Examen du cours de Probabilités

Mardi 15 Janvier 2019 (8h30-11h30)

Polycopié et notes de cours autorisés. Tout objet électronique est interdit.

Barême indicatif. L'ensemble de l'examen sera noté sur un barême entre 25 et 30 points, et les points seront approximativement répartis de la façon suivante : 1/7 pour l'exercice 1, 1/7 pour l'exercice 2, 3/7 pour l'exercice 3 et 2/7 pour l'exercice 4. Il n'est donc pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale.

Exercice 1. Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $p(x) = 1 - |x|$ si $|x| \leq 1$ et $p(x) = 0$ si $|x| > 1$.

1. Vérifier que p est une densité de probabilité.
2. On note X une variable aléatoire de densité p. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ puis $\mathbf{Var}(X)$. Donner une formule pour $\mathbb{E}[X^k]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer la densité de la loi de $|X|$.
4. Donner la loi de $\mathbf{1}_{X\geq 0}$, et montrer que $|X|$ est indépendante de $\mathbf{1}_{X\geq 0}$.
5. On considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. de loi de densité p. Donner le comportement asymptotique de $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i$, puis celui de $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} X_i \\ X_i^3 \end{pmatrix}$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soit $b > 0$. Soient $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Z \sim \Gamma(b, \frac{1}{2})$ deux variables aléatoires indépendantes.

1. Donner sans calcul la loi de G^2 puis celle de $Z + G^2$.
2. Montrer que $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to]-1,1[\times\mathbb{R}_+^*$ définie par $\varphi(x,z) = (\frac{x}{\sqrt{z+x^2}}, z + x^2)$ est un C^1-difféomorphisme, et calculer φ^{-1}.
3. Calculer la loi de $(\frac{G}{\sqrt{Z+G^2}}, Z + G^2)$. Les variables aléatoires $\frac{G}{\sqrt{Z+G^2}}$ et $Z + G^2$ sont-elles indépendantes ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3. On considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. avec $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ de paramètre $\sigma > 0$ inconnu. Pour $u \in \mathbb{R}^*$, On cherche à approcher $\phi(u) = \mathbb{E}[e^{uX_1}]$ à l'aide des n premières valeurs de la suite. On se propose de comparer les deux approximations suivantes $\phi_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{uX_i}$ et $\widetilde{\phi}_n(u) = e^{u^2 V_n/2}$ avec $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

1. Montrer que $\phi(u) = \exp(u^2\sigma^2/2)$ [Indication : utiliser l'identité $az + z^2/2 = (z+a)^2/2 - a^2/2$ pour $a, z \in \mathbb{R}$].
2. Donner le comportement asymptotique de $\phi_n(u)$.
3. Exprimer $\mathbf{Var}(e^{uX_1})$ à l'aide de la fonction ϕ. Donner le comportement asymptotique de $\sqrt{n}(\phi_n(u) - \phi(u))$, puis construire un intervalle de confiance à 95% pour $\phi(u)$ centré en $\phi_n(u)$ et dont les bornes s'exprimeront notamment en fonction de $\phi(u)$.
4. Montrer que $\mathbb{E}[e^{|uX_1|}] < \infty$. En déduire que $\sum_{k=0}^\infty \frac{|u|^k \mathbb{E}[|X_1|^k]}{k!} < \infty$ puis calculer $\mathbb{E}[X_1^4]$ à l'aide de la question 1.
5. Donner le comportement asymptotique de V_n et de $\sqrt{n}(V_n - \sigma^2)$.

6. Dans cette question, on utilise la factorisation suivante

$$\sqrt{n}(\widetilde{\phi}_n(u) - \phi(u)) = \sqrt{n}\phi(u)(e^{u^2(V_n-\sigma^2)/2} - 1).$$

   (a) Montrer que $\sqrt{n}[e^{u^2(V_n-\sigma^2)/2} - 1 - \frac{u^2}{2}(V_n - \sigma^2)]$ converge en loi vers 0. En déduire que pour $n \to +\infty$, $\sqrt{n}(\widetilde{\phi}_n(u) - \phi(u))$ converge en loi vers une gaussienne centrée dont on précisera la variance.

