Examen du cours de Probabilités

Mardi 17 Janvier 2023 (8h30-11h30)

Polycopié et notes de cours autorisés. Tout objet électronique est interdit.

Barême indicatif. L'ensemble de l'examen sera noté sur un barême entre 25 et 30 points, et les points seront approximativement répartis de la façon suivante : 40% pour le premier exercice et 30% pour les deux autres. Il n'est donc pas nécessaire de tout faire pour avoir 20.

Exercice 1. Formule de Post-Widder

On considère $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, et on définit pour $t > 0$,

$$\hat{h}(t) = \int_0^\infty e^{-tz} h(z) dz,$$

sa transformée de Laplace.

On considère une suite i.i.d. $(U_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$.

1. Pour $x > 0$, donner la loi de $-x \log(U_1)$. Cette loi est elle intégrable ? De carré intégrable ?
2. Donner le comportement asymptotique de $h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n[-x\log(U_i)]\right)$ lorsque $n \to \infty$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n[-x\log(U_i)]\right)] \underset{n\to\infty}{\to} h(x)$.
4. A l'aide de la première question, donner sans calcul la loi de $Z_n := \sum_{i=1}^n[-x\log(U_i)]$. En déduire que
$$\mathbb{E}\left[h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n[-x\log(U_i)]\right)\right] = \int_0^\infty h(z)\frac{n^n}{x^n(n-1)!}z^{n-1}e^{-\frac{n}{x}z}dz.$$
5. Montrer que la fonction $\hat{h}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\hat{h}'(t) = -\int_0^\infty ze^{-tz}h(z)dz$ pour $t > 0$. Montrer ensuite que $\hat{h}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner la valeur de $\hat{h}^{(n)}(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire la formule d'inversion de Post-Widder :
$$h(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^n\hat{h}^{(n-1)}(n/x)}{x^n(n-1)!},\ x > 0.$$
6. On suppose pour cette question que h est de classe C^2 telle que $|h''(x)| \leq M$ pour tout $x \geq 0$. En utilisant un développement de Taylor au voisinage de x, montrer que
$$\left|\frac{(-1)^{n-1}n^n\hat{h}^{(n-1)}(n/x)}{x^n(n-1)!} - h(x)\right| \leq \frac{Mx^2}{2n}.$$

On s'intéresse désormais à un calcul par Monte-Carlo de $\hat{h}(t)$, pour $t > 0$. **Cette seconde partie de l'exercice est indépendante de la première.**

7. Montrer que $\hat{h}(t) = \frac{1}{t}\mathbb{E}[h(-\frac{1}{t}\log(U_1))]$.
8. On pose $M_n(t) = \frac{1}{nt}\sum_{i=1}^n h(-\frac{1}{t}\log(U_i))$ pour $n \geq 1$. Donner le comportement asymptotique de $M_n(t)$ et de $\sqrt{n}(M_n(t) - \hat{h}(t))$.
9. On pose $V_n(t) = \frac{1}{nt^2}\sum_{i=1}^n h^2(-\frac{1}{t}\log(U_i)) - M_n(t)^2$. Donner le comportement asymptotique de $V_n(t)$ puis construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour $\hat{h}(t)$ à l'aide de $M_n(t)$ et $V_n(t)$.
10. On considère un deuxième instant $t' > 0$. Quel est le comportement asymptotique de $\sqrt{n}(M_n(t) - \hat{h}(t), M_n(t') - \hat{h}(t'))$?

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite et $E \sim \mathcal{E}(1/2)$ une variable aléatoire exponentielle indépendante. On pose $Y = \frac{X+\sqrt{X^2+E}}{2}$ et $\hat{Y} = \frac{-X+\sqrt{X^2+E}}{2}$.

