq|y|\leq M} \frac{f(x-y)}{y}\,dy = \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} \frac{f(x-y)-f(x)}{y}\,dy + \int_{1<|y|\leq M} \frac{f(x-y)}{y}\,dy.$$

Les mêmes estimations que celles utilisées pour montrer que la valeur principale est une distribution tempérée d'ordre 1 permettent de voir que $H_{\varepsilon,M}f$ a bien une limite lorsque $M\to+\infty$ et $\varepsilon\to 0$.

Question 2. On définit

$$K_{\varepsilon,M}(x) = \frac{\mathbf{1}_{\varepsilon\leq|x|\leq M}}{\pi x},$$

qui est une fonction $L^1(\mathbb{R})$ pour $0<\varepsilon<M<+\infty$. On a $\widehat{K}_{\varepsilon,M}(0)=0$ et, pour $\xi\neq 0$,

$$\begin{aligned}\widehat{K}_{\varepsilon,M}(\xi) &= \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}}{\pi x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{M} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}}{\pi x}\,dx \\ &= -2\mathrm{i}\int_{\varepsilon}^{M} \frac{\sin(\xi x)}{\pi x}\,dx = -\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\int_{\varepsilon\xi}^{M\xi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \to -\mathrm{i}\,\mathrm{sign}(\xi).\end{aligned}$$

On a aussi

$$\left|\widehat{K}_{\varepsilon,M}(\xi)\right| = \left|\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\Big(\mathrm{Si}(M\xi)-\mathrm{Si}(\varepsilon\xi)\Big)\right| \leq \frac{4}{\pi}\mathrm{Si}(\pi).$$

Question 3. Les transformées de Fourier des suites de fonctions $\widehat{H_{\varepsilon,M}f} = \widehat{K}_{\varepsilon,M}\hat{f}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$, avec une borne L^2 uniforme car les fonctions $\widehat{K}_{\varepsilon,M}$ sont uniformément bornées. Par convergence dominée, on a

$$\left\|\widehat{H_{\varepsilon,M}f} + \mathrm{i}\,\mathrm{sign}(\xi)\hat{f}\right\|_{L^2}$$

Ceci montre que $\widehat{H_{\varepsilon,M}f}$ converge dans L^2 vers $-\mathrm{i}\,\mathrm{sign}(\xi)\hat{f}=h$. La formule de Plancherel implique que $H_{\varepsilon,M}f$ converge dans L^2 vers $\mathcal{F}^{-1}h$.