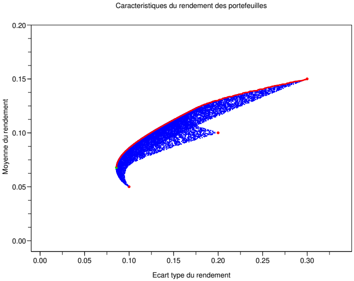
Probabilité, Espérance, Variance

Choix optimal de portefeuille



Bernard Lapeyre

http://cermics.enpc.fr/~bl

PLAN

Fonctionnement du cours

- Site du cours

  http://cermics.enpc.fr/~bl/decision-incertain
- 6 séances : 1h de cours, 1h30 de TP informatique
- une conférence qui remplace le dernier cours (le 29 mai)
- Enseignants (cours) :
  - Jean-Philippe Chancelier (jean-philippe.chancelier@enpc.fr)
  - Bernard Lapeyre (bernard.lapeyre@enpc.fr)
- Enseignants (TPs informatiques) :
  - Oumaïma Beincheikh (oumaima.bencheikh@enpc.fr)
  - Adel Cherchali (cherchaliadel@gmail.com)
  - Hachem Madmoun (hachem.madmoun@enpc.fr)
  - Sophian Mehalla (Sophian.Mehalla@milliman.com)
- Language de programmation: `Python`.
- [`Scicoslab` (Matlab clone) possible si souhaité.]

Organisation et règles de validation

Organisation

- une semaine entre le cours et le TD correspondant ...
- ... pour: lire le cours, faire les exos, préparer le TP info
- une feuille d'exos par séance disponible sur le site

Évaluation

- présence vérifiée en cours et en TD
- pas de contrôle formel à l'issue du module
- ... **sauf** si plus d'une absence constatée (examen dans ce cas)
- rendu (individuel) de l'un des 5 TP informatiques rédigé en détails (LaTeX suggéré).

Objet du cours

- Exposer des *situations* où la modélisation probabiliste est utile/indispensable pour prendre des décisions.
- Décrire un outil nouveau (les *chaînes de Markov*) et montrer comment cet outil peut être utilisé de façon effective.
- Implémenter les méthodes mathématiques proposées.

AUJOURD'HUI ...

- Des rappels de probabilité (espérance, variance, ...)
- Théorie du portefeuille de Markowitz.
  - Pourquoi des actifs (actions,...) ayant des rendements aux caractéristiques diverses peuvent ils coexister ?
  - Comment s'y prendre pour optimiser un portefeuille d'actif ?

LE RENDEMENT D'UN ACTIF

- Actif i (action, obligation, ...) de *rendement* R_i
- Rendement = sur une période de temps donnée T:

  1E à l'instant 0 va rapporter $(1 + R_i)$E en T.
- Plusieurs actifs (ex CAC40 $i = 1 \dots 40$), vecteur de rendement $R = (R_1, \dots, R_n)$.
- Rendements *déterministes* et un *marché* où l'on peut acheter et vendre ces actifs,

  tous les R_i doivent être égaux.
- Mais c'est un fait d'expérience que les rendements des actifs n'ont pas des caractéristiques identiques: il est *nécessaire* de les supposer *aléatoires*: "Risk is not an add-on"[1]...
- ce qui nous amène à quelques rappels de probabilité ...

[1] Voir R.C.Merton interviewed in [Bernstein(2007)].

Probabilité et espérance : rappels

- Description d'un expérience aléatoire : une *probabilité*, sur $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathbb{P}$ qui opère sur des ensembles de $\mathcal{A}$.
- $A \in \mathcal{A}$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. $\sum_{i \geq 1} A_i$ signifie une réunion *dénombrable* et *disjointe*.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i)$$

- À une probabilité $\mathbb{P}$ est associée une espérance $\mathbb{E}$ (qui opère sur des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$)
  - $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
  - *linéarité* ($\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ positifs ou intégrables, $\mathbf{X}_i$ positifs).