1. Calculer la loi de $|X|$ (on donnera sa densité). Calculer $\mathbb{E}[|X|]$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(x,0)$. Montrer que $\psi_x(z) = \frac{x+\sqrt{x^2+z}}{2}$ est bijective entre $\mathbb{R}_+^*$ et un ensemble à préciser. Calculer ensuite la loi de Y, et montrer que Y suit la même loi que $|X|$.
3. Donner sans calcul la loi de $\hat{Y}$. Montrer que $Y\hat{Y} \sim \mathcal{E}(2)$. Comparer $\mathbb{E}[Y\hat{Y}]$ et $\mathbb{E}[|X|]^2$: les variables Y et $\hat{Y}$ sont elles indépendantes ?
4. Soit $X' \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendante de X. Montrer que $\mathbb{P}(X < |X'|) < 1$ et que $\mathbb{P}(X < Y) = 1$. Les variables aléatoires X et Y sont elle indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{P}(Y = |X|)$, et en déduire que (X,Y) et $(X,|X|)$ n'ont pas la même loi.
6. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $z > 0$, on définit $\varphi(x,z) = \left(\frac{x+\sqrt{x^2+z}}{2}, \frac{-x+\sqrt{x^2+z}}{2}\right)$. Montrer soigneusement que φ définit un C^1-difféomorphisme entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et un ensemble à préciser. Calculer ensuite la densité du couple $(Y,\hat{Y})$.
7. Retrouver la densité de la variable aléatoire Y. Exprimer (X,Y) à l'aide de $(Y,\hat{Y})$, puis calculer la loi de (X,Y).

⋆⋆⋆

Exercice 3. On sait par le cours que deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in \Phi,\ \mathbb{E}[\phi_1(X)\phi_2(Y)] = \mathbb{E}[\phi_1(X)]\mathbb{E}[\phi_2(Y)], \tag{1}$$

où Φ est une famille de fonctions test assez large. C'est le cas par exemple pour $\Phi = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\text{ bornée mesurable}\}$ (théorème de la fonction muette), $\Phi = \{f(x) = e^{iux}, u \in \mathbb{R}\}$ (fonction caractéristique) ou $\Phi = \{f(x) = \mathbf{1}_{x\le u}, u \in \mathbb{R}\}$ (fonction de répartition). L'objectif de cet exercice est de savoir si on peut prendre $\phi_1 = \phi_2$ dans (1), c'est à dire si

$$\forall \phi \in \Phi,\ \mathbb{E}[\phi(X)\phi(Y)] = \mathbb{E}[\phi(X)]\mathbb{E}[\phi(Y)] \overset{?}{\Longrightarrow} X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \tag{2}$$

1. On considère $A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x - \frac{1}{2} \le y \le x \text{ ou } x + \frac{1}{2} \le y\}$.
   Soit (X,Y) une variable aléatoire loi uniforme sur A (densité $p(x,y) = 2\mathbf{1}_A(x,y)$). Commencer par représenter A sur un dessin, puis montrer que X et Y suivent des lois uniformes sur $[0,1]$.
2. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
3. Calculer, pour $u \in [0,1]$, $\mathbb{P}(X \le u, Y \le u)$ et $\mathbb{P}(X \le u)\mathbb{P}(Y \le u)$. L'implication (2) est-elle vraie pour $\Phi = \{f(x) = \mathbf{1}_{x\le u}, u \in \mathbb{R}\}$?
4. Calculer, pour $u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{iu(X+Y)}]$ (Indication : découper l'intégrale pour $x \in [0,1/2]$ et $x \in [1/2,1]$). Comparer avec $\mathbb{E}[e^{iuX}]\mathbb{E}[e^{iuY}]$. L'implication (2) est-elle vraie pour $\Phi = \{f(x) = e^{iux}, u \in \mathbb{R}\}$?
5. On considère maintenant une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, et on pose $F(x) = \int_0^x f(z)dz$. Montrer que $\mathbb{E}[f(X)f(Y)] = F(1)^2$ (on pourra montrer l'égalité suivante : $\int_0^{1/2} f(x)\left(\int_{x+1/2}^1 f(y)dy\right)dx = \int_{1/2}^1 f(x)\left(\int_0^{x-1/2} f(y)dy\right)dx$). Conclure sur l'implication (2) pour $\Phi = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\text{ bornée mesurable}\}$.

Correction

Exercice 1.

1. D'après le cours (simulation, méthode d'inversion de la fonction de répartition), $-x\log(U_1)$ suit une loi exponentielle de paramètre $1/x$. Il s'agit d'une loi intégrable et de carré intégrable.
2. L'intégrabilité permet d'appliquer la loi forte des grands nombres qui donne $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n -x\log(U_i) \to x$, presque sûrement. La fonction h étant continue, il vient que $h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n -x\log(U_i)\right) \to h(x)$, presque sûrement.
3. Par hypothèse, la fonction h est bornée, c'est à dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq 0 |h(x)| \leq C$. Cela donne la domination de la suite $h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n -x\log(U_i)\right)$, et on conclut par convergence dominée.
4. D'après la question 1, $-x\log(U_1) \sim \Gamma(1, 1/x)$. En utilisant l'indépendance, un résultat du cours (proposition 3.4.4) donne $Z_n \sim \Gamma(n, 1/x)$. Il vient

