Examen d'analyse spectrale

8 février 2012

Il est important de bien rédiger, d'écrire des phrases, etc.

Dans tout ce sujet, on suppose que le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est antilinéaire par rapport à la première variable et linéaire par rapport à la seconde. Le sujet est long, mais il y a plein de questions faciles un peu partout... et d'autres plus difficiles !

Exercice 1 : Image numérique

On considère un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On suppose qu'il existe un opérateur unitaire U tel que $T^* = UTU^*$. On définit l'image numérique de T comme l'ensemble

$$\mathrm{Num}(T) = \Big\{ \langle u, Tu \rangle,\ u \in \mathcal{H},\ \|u\| = 1 \Big\} \subset \mathbb{C}.$$

(a) Montrer que $\mathrm{Num}(T) = \mathrm{Num}(T^*)$, et que si $z \in \mathrm{Num}(T)$ alors $\overline{z} \in \mathrm{Num}(T)$ (où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de z).

(b) Montrer que $\mathbb{C} \backslash \overline{\mathrm{Num}(T)} \subset \rho(T)$ (où la notation $\overline{E}$ désigne ici la fermeture de l'ensemble E), et en déduire que $\sigma(T) \subset \overline{\mathrm{Num}(T)}$. On pourra remarquer que pour $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\mathrm{Num}(T)}$, il existe $\delta > 0$ tel que $|z - \langle u, Tu \rangle| \geq \delta$ si $\|u\| = 1$.

(c) L'intérêt de l'image numérique est qu'elle est plus stable par perturbation que le spectre. Illustrons ce point par un exemple matriciel simple : on se place sur $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ et on définit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On fixe $\varepsilon > 0$. Calculer $\sigma(A), \sigma(A + \varepsilon B), \mathrm{Num}(A), \mathrm{Num}(A + \varepsilon B)$ et en déduire que le spectre subit des variations d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ alors que l'image numérique n'est modifiée qu'à l'ordre ε.

Exercice 2 : Autour de l'opérateur de translation.

On se place sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ et on considère, pour $R \in \mathbb{R}^3$ fixé, l'opérateur de translation τ_R tel que $\tau_R f(x) = f(x - R)$. On rappelle que cet opérateur est unitaire.

(a) Montrer tout d'abord que si on considère un opérateur unitaire U quelconque, on a toujours $\sigma(U) \subset C(0,1) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

(b) Montrer que τ_R est unitairement équivalent à un opérateur de multiplication A dont l'action est $Af(x) = a(x)f(x)$, pour une fonction a à préciser. En déduire que $\sigma(\tau_R) = \sigma_{\mathrm{c}}(\tau_R) = C(0,1)$.

(c) On considère un opérateur borné T non nul tel que $T\tau_R = \tau_R T$. Montrer que T n'est pas compact. On pourra pour ce faire utiliser la suite $u_n = \tau_{nR} u_0$, où $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est fixée.

Problème : Stabilité et instabilité du spectre.

On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{u}_n v_n,$$

pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On note $|\cdot|$ la norme associée. On définit l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ainsi, pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on a $(Au)_n = -u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1}$.

Détermination du spectre.

Question 1. En notant que $A = 2 - \tau_{\mathrm{g}} - \tau_{\mathrm{d}}$ (avec $\tau_{\mathrm{g}}, \tau_{\mathrm{d}}$ à définir), montrer successivement que

(i) l'opérateur A est borné autoadjoint ;

(ii) $A \geq 0$ (au sens où, pour tout $u \in \mathcal{H}$, on a $\langle u, Au\rangle \geq 0$). En déduire que si $\lambda < 0$, l'opérateur $\lambda - A$ est inversible et $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-1}$;

(iii) on a $\|A\| = 4$ (on pourra commencer par montrer que $\|A\| \leq 4$, puis montrer l'égalité en choisissant une suite appropriée) ;

(iv) Conclure que $\sigma(A) \subset [a, b]$ avec a, b à préciser.

On va à présent montrer que le spectre de A est purement continu. Pour ce faire, on va montrer que A est unitairement équivalent à un opérateur de multiplication par une fonction continue. On introduit l'espace de Hilbert $\mathcal{V} = \mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$, muni du produit scalaire

$$(f, g)_{\mathcal{V}} = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g,$$

et $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormée de $\mathcal{V}$. On définit un opérateur $U : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ en considérant un élément $v \in \mathcal{V}$ et en lui associant la suite $Uv = (V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$V_n = (f_n, v)_{\mathcal{V}}. \tag{2}$$

Question 2. Montrer que U est unitaire et que, pour une suite $V = (V_n) \in \mathcal{H}$ donnée, $U^{-1}V$ est la fonction v de $\mathcal{V}$ définie par

$$v(t) = \left[U^{-1}V\right](t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n f_n(t).$$

On considère maintenant la base $f_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{int}$ de $\mathcal{V}$.

Question 3. Montrer que $U^{-1}AU$, où U est donné par (2), est un opérateur de multiplication par une fonction E que l'on précisera. En déduire que $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{c}}(A) = [0, 4]$. On pourra noter que $2f_n(t) - f_{n+1}(t) - f_{n-1}(t) = 2(1 - \cos t) f_n(t)$.