$$\mathbb{E}(\lambda \mathbf{X} + \mu \mathbf{Y}) = \lambda \mathbb{E}(\mathbf{X}) + \mu \mathbb{E}(\mathbf{Y})$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i \geq 1} \mathbf{X}_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}(\mathbf{X}_i)$$

Espérance et variance

- L'espérance est *linéaire.*
- Variance : $\mathrm{Var}(\mathbf{X}) := \mathbb{E}\left\{(\mathbf{X}-\mathbb{E}(\mathbf{X}))^2\right\} = \mathbb{E}(\mathbf{X}^2) - \mathbb{E}(\mathbf{X})^2$.
- $\mathrm{Var}(\mathbf{X}) = 0$ implique $\mathbf{X} = Cte$ (p.s.).
- Covariance :
  $\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbb{E}\left\{(\mathbf{X}-\mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y}-\mathbb{E}(\mathbf{Y}))\right\} = \mathbb{E}(\mathbf{XY}) - \mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbb{E}(\mathbf{Y})$.
- La linéarité de l'espérance permet de prouver

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{X}_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathrm{Cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$$

- La variance fonctionne comme une forme *quadratique*, la covariance comme une *forme bilinéaire*.
- Cas particulier : si indépendance des $\mathbf{X}_i$, $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = 0$, $i \neq j$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(\mathbf{X}_i).$$

Vecteur et matrice de variance-covariance

- $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Γ matrice de variance-covariance de $\mathbf{X}$

$$\Gamma = \left(\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

- Permet de calculer $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{X}_i\right)$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{X}_i\right) = \lambda^T \Gamma \lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \Gamma_{ij}.$$

- Γ est une matrice symétrique, positive ($\lambda^T \Gamma \lambda \geq 0$, pour tout λ).

Espérance et variance comme critères de décision

- Comment choisir entre 2 v.a. $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ dont on ne connait que la loi ?
- On utilise (souvent) l'espérance et la variance comme critère de choix (plus l'espérance est grande ou plus la variance est petite, "meilleure" est la v.a.).
- C'est discutable [2], mais c'est l'approche la plus simple, bien justifiée dans le cas (restrictif) d'un vecteur gaussien.
- Des "mesures de risque" mieux fondées (Voir [Föllmer and Schied(2008)]) existent et sont aussi utilisées : "value at risk", "expected shortfall", ...
- ... au prix toutefois d'une complexité accrue de la modélisation et/ou des calculs.

[2] On peut avoir $\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}) = 1$, sans que $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ soient comparables pour l'ordre partiel suggéré (voir la feuille d'exercice pour un exemple).

Portefeuille de Markowitz : le modèle

- d actifs (actions, obligations, ...). $\mathbf{R}_i$ le rendement, aléatoires, du $i$ème actif.
$$1\text{E en actif } i \text{ en } 0 \to (1+\mathbf{R}_i)\text{E en } T.$$
- $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_d)$ le vecteur, aléatoire, des rendements
- $r = (\mathbb{E}(\mathbf{R}_1), \ldots, \mathbb{E}(\mathbf{R}_d))$, le vecteur des moyennes des rendements, par convention on suppose
$$r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_d.$$
- Γ la matrice de variance-covariance de $\mathbf{R}$.
$$\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(\mathbf{X}_i) = \Gamma_{ii}.$$

Portefeuille de Markowitz : les portefeuilles

- On va considérer des portefeuilles, composés de quantités d'actifs λ_i, de valeur initiale V_0 égale (par convention) à 1E

$$V_0 = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1, \quad V_T = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i (1 + \mathbf{R}_i) = 1 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \mathbf{R}_i.$$

- Souvent $0 \leq \lambda_i \leq 1$. Mais dans certains cas on acceptera des quantités négatives pour λ_i (emprunt d'actif).
- Le gain du portefeuille est égal à $\mathbf{G} = V_T - V_0$

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \mathbf{R}_i$$

- La moyenne et la variance de $\mathbf{G}$ se calcule facilement

$$\mathbb{E}(\mathbf{G}) = \lambda.r \qquad \mathrm{Var}(\mathbf{G}) = \lambda^T \Gamma \lambda$$

en fonction de r et Γ. On va comparer les portefeuilles grâce à ces deux valeurs.