   (b) Construire à l'aide de cette convergence un intervalle de confiance de niveau 95% centré en $\widetilde{\phi}_n(u)$ et dont les bornes s'exprimeront notamment en fonction de $\phi(u)$. Comparer la largeur de cet intervalle avec celui obtenu à la question 3 : quelle est la meilleure méthode pour l'estimation de $\phi(u)$?

7. Donner le comportement asymptotique de $\frac{\sqrt{2n}}{u^2 V_n \widetilde{\phi}_n(u)}(\widetilde{\phi}_n(u)-\phi(u))$, puis donner un intervalle de confiance de niveau 95% construit uniquement à partir des valeurs de $X_1, \ldots, X_n$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4. Soit $\theta > 0$. On considère une densité de probabilité $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que :

i) la restriction de p à $[0, \theta]$ est de classe C^1,

ii) $\forall x \notin [0, \theta],\ p(x) = 0$,

iii) $\forall \varepsilon > 0, \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta} p(x)dx > 0$.

A noter que p peut être discontinue en 0 et θ, mais on note $p(0) = \lim_{x\to 0^+} p(x)$, $p'(0) = \lim_{x\to 0^+} p'(x)$, $p(\theta) = \lim_{x\to\theta^-} p(x)$ et $p'(\theta) = \lim_{x\to\theta^-} p'(x)$ car p est C^1 sur $[0, \theta]$.

On note $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$ la fonction de répartition associée à p. On considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. de loi de densité p, et on pose $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$

1. Calculer pour $x \in [0, \theta]$, $\mathbb{P}(M_n \leq x)$, puis donner la densité de la loi de M_n à l'aide des fonctions F et p.
2. Montrer que M_n converge en probabilité vers θ.
3. Montrer que M_n converge presque sûrement vers θ.
4. Montrer que $\mathbb{E}[M_n] = \theta - \int_0^{\theta} F(x)^n dx$, et en déduire que M_n converge vers θ dans L^1.
5. On suppose $p(\theta) > 0$. Soit g une fonction continue bornée. Vérifier que

$$\mathbb{E}[g(n(\theta - M_n))] = \int_0^{\infty} g(y) \left(F\left(\theta - \frac{y}{n}\right)\right)^{n-1} p\left(\theta - \frac{y}{n}\right) dy.$$

   Montrer que $\lambda = \inf_{z\in]0,\theta]} \frac{1-F(\theta-z)}{z} > 0$. En déduire que $n(\theta - M_n)$ converge en loi vers une loi que l'on précisera. Lorsque $p(\theta) = 1$, construire un intervalle de confiance (asymptotique) à 99% pour θ à l'aide de M_n.

6. On suppose désormais $p(\theta) = 0$ et $p'(\theta) < 0$. En utilisant la même démarche qu'à la question précédente (on pourra vérifier que $\mu = \inf_{z\in]0,\theta]} \frac{1-F(\theta-z)}{z^2} > 0$) montrer que $\sqrt{n}(\theta - M_n)$ converge en loi vers une loi dont on précisera la densité.

Corrigé

Exercice 1.

