Examen du cours de Probabilités

Mardi 19 Janvier 2021 (8h30-11h30)

Polycopié et notes de cours autorisés. Tout objet électronique est interdit.

Barême indicatif. L'ensemble de l'examen sera noté sur un barême entre 25 et 30 points, et les points seront approximativement répartis de la façon suivante : 1/4 pour l'exercice 1, 1/4 pour l'exercice 2 et 1/2 pour le problème. Il n'est donc pas nécessaire de tout faire pour avoir 20.

Exercice 1. Soit $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Pour toute fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue, on définit :

$$S_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) G_i.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n(f)]$ et $\mathbf{Var}[S_n(f)]$.
2. Donner la loi de $S_n(f)$ ainsi que sa fonction caractéristique.
3. En déduire que $S_n(f)$ converge en loi lorsque $n\to\infty$ vers une loi que l'on précisera.
4. Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ une autre fonction continue. Calculer $\mathbf{Cov}(S_n(f),S_n(g))$ puis donner la loi du vecteur $(S_n(f),S_n(g))$. En déduire que $(S_n(f),S_n(g))$ converge en loi vers un vecteur (X_1,X_2) dont on précisera la loi. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X_1 soit indépendant de X_2.
5. On considère désormais $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite de fonction continue telles que $\int_0^1 f_k^2(x)dx = 1$ et pour tout $k\neq k'$, $\int_0^1 f_k(x)f_{k'}(x)dx = 0$ (une telle suite peut par exemple être obtenue à l'aide des polynômes orthogonaux de Legendre). Donner, pour tout $K\in\mathbb{N}^*$, la limite en loi du vecteur $(S_n(f_1),\ldots,S_n(f_K))$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2.

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X=UV$ et $Y=UV^2$.

1. Calculer les densité des lois de X et de Y.
2. Montrer que $(u,v)\in]0,1[^2 \iff (uv,uv^2)\in D$ où $D\subset]0,1[^2$ est un ouvert que l'on précisera.
3. Calculer la loi de (X,Y), puis retrouver les lois de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

⋆ ⋆ ⋆

Problème. (Optimisation par méthode de Monte-Carlo) Les deux parties sont indépendantes.

Première partie. On considère $((X_i,Y_i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ un échantillon i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose $\mathbb{E}[|X_1|^4+|Y_1|^4]<\infty$. On cherche à expliquer la première coordonnée à l'aide de la seconde coordonnée, et on souhaite minimiser la quantité

$$\theta\in\mathbb{R},\ v(\theta)=\mathbb{E}[(X_1-\theta Y_1)^2]$$

par rapport à θ. Par exemple, dans une espèce donnée, X_i peut représenter la taille d'un individu i et Y_i son poids : on cherche à trouver le coefficient θ qui explique le mieux au sens des moindres carrés la taille en fonction du poids. On suppose $\mathbf{Var}(X_1), \mathbf{Var}(Y_1) > 0$.

1. Calculer $v'(\theta)$ et $v''(\theta)$.
2. En déduire que v admet un unique minimum $\theta^* = \frac{\mathbb{E}[X_1 Y_1]}{\mathbb{E}[Y_1^2]}$.

On approche la fonction $v(\theta)$ par son estimateur Monte-Carlo $v_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta Y_i)^2$

3. Donner le comportement asymptotique de $v_n(\theta)$ lorsque $n \to \infty$.
4. Calculer $v_n'(\theta)$. Montrer que sur l'événement $A_n = \{\sum_{i=1}^n Y_i^2 > 0\}$, il existe un unique $\theta_n \in \mathbb{R}$ tel que $v_n(\theta_n) = \min_{\theta\in\mathbb{R}} v_n(\theta)$ et donner son expression en fonction de $((X_i, Y_i))_{1\leq i\leq n}$.
5. Montrer que θ_n converge vers θ^* presque sûrement.
6. On pose $U_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \mathbb{E}[Y_1^2]\right)$ et $V_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \mathbb{E}[X_1 Y_1]\right)$. Montrer que $\sqrt{n}(\theta_n - \theta^*) = \frac{1}{\mathbb{E}[Y_1^2]}[V_n - \theta_n U_n]$. En déduire le comportement asymptotique de $\sqrt{n}(\theta_n - \theta^*)$. (On commencera par donner le comportement de $\frac{1}{\mathbb{E}[Y_1^2]}[V_n - \theta^* U_n]$.)
7. Donner le comportement asymptotique de (U_n, V_n) lorsque $n \to +\infty$.