Portefeuille de Markowitz : les 2 critères

- L'hypothèse de base du modèle est que l'investisseur va classer les portefeuilles en utilisant la moyenne et l'écart-type (= la racine de la variance) du gain.
- Un portefeuille de moyenne inférieure et de variance supérieure ne sera jamais choisi par un investisseur rationnel (c'est réaliste, mais ça reste une hypothèse).
- On définit un ordre *partiel* sur les portefeuilles :

  $\mathbf{G}_1$ préférable à $\mathbf{G}_2$, ssi $\mathbb{E}(\mathbf{G}_1) \geq \mathbb{E}(\mathbf{G}_2)$ et $\mathrm{Var}(\mathbf{G}_1) \leq \mathrm{Var}(\mathbf{G}_2)$.
- On suppose que les actifs de base ne sont pas comparables pour cet ordre partiel, ce qui impose

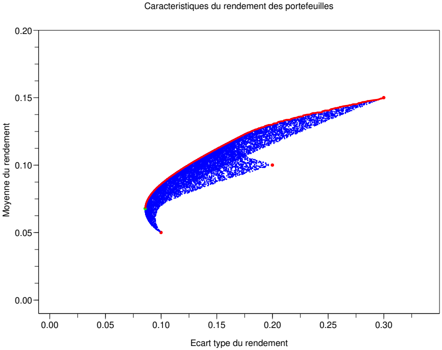
$$0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_d.$$

PORTEFEUILLE DE MARKOWITZ : FRONTIÈRE EFFICIENTE

- On s'intéresse aux portefeuilles "non dominés" (maximaux pour l'ordre partiel) : ceux sont les seuls susceptibles d'être utilisé par un intervenant rationnel.
- Ces portefeuilles "non dominés" forment une frontière de *Pareto* (ou d'indifférence).
- Markowitz l'appelle la *frontière efficiente*.
- On calculera cette frontière par exploration/simulation (en TD).
- Il existe d'autres méthodes plus efficaces (voir page 23) .

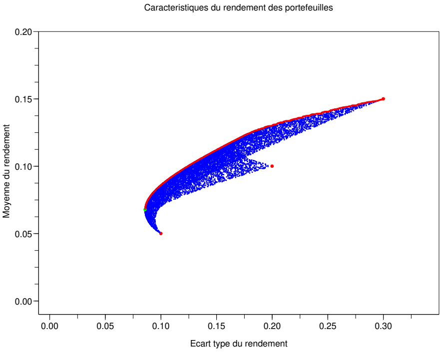
Exemple de frontière efficiente

- 3 actifs risqués, covariances nulles, frontière obtenue par simulation (cf TD), avec contraintes $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.
- frontière efficiente : points non dominés.



FRONTIÈRE EFFICIENTE : REMARQUES

- Le point de variance minimale.
- Effet de diversification : portefeuille de variance inférieure à l'actif de variance minimale, rendement meilleur.
- Sur la frontière efficiente on choisit un compromis espérance-variance.

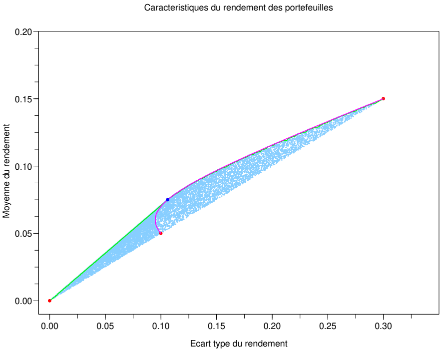


ACTIF SANS RISQUE ET PORTEFEUILLE DE MARCHÉ

- On suppose souvent l'existence d'un actif 0 sans risque (de variance nulle $\sigma_0 = 0$) et (donc) de rendement constant r_0.
- Cet actif correspond à un placement (quantité positive) ou un emprunt (quantité négative) dans une banque.
- Le rajout de cet actif modifie la forme de la frontière efficiente (cf TD) et fait apparaître un portefeuille remarquable: *le "portefeuille de marché"*.