1. La fonction p est positive et par parité $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 2\int_0^\infty p(x)dx = 2\int_0^1 1-xdx = 1$.
2. Comme $\mathbb{P}(|X|\leq 1)=1$, il vient $\mathbb{E}[|X|^k]\leq 1<\infty$ pour $k\in\mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}} xp(x)dx=0$, car $x\mapsto xp(x)$ est impaire. On a $\mathbf{Var}(X)=\mathbb{E}[X^2]=2\int_0^1 x^2p(x)dx=2\int_0^1 x^2(1-x)dx=2(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=\frac{1}{6}$, car $x\mapsto x^2p(x)$ est paire. De même, pour $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X^{2k+1}]=0$ et $\mathbb{E}[X^{2k}]=2(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2})=\frac{1}{(k+1)(2k+1)}$.
3. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mesurable bornée. On a $\mathbb{E}[g(|X|)]=\int_{\mathbb{R}} g(|x|)p(x)dx=2\int_0^\infty g(x)p(x)dx$. Donc $|X|$ suit la loi de densité $2(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.
4. Pour $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mesurable bornée, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(|X|)h(\mathbf{1}_{X\geq 0})] &= \int_{-\infty}^0 g(-x)h(0)p(x)dx+\int_0^{+\infty} g(x)h(1)p(x)dx\\ &= (h(0)+h(1))\int_0^{+\infty} g(x)p(x)dx=\frac{h(0)+h(1)}{2}\mathbb{E}[g(|X|)].\end{aligned}$$
Cela prouve que $\mathbf{1}_{X\geq 0}\sim\mathcal{B}(1/2)$ et l'indépendance voulue.
5. Comme X_1 est centrée et de carré intégrable, le théorème de la limite centrale assure que $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1/6)$. Par la question 2. De même, le théorème de la limite centrale assure que $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} X_i \\ X_i^3\end{pmatrix}$ converge en loi vers le vecteur Gaussien centré $\mathcal{N}_2(0,\Gamma)$, où Γ est la matrice de covariance de $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1^3\end{pmatrix}$. Ainsi, $\Gamma_{11}=1/6$, $\Gamma_{12}=1/15$ et $\Gamma_{22}=1/28$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2.

1. D'après le cours $G^2\sim\chi^2(1)$, c'est à dire $G^2\sim\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, et par la Proposition 3.4.4., $Z+G^2\sim\Gamma(b+\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, puisque Z et G^2 sont indépendantes.
2. Pour $(x,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $x^2+z>0$ et φ est de classe C^∞ comme composition d'applications C^∞. La fonction φ est clairement injective. Pour $(u,v)\in]-1,1[\times\mathbb{R}_+^*$, on a $u\sqrt{v}\in\mathbb{R}$ et $v(1-u^2)>0$ et $\varphi(u\sqrt{v},v(1-u^2))=(\frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{v(1-u^2)+u^2v}},v(1-u^2)+u^2v)=(u,v)$, ce qui prouve la surjectivité de φ, ainsi que $\varphi^{-1}(u,v)=(u\sqrt{v},v(1-u^2))$.
3. On calcule
$$|\mathrm{Jac}\varphi^{-1}(u,v)|=\left|\det\begin{pmatrix}\sqrt{v} & \frac{u}{2\sqrt{v}}\\ -2uv & 1-u^2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{v}.$$
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction bornée mesurable. On a par indépendance de G et Z, puis en

utilisant la formule de changement de variable :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f\left(\frac{G}{\sqrt{Z+G^2}}, Z+G^2\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty f(\varphi(x,z))\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{2^{-b}}{\Gamma(b)}z^{b-1}e^{-z/2}dxdz \\
&= \int_{-1}^1\int_0^\infty f(u,v)\frac{e^{-u^2v/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{2^{-b}}{\Gamma(b)}(v(1-u^2))^{b-1}e^{-v(1-u^2)/2}\sqrt{v}dudv \\
&= \int_{-1}^1\int_0^\infty f(u,v)\frac{\Gamma(b+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(b)}(1-u^2)^{b-1}\times\frac{2^{-b-1/2}}{\Gamma(b+1/2)}v^{b-1/2}e^{-v/2}\sqrt{v}dudv
\end{aligned}$$

Ainsi, la loi de densité se met sous forme produit : $\frac{G}{\sqrt{Z+G^2}}$ et $Z+G^2$ sont indépendantes, et $\frac{G}{\sqrt{Z+G^2}}$ suit la loi de densité $\frac{\Gamma(b+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(b)}(1-u^2)^{b-1}\mathbf{1}_{]-1,1[}(u)$.

⋆⋆⋆

Exercice 3.