Perturbation du spectre.

On va étudier dans cette section comment le spectre de a est modifié par l'ajout de certaines perturbations. On va montrer sur un exemple simple que le spectre ponctuel et le spectre continu ne sont pas des objets très stables (voir Question 4), ce qui motive donc le recours à une autre classification du spectre, en spectre discret et spectre essentiel.

Définition 1. *Le spectre discret est le sous-ensemble du spectre ponctuel composé des valeurs propres isolées de multiplicité finie :*

$$\sigma_{\rm disc}(A) = \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; 0 < \dim\big(\mathrm{Ker}(A-\lambda)\big) < +\infty, \ \exists \varepsilon > 0, \ \ ]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\cap \sigma(A) = \{\lambda\} \Big\}.$$

Le spectre essentiel est le complémentaire du spectre discret : $\sigma_{\rm ess}(A) = \sigma(A) \backslash \sigma_{\rm disc}(A)$.

Pour un opérateur autoadjoint borné, le spectre essentiel est donc l'union du spectre continu, des valeurs propres de multiplicité infinie, et des points d'accumulation des éléments du spectre discret. L'intérêt de cette décomposition est qu'elle est plus stable par perturbation que la décomposition en spectre ponctuel et spectre continu.

Question 4. On se place sur $L^2([0,1])$ et considère l'opérateur B_ε tel que $B_\varepsilon f(x) = \varepsilon x f(x)$, et $B_0 = 0$. Montrer que $\|B_0 - B_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, puis que $\sigma_{\rm ess}(B_0) = \{0\}$ et $\sigma_{\rm ess}(B_\varepsilon) = [0, \varepsilon]$, alors que $\sigma_{\rm p}(B_0) = \{0\}$ et $\sigma_{\rm p}(B_\varepsilon) = \emptyset$.

On admet la caractérisation suivante du spectre essentiel :

Lemme 1 (Lemme de Weyl)**.** *Si T est autoadjoint borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors $\lambda \in \sigma_{\rm ess}(T)$ si et seulement si il existe une suite $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ telle que, lorsque $m \to +\infty$,*

(i) $|u^m| = 1$ *;*

(ii) $u^m \rightharpoonup 0$ *(i.e. $\langle u^m, v\rangle \to 0$ pour tout $v \in \mathcal{H}$ fixé) ;*

(iii) $(\lambda - T)u^m \to 0$.

On parle ainsi de "quasi-valeur propre", dans la mesure où on n'a pas nécessairement $(\lambda - T)u = 0$ pour un élement de $\mathcal{H}$, mais seulement la convergence forte $(\lambda - T)u^m \to 0$. La suite $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ associée est appelée *suite singulière.*

Question 5. Montrer que $\sigma(A) = \sigma_{\rm ess}(A) = [0, 4]$ sans utiliser le résultat de la Question 3, mais en utilisant la caractérisation du Lemme 1. On pourra considérer les suites singulières $u^m(k)$, indexées par un élement $k \in [-\pi, \pi]$:

$$u^m(k) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} (\dots, 0, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mk}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-1)k}, \dots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}mk}, 0, \dots).$$

Pour trouver la valeur de $\lambda = \lambda(k)$ associée à cette suite, on commencera par calculer $Au^m(k)$. Pour montrer que $u^m(k) \rightharpoonup 0$, on pourra commencer par montrer que $\langle u^m(k), v\rangle \to 0$ pour tout $v \in \mathcal{H}$ ayant au plus un nombre fini de composantes non nulles, puis procéder par densité.

On va à présent étudier l'effet d'une perturbation compacte sur le spectre de A. On va commencer par montrer que si B est compact, alors $\sigma_{\rm ess}(A+B) = \sigma_{\rm ess}(A)$ (Question 6). Cependant, le spectre discret (et a fortiori le spectre ponctuel...) ne sont pas stables par perturbation compacte en général (voir Question 7).

Question 6. Soit $B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Montrer successivement que

(i) si une suite $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est telle que $u^m \rightharpoonup 0$ dans $\mathcal{H}$ et $|u^m| = 1$, alors on peut extraire une sous-suite (v^m) telle que $Bv^m \to 0$;

(ii) de toute suite singulière pour A, on peut extraire une suite singulière pour $A + B$;

(iii) en déduire que $\sigma_{\rm ess}(A + B) = \sigma_{\rm ess}(A)$.

Question 7. Montrer par un exemple qu'une perturbation compacte B peut être telle que $\sigma_{\rm disc}(A + B) \neq \sigma_{\rm disc}(A)$ (et donc $\sigma_{\rm p}(A + B) \neq \sigma_{\rm p}(A)$ a fortiori). On pourra considérer l'opérateur B défini par $(Bu)_n = \delta_{n,0}(u_{-1} + \alpha u_0 + u_1) + (\delta_{n,-1} + \delta_{n,1})u_0$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à choisir (montrer au préalable pourquoi B est compact).