$$\mathbb{E}[h(Z_n/n)] = \int_0^\infty h(z/n)\frac{1}{x^n\Gamma(n)z^{n-1}}e^{-z/x}dz = \int_0^\infty h(z')\frac{n^n}{x^n(n-1)!}(z')^{n-1}e^{-nz'/x}dz',$$

en posant $z' = z/n$.
5. Soit $\epsilon > 0$. On utilise le théorème de dérivation sous l'intégrale en utilisant la domination $|ze^{-tz}h(z)| \leq Cze^{-\epsilon z}$ pour $t \geq \epsilon$. Cela donne que h est C^1 sur $[\epsilon, +\infty[$, et $\hat{h}'(t) = -\int_0^\infty ze^{-tz}h(z)dz$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on obtient que h est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On montre ensuite de la même façon par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $\hat{h}$ est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\hat{h}^{(n)}(t) = (-1)^n\int_0^\infty z^n e^{-tz}h(z)dz$. Ainsi, on a

$$(-1)^{n-1}\hat{h}^{(n-1)}(n/x) = \int_0^\infty z^{n-1}e^{-nz/x}h(z)dz,$$

et on conclut à l'aide des deux questions précédentes.
6. La formule de Taylor à l'ordre deux donne

$$h(Z_n/n) - h(x) = h'(x)(Z_n/n - x) + \int_x^{Z_n/n}(Z_n/n - y)h''(y)dy.$$

En prenant l'espérance, on obtient

$$\frac{(-1)^{n-1}n^n\hat{h}^{(n-1)}(n/x)}{x^n(n-1)!} - h(x) = \mathbb{E}\left[\int_x^{Z_n/n}(Z_n/n - y)h''(y)dy\right].$$

On utilise alors l'inégalité triangulaire, la majoration $|\int_x^z(z-y)h''(y)dy| \leq \frac{M}{2}(z-x)^2$ et $\mathbb{E}[(Z_n/n - x)^2] = \mathbf{Var}(Z_n/n) = x^2/n$ pour conclure.
7. D'après la question 1, $-\frac{1}{t}\log(U_1) \sim \mathcal{E}(t)$ donc $\mathbb{E}[h(-\frac{1}{t}\log(U_1))] = \int_0^\infty h(z)te^{-tz}dz = t\hat{h}(t)$.
8. Comme h est bornée, la variable aléatoire $\frac{1}{t}h(-\frac{1}{t}\log(U_1))$ est bornée donc intégrable et de carré intégrable. La loi forte des grands nombres donne $M_n(t) \to \hat{h}(t)$, p.s., et le théorème de la limite centrale donne la convergence en loi de $\sqrt{n}(M_n(t) - \hat{h}(t))$ vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t))$, où $\sigma^2(t) = \int_0^\infty h^2(z)\frac{e^{-tz}}{t}dz - \hat{h}(t)^2$.
9. A nouveau, h^2 est bornée et on peut appliquer la loi forte des grands nombres : $\frac{1}{nt^2}\sum_{i=1}^n h^2(-\frac{1}{t}\log(U_i)) \to \int_0^\infty h^2(z)\frac{e^{-tz}}{t}dz$, p.s. La continuité de $(x, y) \mapsto x - y^2$ assure alors que $V_n(t) \to \sigma^2(t)$, p.s. On obtient alors à l'aide du théorème de Slutsky que $\sqrt{n/V_n}(M_n(t) - \hat{h}(t))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, $[M_n(t) - 1,96\sqrt{\frac{V_n(t)}{n}}, M_n(t) + 1,96\sqrt{\frac{V_n(t)}{n}}]$ est un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour $\hat{h}(t)$.

10. La variable aléatoire $\big(\frac{1}{t}h(-\frac{1}{t}\log(U_1)), \frac{1}{t'}h(-\frac{1}{t'}\log(U_1))\big)$ est bornée donc de carré intégrable. On peut donc utiliser le Théorème de la limite centrale multidimensionnel pour obtenir que $\sqrt{n}(M_n(t) - \hat{h}(t), M_n(t') - \hat{h}(t'))$ converge en loi vers un vecteur gaussien centré de dimension 2 et de matrice de covariance $\Sigma(t,t')$ avec $\Sigma_{1,2}(t,t') = \frac{1}{tt'}\int_0^1 h(-\frac{1}{t}\log(u))h(-\frac{1}{t'}\log(u))du - \hat{h}(t)\hat{h}(t')$, $\Sigma_{1,1}(t,t') = \sigma^2(t)$ et $\Sigma_{2,2}(t,t') = \sigma^2(t')$.