1. On a $\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{\mathbb{R}} e^{ux-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{\mathbb{R}} e^{\sigma^2u^2/2}e^{-\frac{(x-\sigma^2u)^2}{2\sigma^2}}dx = e^{\sigma^2u^2/2}$, car on reconnaît une densité gaussienne décentrée de variance σ^2 : $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\sigma^2u)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$.
2. Comme e^{uX_1} est intégrable, on peut appliquer la loi forte des grands nombres qui assure la convergence presque sûre de $\phi_n(u)$ vers $\phi(u)$.
3. $\mathbf{Var}(e^{uX_1}) = \mathbb{E}[e^{2uX_1}] - \mathbb{E}[e^{uX_1}]^2 = \phi(2u)-\phi(u)^2 = \phi(u)^4-\phi(u)^2 < \infty$. Par le théorème de la limite centrale, on en déduit que $\sqrt{n}(\phi_n(u)-\phi(u))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\phi(u)^4-\phi(u)^2)$. Ainsi, $\left[\phi_n(u)-1,96\sqrt{\frac{\phi(u)^4-\phi(u)^2}{n}}, \phi_n(u)+1,96\sqrt{\frac{\phi(u)^4-\phi(u)^2}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance (asymptotique) de niveau 95% pour $\phi(u)$.
4. On a $\mathbb{E}[e^{|uX_1|}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{\mathbb{R}} e^{|u||x|-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx < \infty$ car $|u||x|-\frac{x^2}{2\sigma^2} \leq -|x|$ pour $|x| \geq 2\sigma^2(|u|+1)$. Ainsi, par le théorème de Fubini (tous les termes sont positifs, on a $\sum_{k=0}^\infty \frac{|u|^k\mathbb{E}[|X_1|^k]}{k!} < \infty$. A nouveau par le théorème de Fubini, $\phi(u) = \sum_{k=0}^\infty \frac{u^k\mathbb{E}[X_1^k]}{k!}$. Comme $\phi(u) = \exp(\sigma^2u^2/2) = \sum_{i=0}^\infty \frac{(\sigma u)^{2i}}{2^{2i}i!}$, on en déduit $\mathbb{E}[X_1^k] = 0$ si k est impair et $\mathbb{E}[X_1^k] = \frac{(\sigma)^k k!}{2^{k/2}(k/2)!}$ si k est pair. En particulier $\mathbb{E}[X_1^4] = 3\sigma^4$.
5. Comme X_1^2 est intégrable, V_n converge p.s. vers $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2]$ par la loi forte des grands nombres. Etant également de carré intégrable, le théorème de la limite centrale assure que $\sqrt{n}(V_n-\sigma^2)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,2\sigma^4)$.
6. (a) Comme $e^{zu^2/2}-1-zu^2/2 \underset{z\to0}{=} O(z^2)$, il existe une fonction bornée η telle que $e^{zu^2/2}-1-zu^2/2 \underset{z\to0}{=} z^2\eta(z)$. Ainsi, $\sqrt{n}[e^{(V_n-\sigma^2)u^2/2}-1-(V_n-\sigma^2)u^2/2] = \sqrt{n}(V_n-\sigma^2)^2\eta(V_n-\sigma^2)$. D'une part $(V_n-\sigma^2)\eta(V_n-\sigma^2)$ converge p.s. vers 0 et d'autre part $\sqrt{n}(V_n-\sigma^2)$ converge en loi vers une gaussienne. Par le théorème de Slustky, le produit converge en loi vers 0. Par ailleurs, $\sqrt{n}\phi(u)u^2(V_n-\sigma^2)/2$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,(\sigma u)^4\phi(u)^2/2)$. En appliquant à nouveau le théorème de Slutsky, il vient que $\sqrt{n}(\widetilde{\phi}_n(u)-\phi(u))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,(\sigma u)^4\phi(u)^2/2)$.

(b) Par la question précédente, $\left[\widetilde{\phi}_n(u) - 1,96\sqrt{\frac{(\sigma u)^4\phi(u)^2}{2n}}, \widetilde{\phi}_n(u) + 1,96\sqrt{\frac{(\sigma u)^4\phi(u)^2}{2n}}\right]$ est un intervalle de confiance (asymptotique) de niveau 95% pour $\phi(u)$. Pour comparer les largeurs, il faut comparer $(\sigma u)^4\phi(u)^2/2$ à $\phi(u)^4 - \phi(u)^2 = e^{\sigma^2 u^2}(e^{\sigma^2 u^2} - 1)$. Comme $e^{\sigma^2 u^2} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sigma^2 u^2)^k}{k!} \geq (\sigma u)^4/2$ (terme $k = 2$), on voit que la seconde méthode est plus précise.

