Espaces de Banach

1 Normes sur un espace vectoriel

Définition 1.1. (Norme)
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (abrégé $\mathbb{R}$-ev dans la suite). Une norme est une application définie sur V à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, notée $\|\cdot\|_V$ et telle que les trois propriétés suivantes soient satisfaites:

(i) $\forall v \in V,\ \|v\|_V = 0 \Longleftrightarrow v = 0$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in V,\ \|\lambda v\|_V = |\lambda| \|v\|_V$,

(iii) Inégalité triangulaire: $\forall v, w \in V,\ \|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$.

On dit alors que V est un $\mathbb{R}$-ev normé.

Exemples:

- Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et notons $\mathcal{C}^0([a, b])$ l'espace vectoriel constitué des fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'application $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0([a,b])}$ qui à $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ associe

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0([a,b])} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|, \tag{1}$$

  définit une norme sur $\mathcal{C}^0([a, b])$.

- On peut aussi définir une autre norme sur $\mathcal{C}^0([a, b])$:

$$\|f\|_R = \int_a^b |f(t)|\, dt. \tag{2}$$

On peut donc avoir plusieurs normes sur le même espace.

2 Topologie des espaces vectoriels normés

Soit V un ev normé.

2.1 Rappels

Définition 2.1. (Ouvert)
On dit qu'un ensemble $O \subset V$ est ouvert dans V si

$$\forall x \in O,\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \varepsilon) \subset O,$$

où $B(x, \varepsilon) = \{y \in V \mid \|x - y\|_V < \varepsilon\}$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ε.

L'ensemble des ouverts de V selon la définition ci-dessus est appelé la topologie de V induite par la norme $\|\cdot\|_V$.

Définition 2.2. (Fermé)
On dit qu'un ensemble $F \subset V$ est fermé dans V si $V \setminus F$ est ouvert dans V.

Définition 2.3. (Convergence)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in V$ pour la norme $\|\cdot\|_V$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|u_n - l\|_V \leq \varepsilon.$$

Ceci est équivalent à dire que $(\|u_n - l\|_V)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1. *La limite d'une suite convergente dans un $\mathbb{R}$-ev normé est unique.*

Proposition 2.2. *Soit F un fermé de V. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F converge vers $l \in V$ alors $l \in F$.*

Proposition-Définition 2.1. (Continuité d'une fonction)
Soient V et W deux ev munis respectivement des normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$, et f une fonction de V dans W. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes:

(i) *f est continue de V dans W,*

(ii) $\forall v_0 \in V,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall v \in V,\ \|v - v_0\|_V \leq \eta \Longrightarrow \|f(v) - f(v_0)\|_W \leq \varepsilon$,

(iii) *Pour tout $v \in V$, pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers v dans V, $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(v)$ dans W,*

(iv) *Pour tout ouvert O_W de W, l'image réciproque de O_W par f, $f^{-1}(O_W)$, est un ouvert de V,*

(v) *Pour tout fermé F_W de W, l'image réciproque de F_W par f, $f^{-1}(F_W)$, est un fermé de V.*

2.2 Equivalence de normes

Définition 2.4. (Equivalence de deux normes)
Soient $\|\cdot\|_{V,1}$ et $\|\cdot\|_{V,2}$ deux normes sur V. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que

$$\forall v \in V,\ c_1\|v\|_{V,2} \leq \|v\|_{V,1} \leq c_2\|v\|_{V,2}.$$

L'importance de cette définition provient du fait que si deux normes sont équivalentes, elles induisent la même topologie.