Deuxième partie. On souhaite désormais étudier dans un cadre général le problème d'optimisation. On considère une fonction $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fois continument dérivable par rapport à la première variable, telle que :

— il existe une fonction continue $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$|\varphi(\theta, x)| + |\partial_\theta \varphi(\theta, x)| + |\partial_\theta^2 \varphi(\theta, x)| \leq C(\theta)(1 + |x|^2),$$

— pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\theta \mapsto \partial_\theta\varphi(\theta, x)$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ (et donc $\lim_{\theta\to\pm\infty} \partial_\theta\varphi(\theta, x) = \pm\infty$), et $\partial_\theta^2\varphi(\theta, x) > 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

On considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telles que $\mathbb{E}[|X_1|^4] < \infty$. On pose $v(\theta) = \mathbb{E}[\varphi(\theta, X_1)]$ et $v_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi(\theta, X_i)$.

8. Donner le comportement asymptotique de $v_n(\theta)$ lorsque $n \to \infty$.
9. Montrer qu'il existe un unique $\theta_n \in \mathbb{R}$ tel que v_n est strictement décroissante sur $]-\infty, \theta_n[$ et croissante sur $]\theta_n, +\infty[$, et $v_n(\theta_n) = \min_{\theta\in\mathbb{R}} v_n(\theta)$. (On admettra que θ_n est bien une variable aléatoire.)
10. Montrer que $v'(\theta) = \mathbb{E}[\partial_\theta\varphi(\theta, X_1)]$, que cette fonction est C^1 et donner les limites de $v'(\theta)$ lorsque $\theta \to \pm\infty$. En déduire qu'il existe un unique θ^* tel que $v(\theta^*) = \min_{\theta\in\mathbb{R}} v(\theta)$.
11. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\eta_\varepsilon = \min(v(\theta^* - \varepsilon) - v(\theta^*), v(\theta^* + \varepsilon) - v(\theta^*)) > 0$. Montrer que, presque sûrement, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N,\ v_n(\theta^* - \varepsilon) \geq v(\theta^*) + \eta_\varepsilon/2,\ v_n(\theta^* + \varepsilon) \geq v(\theta^*) + \eta_\varepsilon/2 \text{ et } v_n(\theta^*) < v(\theta^*) + \eta_\varepsilon/2.$$
En déduire que $\theta_n \in [\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon]$ pour $n \geq N$, puis conclure sur le comportement asymptotique de θ_n.
12. Montrer qu'il existe $\tilde{\theta}_n \in [\theta^*, \theta_n]$ si $\theta^* \leq \theta_n$, $\tilde{\theta}_n \in [\theta_n, \theta^*]$ sinon tel que
$$-v_n'(\theta^*) = v_n''(\tilde{\theta}_n)(\theta_n - \theta^*).$$
13. Donner le comportement asymptotique de $\sqrt{n} v_n'(\theta^*)$. On suppose en outre que $|\partial_\theta^3\varphi(\theta, x)| \leq C(\theta)(1 + |x|^2)$. Montrer que $v_n''(\tilde{\theta}_n) - v_n''(\theta^*) \to 0$ p.s. En déduire que $\sqrt{n}(\theta^n - \theta^*)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, v''(\theta^*)^{-2}\mathbf{Var}(\partial_\theta\varphi(X_1, \theta^*)))$ lorsque $n \to \infty$.
14. Retrouver le résultat de la première partie, question 6.

Corrigé

Exercice 1.