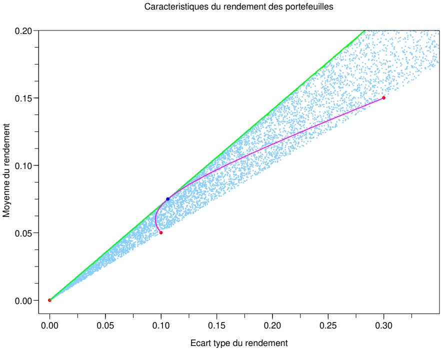
Le portefeuille de marché

- Cas 2 actifs risqués et un actif sans risque $r_0 = 0$, frontière obtenue par simulation (cf TD), avec contrainte $\lambda_i \geq 0$.
- Frontière efficiente pour les deux actifs risqués, les trois actifs.
- Portefeuille de marché : le point où les deux frontières se séparent.



Portefeuille de marché

- Son intérêt apparaît lorsque l'on autorise l'*emprunt* de l'actif non risqué.
- La frontière efficiente est modifiée (cf TD). La droite se prolonge au delà de P.
- Cette droite porte le nom de "droite de marché".



Intérêt du portefeuille de marché

- La droite de marché domine strictement la frontière efficiente "sans emprunt" (sauf pour le portefeuille de marché où elle coïncide).
- Le seul point "rationnel" de la frontière efficiente, qui ne contient pas d'actif sans risque, est le portefeuille de marché.
- Si l'on peut emprunter, les portefeuilles "rationnels" sont obtenus par combinaison de l'actif sans risque et du portefeuille de marché.
- En empruntant, on peut obtenir un rendement de même moyenne mais de variance inférieure à celle du meilleur actif individuel.
- En empruntant, on peut obtenir un rendement de même variance mais de moyenne supérieure à celle du meilleur actif individuel.
- Si l'on peut emprunter, il faut le faire !
- Le portefeuille de marché fait intervenir l'ensemble des actifs risqués (tous les actifs peuvent coexister).
- Variance nulle : il faut tout investir dans l'actif sans risque.

CONCLUSIONS : FINANCE ET ALÉAS

- Sans hasard, pas d'activité financière.
- ... ou dès qu'il y a du hasard, l'activité financière se développe.
- cf développement des produits dérivées suite à l'abandon en 1971 de la convertibilité du dollars en or (accord de Bretton-Wood).

Le portefeuille de marché comme solution d'un problème d'optimisation

- Pour calculer P il faut résoudre le problème d'optimisation suivant : $\max$ en λ (vérifiant les contraintes) de la pente du point $(\sqrt{\mathrm{Var}(\mathbf{G})}, \mathbb{E}(\mathbf{G}))$ ou encore

$$\max_{\lambda} \frac{\mathbb{E}(\mathbf{G})^2}{\mathrm{Var}(\mathbf{G})} = \max_{\lambda} \frac{(r^T\lambda)^2}{\lambda^T\Gamma\lambda}$$

- Le quotient $\frac{\mathbb{E}(\mathbf{G})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathbf{G})}}$ s'appelle le *ratio de Sharpe* du portefeuille[3].

[3] William Sharpe a été lui aussi prix Nobel d'économie en 1990 avec Harry Markowitz et Merton Miller.

Calcul du portefeuille de marché

$$\max_{\lambda} \frac{\mathbb{E}(\mathbf{G})^2}{\mathrm{Var}(\mathbf{G})} = \max_{\lambda} \frac{(r^T\lambda)^2}{\lambda^T\Gamma\lambda}$$

- Voir cours optimisation de 1A.
- Lorsque l'on ne tient pas compte des contraintes de positivité sur λ, mais seulement de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathbf{1}^T\lambda = 1$, on peut résoudre ce problème.
- On peut utiliser un algorithme générique d'optimisation de type gradient. Ce type de problème est accessible dans `Scicoslab` ou `Python`, via une fonction d'optimisation. Voir le corrigé du TD.
- Le problème évoqué peut être traité explicitement, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Calcul du portefeuille de marché