7. Par la question 6.a, $\frac{\sqrt{2n}}{\sigma^2 u^2 \phi(u)}(\widetilde{\phi}_n(u) - \phi(u))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. Comme V_n converge p.s. vers σ^2, $\widetilde{\phi}_n(u)$ converge p.s. vers $\phi(u)$. Par le théorème de Slutsky, on en déduit que $\frac{\sqrt{2n}}{V_n u^2 \widetilde{\phi}_n(u)}(\widetilde{\phi}_n(u) - \phi(u))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. Cela donne

$$\left[\widetilde{\phi}_n(u) - 1,96\frac{V_n u^2 \widetilde{\phi}_n(u)}{\sqrt{2n}}, \widetilde{\phi}_n(u) + 1,96\frac{V_n u^2 \widetilde{\phi}_n(u)}{\sqrt{2n}}\right]$$

comme intervalle de confiance asymptotique de niveau 95%, intervalle qui est bien construit uniquement à l'aide de $X_1, \ldots, X_n$.

⋆⋆⋆

Exercice 4.

1. Soit $x \in [0, \theta]$. Par indépendance, il vient $\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n = F(x)^n$. La fonction de répartition de M_n est continument dérivable sur $[0, \theta]$, de dérivée $nF(x)^{n-1}p(x)$. Ainsi, M_n suit la loi de densité $nF(x)^{n-1}p(x)$ (cette densité est bien nulle pour $x \notin [0, \theta]$).
2. Soit $\varepsilon > 0$. $\mathbb{P}(|M_n - \theta| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n \leq \theta - \varepsilon)$ car $\mathbb{P}(M_n \geq \theta) = 0$. Si $\varepsilon \geq \theta$, cette probabilité est nulle. Sinon, elle est égale à $F(\theta - \varepsilon)^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ car $F(\theta - \varepsilon) < 1$ par l'hypothèse iii).
3. On a $M_n \leq M_{n+1}$. Comme toute suite croissante de réels converge, M_n converge (presque) sûrement vers une limite notée M_∞. La convergence p.s. impliquant celle en probabilité, il vient que $\mathbb{P}(M_\infty = \theta) = 1$ et donc M_n converge presque sûrement vers θ.
4. Par intégration par parties, $\mathbb{E}[M_n] = \int_0^\theta xnF(x)^{n-1}p(x)dx = [xF(x)^n]_0^\theta - \int_0^\theta F(x)^n dx = \theta - \int_0^\theta F(x)^n dx$. On a $0 \leq F(x)^n \leq 1$ et pour $x \in [0, \theta[$, $F(x)^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ par l'hypothèse iii). Le théorème de convergence dominée assure donc que $\mathbb{E}[M_n] \underset{n \to +\infty}{\to} \theta$. Enfin, comme $\mathbb{P}(M_n \leq \theta) = 1$, $\mathbb{E}[|M_n - \theta|] = \mathbb{E}[\theta - M_n] = \theta - \mathbb{E}[M_n] \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.
5. On a $\mathbb{E}[g(n(\theta - M_n))] = \int_0^\theta g(n(\theta - x))nF(x)^{n-1}p(x)dx$. En posant $y = n(\theta - x)$, il vient

$$\mathbb{E}[g(n(\theta - M_n))] = \int_0^{n\theta} g(y)F(\theta - y/n)^{n-1}p(\theta - y/n)dy = \int_0^\infty g(y)F(\theta - y/n)^{n-1}p(\theta - y/n)dy,$$

car $p(\theta - y/n) = 0$ pour $y > n\theta$. Pour $z \in]0, \theta]$, on pose $\psi(z) = \frac{1 - F(\theta - z)}{z}$ que l'on prolonge par continuité par $\psi(0) = p(\theta) > 0$. L'hypothèse iii) - qui est d'ailleurs automatiquement assurée lorsque $p(\theta) > 0$ - assure que $\psi(z) > 0$ pour tout $z \in]0, \theta]$. La fonction ψ étant continue sur le compact $[0, \theta]$, elle atteint son minimum et en particulier $\lambda > 0$.