1. Par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}[S_n(f)] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)\mathbb{E}[G_i] = 0$. En utilisant l'indépendance, $\mathbf{Var}[S_n(f)] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)^2 \mathbf{Var}[G_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)^2$.
2. Les v.a. gaussiennes G_i sont indépendantes donc $(G_0, \ldots, G_{n-1})$ est un vecteur gaussien. Ainsi, $S_n(f)$ suit une loi gaussienne comme combinaison linéaire de ce vecteur. La question précédente donne les paramètres de cette loi :

$$S_n(f) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)^2) \text{ et } \Phi_{S_n(f)}(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)^2 \right).$$

3. Par hypothèse, la fonction f est continue ce qui assure la convergence des sommes de Riemann $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)^2$ vers $\int_0^1 f^2(x)dx$. On a donc convergence simple de la fonction caractéristique, ce qui assure que $S_n(f) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, \int_0^1 f^2(x)dx)$.
4. Par indépendance des variables aléatoires G_i on a $\mathbf{Cov}(G_i, G_j) = \mathbf{1}_{i=j}$. Il vient

$$\mathbf{Cov}(S_n(f), S_n(g)) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=0}^{n-1} f(i/n)g(j/n)\mathbf{Cov}(G_i, G_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)g(i/n).$$

   Le vecteur $(S_n(f), S_n(g))$ étant obtenu comme transformation affine de $(G_0, \ldots, G_{n-1})$, il suit la loi d'un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma_n := \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(i/n) & \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)g(i/n) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)g(i/n) & \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g^2(i/n) \end{bmatrix}.$$

   Sa fonction caractéristique $\mathbb{R}^2 \ni u \mapsto \exp(-u.\Gamma_n u/2)$ converge donc simplement vers la fonction caractéristique de (X_1, X_2) où (X_1, X_2) est un vecteur gaussien centré de matrice de convariance

$$\Gamma := \begin{bmatrix} \int_0^1 f^2(x)dx & \int_0^1 f(x)g(x)dx \\ \int_0^1 f(x)g(x)dx & \int_0^1 g^2(x)dx \end{bmatrix},$$

   ce qui donne la convergence en loi. Comme (X_1, X_2) est un vecteur gaussien, l'indépendance de X_1 et X_2 est équivalente à avoir Γ diagonale, i.e. $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$.
5. De façon analogue à la question précédente $(S_n(f_1), \ldots, S_n(f_K))$ est un vecteur gaussien centré qui converge en loi vers un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $(\int_0^1 f_i(x)f_j(x)dx)_{1 \leq i,j \leq K} = I_K$ où I_K est la matrice identité de dimension K. Ainsi, le vecteur $(S_n(f_1), \ldots, S_n(f_K))$ converge en loi vers un vecteur de K gaussiennes centrées réduites indépendantes.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2.

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = UV$ et $Y = UV^2$.

1. On utilise le théorème de la fonction muette. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée mesurable. Par indépendance de U et V, la densité de (U, V) est la densité produit. Il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X)] &= \int_0^1 \int_0^1 f(uv)dudv = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(uv)du \right) dv \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^v \frac{f(x)}{v} dx \right) dv = \int_0^1 \int_0^1 f(x) \frac{\mathbf{1}_{x \leq v}}{v} dv dx \\ &= \int_0^1 f(x) \left(\int_x^1 \frac{1}{v} dv \right) = \int_0^1 f(x)(-\ln(x))dx,\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini à la 2è, 4è et 5è égalité et le changement de variable $x = uv$ à v fixé pour la 3è égalité. Il vient que X suit la loi de densité $(-\ln(x))\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$.
De la même façon, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y)] &= \int_0^1 \int_0^1 f(uv^2)dudv = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(uv^2)du \right) dv \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{v^2} \frac{f(x)}{v^2} dx \right) dv = \int_0^1 \int_0^1 f(x) \frac{\mathbf{1}_{x \leq v^2}}{v^2} dv dx \\ &= \int_0^1 f(x) \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{1}{v^2} dv \right) = \int_0^1 f(x) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx,\end{aligned}$$

et Y suit la loi de densité $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$.