- En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour la norme $\sqrt{x^T \Gamma x}$, on obtient

$$r^T \lambda = (\Gamma^{-1} r)^T \Gamma \lambda \leq \sqrt{r^T \Gamma^{-1} r} \, \sqrt{\lambda^T \Gamma \lambda}.$$

On en déduit que

$$\sup_{\lambda, \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1} \frac{r^T \lambda}{\sqrt{\lambda^T \Gamma \lambda}} \leq \sqrt{r^T \Gamma^{-1} r}$$

et que l'égalité est atteinte pour $\lambda = \Gamma^{-1} r / (\mathbf{1} \, \Gamma^{-1} r)$ où $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$

Paramètrisation de la frontière efficiente par des problèmes d'optimisation

- Une façon de calculer la frontière efficiente est de minimiser la variance à espérance égale à α, puis de faire varier α.

$$\min_{\lambda,\ \mathbf{1}^T\lambda=1,\ r^T\lambda=\alpha} \lambda^T\Gamma\lambda.$$

- Toujours en ignorant les contraintes de positivité sur λ, on peut encore résoudre ce problème
- Soit en utilisant une routine d'optimisation en éliminant les 2 contraintes (voir TD).
- Soit une utilisant deux multiplicateurs de Lagrange, le problème se résolvant alors de façon explicite en utilisant l'inverse de la matrice Γ (exercice).

Conclusions : décider dans l'incertain

- Décider en environnement incertain suppose d'*identifier* un modèle et de *choisir des critères* de décision (ce qui n'est pas toujours simple).
- Un fois ceci fait, on utilise des algorithmes pour résoudre les problèmes d'*optimisation* (ce qui n'est pas toujours simple).
- Une modélisation aléatoire simple peut éclairer la pratique et conduire à des règles opératoires.

Harry Markowitz

- Né en 1927, prix Nobel d'Economie 1990.
- Article fondateur, à 25 ans, en 1952 ("Portfolio Selection", The Journal of Finance).

- " ... when I defended my dissertation as a student in the Economics Department of the University of Chicago, Professor Milton Friedman argued that portfolio theory was not Economics, and that they could not award me a Ph.D. degree in Economics for a dissertation which was not in Economics. ... at the time I defended my dissertation, portfolio theory was not part of Economics. But now it is." Nobel Lecture, December 7, 1990, Harry M. Markowitz.

Pour aller plus loin : cours de l'École des Ponts

- 1A : cours de "Probabilité", cours d'"Optimisation"
- 2A : cours "Processus Aléatoires", cours de "Recherche Opérationnelle", cours "Optimisation", cours "Méthodes Mathématiques pour la Finance", cours "Stratégie financière de l'entreprise"

Bibliographie

- P.L. Bernstein.
  Capital Ideas Evolving.
  Jhon Wiley and Son, 2007.

- Hans Föllmer and Alexander Schied.
  Convex and coherent risk measures.
  http://www.alexschied.de/Encyclopedia6.pdf, 2008.

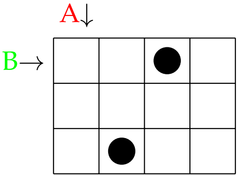
- M. Haugh.
  Asset allocation and risk management.
  Available on ieor e4602 web page, Columbia University, 2009.

- H.M. Markowitz.
  Portfolio selection.
  The Journal of Finance, 7(1):77–91, 1952.

- H.M. Markowitz.
  Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.
  John Wiley and Sons, 1959.

UN PUZZLE (DU SITE) DE LA NSA

- Deux œufs “au hasard” dans une matrice $p \times q$.
- Deux joueurs: le joueur A parcours la matrice en colonne, le joueur B en ligne.
- Le gagnant est celui qui atteint le premier l'un des deux œufs.



- Ce jeu est-il équitable ?
- La réponse dépend de p et q de façon bizarre:

$$\neq \text{ pour } (p = 3, q = 4), (p = 4, q = 4) \text{ et } (p = 4, q = 5)!$$