⋆⋆⋆

EXERCICE 2.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée mesurable. On a

$$\mathbb{E}[f(|X|)] = \int_{\mathbb{R}} f(|x|)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = 2\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx,$$

par parité de la fonction intégrée. Donc $|X|$ suit la loi de densité $2\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{x\geq 0}$ par le théorème de la fonction muette. De plus, $\mathbb{E}[|X|] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty xe^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

2. La fonction ψ_x est continue, strictement croissante et est donc bijective entre $\mathbb{R}_+^*$ et $]x^+, \infty[$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée mesurable. On a également par indépendance de X et E,

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty f(\psi_x(z))\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}dxdz = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^\infty f(\psi_x(z))\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}dz\right)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx,$$

en utilisant le théorème de Fubini. On pose, à x fixé $y = \psi_x(z) = \frac{x+\sqrt{x^2+z}}{2}$: c'est un changement de variable bijectif de réciproque $z = (2y-x)^2 - x^2 = 4(y-x)y$ et $dy = \frac{1}{2\sqrt{x^2+z}}dz = \frac{1}{4(2y-x)}dz$. Il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y)] &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{x^+}^\infty f(y)e^{-2(y-x)y}2(2y-x)dy\right)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty f(y)\mathbf{1}_{x^+\leq y}e^{-2(y-x)y}2(2y-x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dxdy \\ &= \int_0^\infty f(y)2\left(\int_{-\infty}^y (2y-x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}+2xy-2y^2}}{\sqrt{2\pi}}dx\right)dy.\end{aligned}$$

On a $\int_{-\infty}^y (2y-x)e^{-\frac{x^2}{2}+2xy-2y^2}dx = e^{-2y^2}[e^{-\frac{x^2}{2}+2xy}]_{x=-\infty}^y = e^{-\frac{y^2}{2}}$, et donc

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_0^\infty f(y)2\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy,$$

ce qui prouve que Y a même loi que $|X|$ par le théorème de la fonction muette.

3. La variable aléatoire $\hat{Y}$ a même loi que Y puisque $(-X, E)$ a même loi que (X, E) en utilisant la symétrie de la loi gaussienne et l'indépendance entre X et E. On a $Y\hat{Y} = \frac{E}{4}$. D'après le chapitre de simulation, une $-\frac{1}{\lambda}\log(U) \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Ainsi, $\frac{E}{4} \overset{loi}{=} \frac{-2\log(U)}{4} = \frac{-\log(U)}{2}$ et donc $Y\hat{Y} \sim \mathcal{E}(2)$. Donc $\mathbb{E}[Y\hat{Y}] = 1/2$ est différent de $\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[\hat{Y}] = \frac{2}{\pi}$ (question 1) : les variables Y et $\hat{Y}$ ne sont pas indépendantes.

4. On a par indépendance de X et X', $\mathbb{P}(X < |X'|) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X<|X'|}] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{x<|y|} \frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi} dxdy$. L'ensemble $\{(x,y) : x \geq |y|\}$ est de mesure de Lebesgue positive, et donc

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{x\geq|y|} \frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi} dxdy > 0,$$

ce qui prouve que $\mathbb{P}(X < |X'|) < 1$. Par ailleurs, on a $Y \geq X$ avec $\{Y = X\} \subset \{E = 0\}$ Ce qui prouve que $\mathbb{P}(Y = X) = 0$ et donc $\mathbb{P}(Y > X) = 1$. Si X et Y étaient indépendantes, (X,Y) et $(X, |X'|)$ suivraient la même loi puisque X est indépendante de X' et $|X'|$ a même loi que Y d'après la question précédente. Cela donnerait $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X < |X'|)$ ce qui est impossible.

5. On observe que $\{Y = |X|\}$ est l'union disjointe des deux événements $\{X \geq 0, E = 0\}$ et $\{X < 0, E = 8X^2\}$ et donc

$$\mathbb{P}(Y = |X|) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty (\mathbf{1}_{x\geq 0, z=0} + \mathbf{1}_{x<0, z=8x^2}) \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} dz \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = 0.$$

Si (X,Y) avait même loi que $(X, |X|)$, on aurait $\mathbb{P}(Y = |X|) = \mathbb{P}(|X| = |X|) = 1$ ce qui est impossible.