2. Soit $(u, v) \in]0, 1[^2$. On pose $x = uv$ et $y = uv^2$: on a donc $v = y/x \in]0, 1[$ et $u = x^2/y \in]0, 1[$, ce qui donne $x^2 < y < x$. Ainsi on définit $D = \{(x, y) \in]0, 1[^2 \colon x^2 < y < x\}$ et on a prouvé que $(u, v) \in]0, 1[\implies (uv, uv^2) \in D$. Réciproquement si $(uv, uv^2) \in D$ alors on a $uv^2 > 0$ et donc $u > 0$. Comme $uv > 0$, on a alors $v > 0$. L'inégalité $(uv)^2 < uv^2 < uv$ donne alors $u < 1$ et $v < 1$.

3. L'application $\phi :]0, 1[^2 \to D$ définie par $\phi(u, v) = (uv, uv^2)$ est un C^1 difféomorphisme de réciproque $\phi^{-1}(x, y) = (x^2/y, y/x)$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Son jacobien est donné par $\det \left(\begin{bmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix} \right) = 1/y$. On a par le théorème de changement de variable

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X, Y)] &= \int_0^1 \int_0^1 f(uv, uv^2)dudv \\ &= \int_D f(x, y)/y dxdy,\end{aligned}$$

et donc (X, Y) suit la loi de densité $\frac{1}{y}\mathbf{1}_D(x, y)$. Par la formule des densités marginales $\mathbf{1}_{]0,1[}(x) \int_0^1 \frac{1}{y} \mathbf{1}_{x^2<y<x} dy = \mathbf{1}_{]0,1[}(x)(-\ln(x))$ est la densité de X et $\mathbf{1}_{]0,1[}(y) \int_0^1 \frac{1}{y} \mathbf{1}_{y<x<\sqrt{y}} dx = \mathbf{1}_{]0,1[}(y) \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right)$ est la densité de Y. Les variables aléatoires ne sont pas indépendantes car $\frac{1}{y}\mathbf{1}_D(x, y)$ n'est pas le produit des densités marginales (car ce produit est strictement positif sur $]0, 1[^2$).

$\star \star \star$

Problème.