Comme $F(\theta - z) = 1 - p(\theta)z + o(z)$ et $p(\theta) > 0$, on obtient pour $y > 0$

$$F(\theta - y/n)^{n-1} p(\theta - y/n) = (1 - p(\theta)y/n + o(1/n))^{n-1} p(\theta - y/n) \underset{n\to+\infty}{\to} p(\theta)e^{-p(\theta)y}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}|g(y)p(\theta - y/n)F(\theta - y/n)^{n-1}| &\leq \|g\|_\infty \|p\|_\infty \mathbf{1}_{y\geq 0}(1 - \lambda y/n)^{n-1} \\ &\leq \|g\|_\infty \|p\|_\infty e^{-\lambda y \frac{n-1}{n}} \mathbf{1}_{y\geq 0} \leq \|g\|_\infty \|p\|_\infty e^{-\lambda y/2} \mathbf{1}_{y\geq 0},\end{aligned}$$

ce qui donne la domination pour appliquer le théorème de Lebesgue. On en déduit que $\mathbb{E}[g(n(\theta - M_n))] \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^\infty g(y)p(\theta)e^{-p(\theta)y}dy$, c'est à dire que $n(\theta - M_n)$ converge en loi vers $\mathcal{E}(p(\theta))$. Lorsque $p(\theta) = 1$, on fait l'approximation pour n grand que $n(\theta - M_n) \overset{loi}{\approx} \mathcal{E}(1)$. Pour $Z \sim \mathcal{E}(1)$, on a $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - e^{-z}$ et donc $\mathbb{P}(Z \leq z) = \frac{99}{100} \iff z = \ln(100)$. Ainsi, $\mathbb{P}(\theta \leq M_n + \ln(100)/n) \approx 99/100$ et comme $\mathbb{P}(\theta \geq M_n) = 1$, il vient que $[M_n, M_n + \ln(100)/n]$ est un intervalle de confiance pour θ à 99%.

6. Par un calcul analogue, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(\sqrt{n}(\theta - M_n))] &= \int_0^\theta g(\sqrt{n}(\theta - x))nF(x)^{n-1}p(x)dx \\ &= \int_0^\infty g(y)F\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} \sqrt{n}p\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{n}}\right)dx.\end{aligned}$$

On pose $\widetilde{\psi}(z) = \frac{1-F(\theta-z)}{z^2}$ pour $z \in]0,\theta]$ et $\widetilde{\psi}(0) = -p'(\theta)/2 > 0$. Cette fonction est strictement positive et continue sur $[0, z]$, elle atteint donc son minimum $\mu > 0$: $\forall z \in [0,\theta], F(\theta - z) \leq 1 - \mu z^2$. On a $F\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} = (1 + \frac{p'(\theta)y^2}{2n} + o(1/n))^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{\frac{p'(\theta)y^2}{2}}$ et $\sqrt{n}p\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} -p'(\theta)y$. Pour dominer, on utilise que

$$|\sqrt{n}p\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{n}}\right)| = \mathbf{1}_{y\geq 0}\sqrt{n}|p\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - p(\theta)| \leq \mathbf{1}_{y\geq 0}y \sup_{u\in[0,\theta]} |p'(u)|$$

et, comme précédemment, $\mathbf{1}_{y\geq 0}F\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} \leq \mathbf{1}_{y\geq 0}e^{-\mu y^2 \frac{n-1}{n}} \leq \mathbf{1}_{y\geq 0}e^{-\mu y^2/2}$. Cela donne la domination car $\mathbf{1}_{y\geq 0}ye^{-\mu y^2/2}$ est intégrable. Ainsi, $\mathbb{E}[g(\sqrt{n}(\theta - M_n))] \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^\infty g(y)(-p'(\theta))ye^{\frac{p'(\theta)y^2}{2}}dy$, c'est à dire que $\sqrt{n}(\theta - M_n)$ converge en loi vers la loi de densité $(-p'(\theta))ye^{\frac{p'(\theta)y^2}{2}}\mathbf{1}_{y\geq 0}$.