6. On a clairement $\varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Soient $u, v > 0$ tels que $u = \frac{x+\sqrt{x^2+z}}{2}$ et $v = \frac{-x+\sqrt{x^2+z}}{2}$. Il vient $x = u - v$ puis $z = (u+v)^2 - x^2 = 4uv$. Ainsi on obtient $\varphi^{-1}(u,v) = (u - v, 4uv)$, et comme $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, cela prouve que φ est un C^1-difféomorphisme entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. On a $Jac(\varphi^{-1})(u,v) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4v & 4u \end{bmatrix} = 4(u+v)$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bornée, mesurable. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(Y, \hat{Y})] &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty f(\varphi(x,z)) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} dxdz \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u,v) \frac{e^{-\frac{(u-v)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} e^{-2uv} 4(u+v) dudv \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u,v) 2(u+v) \frac{e^{-\frac{(u+v)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dudv
\end{aligned}$$

Par le théorème de la fonction muette, $(Y, \hat{Y})$ suit la densité $2(u+v)\frac{e^{-\frac{(u+v)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1}_{u>0,v>0}$. On retrouve que les variables aléatoires Y et $\hat{Y}$ ne sont pas indépendantes car la densité n'est pas égale à $2\frac{e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}}{\pi} \mathbf{1}_{u>0,v>0}$ (on peut aussi simplement remarquer qu'elle ne s'écrit pas sous forme produit).

7. Par la formule des lois marginales, on calcule

$$\int_0^\infty 2(u+v) \frac{e^{-\frac{(u+v)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dv = 2\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (u+v) e^{-\frac{uv+v^2}{2}} dv = 2\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

puisque la primitive de $(u+v)e^{-\frac{uv+v^2}{2}}$ est $-e^{-\frac{uv+v^2}{2}}$. On retrouve bien la loi obtenue. Enfin $(X,Y) = (Y - \hat{Y}, Y)$. L'application $T : (y, \hat{y}) \mapsto (y - \hat{y}, y)$ est linéaire bijective (système triangulaire), et l'image de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, x^+ < y\}$. Il vient par changement de variable

($|\det(T)| = 1$) que

$$\mathbb{E}[f(X,Y)] = \mathbb{E}[f(T(Y,\hat{Y}))] = \int_0^\infty \int_0^\infty f(T(u,v))2(u+v)\frac{e^{-\frac{(u+v)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dudv$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty f(x,y)2(2y-x)\frac{e^{-\frac{(2y-x)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{x<y}dxdy.$$

Par le théorème de la fonction muette, (X,Y) suit la loi de densité $2(2y-x)\frac{e^{-\frac{(2y-x)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{x^+<y}$.

⋆⋆⋆

Exercice 3.

1. Par la formule des lois marginales, on a

$$\int_0^1 p(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^x 2dy + \int_{x+1/2}^1 2dy = 1 \text{ si } x \in [0,1/2[\\ \int_{x-1/2}^x 2dy = 1 \text{ si } x \in [1/2,1], \end{cases}$$

si bien que $X \sim \mathcal{U}([0,1])$. De même, on obtient que

$$\int_0^1 p(x,y)dx = \begin{cases} \int_y^{y+1/2} 2dx = 1 \text{ si } y \in [0,1/2[\\ \int_0^{y-1/2} 2dx + \int_y^1 2dx = 1 \text{ si } y \in [1/2,1], \end{cases}$$

et donc que $Y \sim \mathcal{U}([0,1])$.

2. La densité ne s'écrit pas sous forme produit : X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Pour $u \in [0,1/2]$, on a

$$\mathbb{P}(X \le u, Y \le u) = \int_0^u \int_0^u p(x,y)dxdy = 2\int_0^u \int_0^u \mathbf{1}_{y\le x}dxdy$$
$$= 2\int_0^u \left(\int_0^x dy\right) dx = u^2.$$

Pour $u \in [1/2,1]$, on a en utilisant le calcul précédent

$$\mathbb{P}(X \le u, Y \le u) = \int_0^u \int_0^u p(x,y)dxdy = 2\int_0^u \int_0^u \mathbf{1}_{x-1/2\le y\le x}dxdy + 2\int_0^u \int_0^u \mathbf{1}_{x+1/2\le y}dxdy$$
$$= u^2 - 2\int_0^u \int_0^u \mathbf{1}_{y\le x-1/2}dxdy + 2\int_0^u \int_0^u \mathbf{1}_{x+1/2\le y}dxdy = u^2.$$

La dernière égalité s'obtient en échangeant les variables muettes x et y :

$$\int_0^u \int_0^u \mathbf{1}_{y\le x-1/2}dxdy = \int_0^u \int_0^u \mathbf{1}_{x\le y-1/2}dxdy = \int_0^u \int_0^u \mathbf{1}_{x+1/2\le y}dxdy.$$

L'implication est donc fausse pour la famille des fonctions indicatrices.