1. En développant le carré et par linéarité de l'espérance, il vient $v(\theta) = \mathbb{E}[X_1^2] - 2\theta\mathbb{E}[X_1Y_1] + \theta^2\mathbb{E}[Y_1^2]$. D'où $v'(\theta) = 2(\theta\mathbb{E}[Y_1^2] - \mathbb{E}[X_1Y_1])$ et $v''(\theta) = 2\mathbb{E}[Y_1^2]$.
2. Il s'agit du minimum d'une parabole : $\theta^* = \frac{\mathbb{E}[X_1Y_1]}{\mathbb{E}[Y_1^2]}$.
3. Par hypothèse, $\mathbb{E}[(X_1 - \theta Y_1)^2] < \infty$, et par la loi forte des grands nombres, il vient que $v_n(\theta)$ converge p.s. vers $v(\theta)$ lorsque $n \to \infty$.
4. On a $v_n'(\theta) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \theta Y_i^2 - X_iY_i$. A nouveau, $v_n(\theta)$ est un polynôme de degré deux avec coefficient d'ordre deux positif sur A_n et a un unique minimum
$$\theta_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_iY_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2}.$$
5. La suite des évenements A_n est croissante, et la loi forte des grands nombre assure que $\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = 1)$. Autrement dit, θ_n est p.s. défini à partir d'un certain rang. On utilise la loi forte des grands nombres, l'intégrabilité de X_1Y_1 et de Y_1^2 et la continuité de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \ni (x, y) \mapsto x/y$ pour obtenir que θ_n converge presque sûrement vers θ^* lorsque $n \to \infty$.
6. On a
$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\theta_n - \theta^*) &= \sqrt{n}\frac{\mathbb{E}[Y_1^2]\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_iY_i - \mathbb{E}[X_1Y_1]\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2}{\mathbb{E}[Y_1^2]\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2} \\ &= \sqrt{n}\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_iY_i\right)\left(\mathbb{E}[Y_1^2] - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2\right) + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_iY_i - \mathbb{E}[X_1Y_1]\right)}{\mathbb{E}[Y_1^2]\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[Y_1^2]}(-\theta_nU_n + V_n).\end{aligned}$$
On a donc $\sqrt{n}(\theta_n - \theta^*) = \frac{1}{\mathbb{E}[Y_1^2]}(V_n - \theta^*U_n) + \frac{1}{\mathbb{E}[Y_1^2]}(\theta^* - \theta_n)U_n$. Par le théorème de la limite centrale ($\mathbb{E}[Y_1^4] < \infty$), U_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \mathbf{Var}(Y_1^2))$. Le théorème de Slutsky assure alors que $\frac{1}{\mathbb{E}[Y_1^2]}(\theta^* - \theta_n)U_n$ converge en loi vers 0. Comme $X_1Y_1 - \theta^*Y_1^2$ est de carré intégrable, le théorème de la limite centrale assure que $V_n - \theta^*U_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \mathbf{Var}(X_1Y_1 - \theta^*Y_1^2))$. En utilisant à nouveau le théorème de Slutsky, il vient que $\sqrt{n}(\theta_n - \theta^*)$ converge en loi vers $\mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbf{Var}(X_1Y_1 - \theta^*Y_1^2)}{\mathbb{E}[Y_1^2]^2}\right)$.
7. Il s'agit d'une application directe du Théorème de la limite centrale en dimension 2 : (U_n, V_n) converge en loi vers un couple gaussien centré de matrice de covariance la matrice de covariance du vecteur (X_1Y_1, Y_1^2).

Deuxième partie.

8. En utilisant la loi forte des grands nombres, $v_n(\theta)$ converge p.s. vers $v(\theta)$ lorsque $n \to \infty$.
9. Par hypothèse, $v_n'(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \partial_\theta\varphi(\theta, X_i)$ est strictement croissante, continue telle que $v_n'(\theta) \to_{n\to\pm\infty} \pm\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\theta_n \in \mathbb{R}$ tel que $v_n'(\theta_n) = 0$, $v_n'(\theta) < 0$ pour $\theta < \theta_n$ et $v_n'(\theta) > 0$ pour $\theta > \theta_n$, ce qui donne le résultat.

10. Soit $[-1,1] \ni a_n \to 0$. On a la domination $|\varphi(\theta+a_n, X_1)-\varphi(\theta, X_1)|/|a_n| \leq \sup_{a\in[-1,1]} C(\theta+a)(1+|X_1|^2)$ et $\varphi(\theta+a_n, X_1)-\varphi(\theta, X_1)/a_n \to \partial_\theta\varphi(\theta, X_1)$. Le théorème de convergence dominée assure que $v'(\theta) = \mathbb{E}[\partial_\theta\varphi(\theta, X_1)]$. De même on montre que $v''(\theta) = \mathbb{E}[\partial_\theta^2\varphi(\theta, X_1)]$ et v'' est continue : si $[-1,1] \ni a_n \to 0$, $|\partial_\theta^2\varphi(\theta+a_n, X_1)| \leq \sup_{a\in[-1,1]} C(\theta+a)(1+|X_1|^2)$ et $\partial_\theta^2\varphi(\theta+a_n, X_1) \to \partial_\theta^2\varphi(\theta, X_1)$, ce qui assure par convergence dominée que $v''(\theta_n) \to v''(\theta)$. Des limites $\partial_\theta\varphi(\theta, X_1) \to_{\theta\to\pm\infty} \pm\infty$, on déduit par convergence monotone que $v'(\theta) \to_{\theta\to\pm\infty} \pm\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique θ^* tel que $v'(\theta^*) = 0$, $v'(\theta) < 0$ pour $\theta < \theta^*$ et $v'(\theta) > 0$ pour $\theta > \theta^*$, ce qui donne le résultat.
11. Grâce à la question 8, nous savons que $(v_n(\theta^*-\varepsilon), v_n(\theta^*), v_n(\theta^*+\varepsilon))$ converge p.s vers $(v(\theta^*-\varepsilon), v(\theta^*), v(\theta^*+\varepsilon))$, ce qui donne p.s. l'existence d'un tel N. Ainsi, on a pour $n \geq N$, $v_n(\theta^*) < v(\theta^*)+\eta_\varepsilon/2 \leq v_n(\theta^*\pm\varepsilon)$. En utilisant les variations de la fonction v_n obtenues à la question 9, il vient que $\theta_n \in [\theta^*-\varepsilon, \theta^*+\varepsilon]$. [En effet, on aurait sinon $\theta_n < \theta^*-\varepsilon$ ou $\theta^*+\varepsilon < \theta_n$, ce qui donnerait $v_n(\theta^*-\varepsilon) < v_n(\theta^*) < v_n(\theta^*+\varepsilon)$ ou $v_n(\theta^*-\varepsilon) > v_n(\theta^*) > v_n(\theta^*+\varepsilon)$.] Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela assure que θ_n converge presque sûrement vers θ^*.
12. On applique l'égalité de Taylor à la fonction v_n : il existe $\tilde{\theta}_n$ compris entre θ_n et θ^* tel que $v_n'(\theta_n) - v_n'(\theta^*) = v_n''(\tilde{\theta}_n)(\theta_n - \theta^*)$. Cela donne le résultat car $v_n'(\theta_n) = 0$
13. On a $\sqrt{n}v_n'(\theta^*) = \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \partial_\theta\varphi(\theta^*, X_i) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \partial_\theta\varphi(\theta^*, X_i) - \mathbb{E}[\partial_\theta\varphi(\theta^*, X_1)]\right)$ car $v'(\theta^*) = \mathbb{E}[\partial_\theta\varphi(\theta^*, X_1)] = 0$. Le théorème de la limite centrale (on a bien $\mathbb{E}[\varphi(\theta^*, X_1)^2] < \infty$ par hypothèse) assure que $\sqrt{n}v_n'(\theta^*)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \mathbf{Var}(\partial_\theta\varphi(\theta^*, X_1)))$.
On a $|\partial_\theta^2\varphi(\tilde{\theta}_n, X_i) - \partial_\theta^2\varphi(\theta^*, X_i)| \leq \sup_{\theta\in[\theta^*,\tilde{\theta}_n]} C(\theta)(1+|X_i|^2)|\tilde{\theta}_n - \theta^*|$ et donc
$$|v_n''(\tilde{\theta}_n) - v_n''(\theta^*)| \leq \sup_{\theta\in[\theta^*,\tilde{\theta}_n]} C(\theta)|\tilde{\theta}_n - \theta^*|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(1+|X_i|^2).$$
Comme $\tilde{\theta}_n \to \theta^*$ p.s., C est continue et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(1+|X_i|^2) \to \mathbb{E}[(1+|X_1|^2)]$ p.s. par la loi forte des grands nombres, cela donne la convergence p.s. vers 0 de $v_n''(\tilde{\theta}_n) - v_n''(\theta^*)$ et donc la convergence de $v_n''(\tilde{\theta}_n)$ vers $v''(\theta^*)$. Le théorème de Slutsky assure alors que $\sqrt{n}(\theta_n - \theta^*)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, v''(\theta^*)^{-2}\mathbf{Var}(\partial_\theta\varphi(X_1, \theta^*))$ lorsque $n \to \infty$.
14. On applique ce résultat à $\varphi(\theta, x) = (x_1 - \theta x_2)^2$. On a bien $\partial_\theta\varphi(\theta, x) = 2(\theta x_2^2 - x_1x_2)$ et $\partial_\theta^2\varphi(\theta, x) = 2x_2^2$: on retrouve le résultat de la question 6.