4. Soit $u \in \mathbb{R}$. Par le cours, on a $\mathbb{E}[e^{iuX}] = \frac{\sin(u/2)}{u/2}e^{iu/2}$ puisque $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ et donc $\mathbb{E}[e^{iuX}]\mathbb{E}[e^{iuY}] = \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2}\right)^2 e^{iu}$.

Par ailleurs, en remarquant que $p(x,y) = 2\mathbf{1}_{[0,1/2]}(x)(\mathbf{1}_{y\le x} + \mathbf{1}_{x+1/2\le y}) + 2\mathbf{1}_{(1/2,1]}(x)\mathbf{1}_{x-1/2\le y\le x}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{iu(X+Y)}] &= \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{iu(x+y)} p(x,y)dy\right) dx \\
&= 2\int_0^{1/2}\left(\int_0^x e^{iu(x+y)}dy + \int_{x+1/2}^1 e^{iu(x+y)}dy\right) dx + 2\int_{1/2}^1 \left(\int_{x-1/2}^x e^{iu(x+y)}dy\right) dx \\
&= \frac{2}{iu}\left[\int_0^{1/2} e^{2iux} - e^{iux} + e^{iu(x+1)} - e^{iu(2x+1/2)}dx + \int_{1/2}^1 e^{2iux} - e^{iu(2x-1/2)}dx\right] \\
&= \frac{2}{(iu)^2}\left[\frac{e^{2iu}-1}{2} - e^{iu/2} + 1 + e^{iu3/2} - e^{iu} - \frac{e^{iu3/2}-e^{iu/2}}{2} - \frac{e^{iu3/2}-e^{iu/2}}{2}\right] \\
&= \frac{2}{(iu)^2}\left[\frac{e^{2iu}-1}{2} + 1 - e^{iu}\right] = \frac{e^{iu}}{(iu)^2}(e^{iu/2} - e^{-iu/2})^2 = \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2}\right)^2 e^{iu}.
\end{aligned}$$

On a $\mathbb{E}[e^{iu(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{iuX}]\mathbb{E}[e^{iuY}]$, alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Commençons par montrer l'égalité demandée. On a par changement de variable $x' = x + 1/2$, puis en utilisant le théorème de Fubini, puis en utilisant à nouveau un changement de variable :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} f(x)\left(\int_{x+1/2}^1 f(y)dy\right) dx &= \int_{1/2}^1 f(x'-1/2)\left(\int_{x'}^1 f(y)dy\right) dx \\
&= \int_{1/2}^1\int_{1/2}^1 f(x'-1/2)f(y)\mathbf{1}_{x'\le y}dx'dy \\
&= \int_{1/2}^1 f(y)\left(\int_{1/2}^1 f(x'-1/2)\mathbf{1}_{x'\le y}dx'\right) dy \\
&= \int_{1/2}^1 f(y)\left(\int_{1/2}^y f(x'-1/2)dx'\right) dy \\
&= \int_{1/2}^1 f(y)\left(\int_0^{y-1/2} f(x)dx\right) dy
\end{aligned}$$

On a donc, en utilisant cette égalité

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X)f(Y)] &= 2\int_0^{1/2}\left(\int_0^x f(x)f(y)dy + \int_{x+1/2}^1 f(x)f(y)dy\right) dx + 2\int_{1/2}^1\left(\int_{x-1/2}^x f(x)f(y)dy\right) dx \\
&= 2\int_0^{1/2}\left(\int_0^x f(x)f(y)dy\right) dx + 2\int_{1/2}^1\left(\int_{x-1/2}^x f(x)f(y)dy + \int_0^{x-1/2} f(x)f(y)dy\right) dx \\
&= 2\int_0^1 f(x)\left(\int_0^x f(y)dy\right) dx = F(1)^2.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)] = \int_0^1 f(u)du = F(1)$. On a donc $\mathbb{E}[f(X)f(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[f(Y)]$ pour toute fonction bornée mesurable. L'implication (2) est donc fausse.