Proposition 2.3. *Si $\|\cdot\|_{V,1}$ and $\|\cdot\|_{V,2}$ sont deux normes équivalentes sur V, on a l'équivalence:*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } l \text{ pour } \|\cdot\|_{V,1} \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } l \text{ pour } \|\cdot\|_{V,2}.$$

Proposition 2.4. *Si V est de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.*

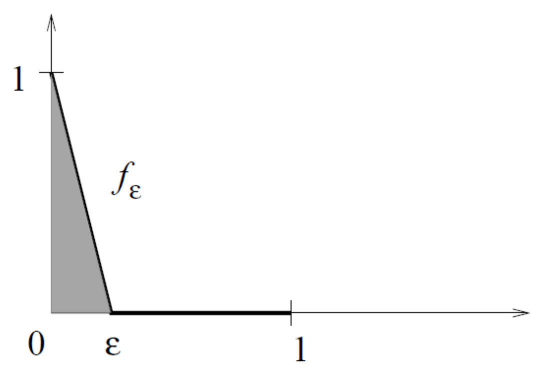
Contre-exemple en dimension infinie.
Pour $V = \mathcal{C}^0([0,1])$, on a deux normes pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$,

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0([0,1])} = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad \text{et} \quad \|f\|_R = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

Ces normes ne sont pas équivalentes. On a $\|f\|_R \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0([0,1])}$, mais on n'a pas d'inégalité dans l'autre sens. En effet, s'il existe $c > 0$ telle que $\|f\|_{\mathcal{C}^0([0,1])} \leq c\|f\|_R$, alors avec $f = f_\varepsilon$ telle que

$$\forall t \in [0,1],\ f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

(voir dessin ci-dessous), on a $1 \leq c\varepsilon/2$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui est absurde.



2.3 Compacité

Définition 2.5. (Compacité, propriété de Bolzano-Weierstrass)

Un ensemble $A \subset V$ est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de A.

Proposition 2.5. *Si A est compact, alors A est fermé borné.*

Proposition 2.6. *Si V est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé borné.*

On peut en fait énoncer un résultat bien plus général qui souligne la différence entre la dimension finie et la dimension infinie.

Théorème 2.1. *La boule unité fermée de V est compacte si et seulement si V est de dimension finie.*

Théorème 2.2. (Propriété de Borel-Lebesgue) *Un ensemble $A \subset V$ est compact si et seulement si de tout recouvrement de A par des ouverts, i.e. de toute famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, on peut en extraire une famille finie O_{i_1}, ..., O_{i_n} telle que $A \subset O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_n}$.*

2.4 Continuité de la norme

Proposition 2.7. *Soit V un ev normé. La norme sur V est une application continue, autrement dit la fonction*

$$\phi : v \in V \mapsto \|v\|_V \in \mathbb{R}$$

est continue.

Soit $v, w \in V$. On a en effet en utilisant l'inégalité triangulaire

$$|\|v\|_V - \|w\|_V| = |\phi(v) - \phi(w)| \leq \|v - w\|_V,$$

ce qui implique (en utilisant par exemple la caractérisation *(iii)* de la continiuité) que ϕ est continue.

3 Espaces complets

Soit V un ev normé, de norme $\|\cdot\|_V$.

3.1 Suites de Cauchy

Définition 3.1. (Suites de Cauchy) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_V$ si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0,\ \|u_{n+p} - u_n\|_V \leq \varepsilon.$$

Proposition 3.1. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Proposition 3.2. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

3.2 Espaces de Banach

Attention! Toute suite de Cauchy n'est pas forcément convergente dans un espace quelconque. D'où l'intérêt d'introduire une nouvelle définition: les espaces complets.

Définition 3.2. (Espace complet ou espace de Banach)

Un $\mathbb{R}$-ev V est dit complet pour la norme $\|\cdot\|_V$ si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

Proposition 3.3. *Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé de dimension finie est complet.*

Cela vient du fait que $\mathbb{R}$ est complet (par construction, admis). A faire en exercice.

Proposition 3.4. *$\mathcal{C}^0([a,b])$ équipé de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0([a,b])}$ est un espace de Banach.*

Preuve: Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([a,b])$, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0,\ \|u_{n+p} - u_n\|_{\mathcal{C}^0([a,b])} = \sup_{x\in[a,b]} |u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $x \in [a,b]$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge donc vers une limite notée $u(x)$. En faisant tendre p vers l'infini, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N,\ \sup_{x\in[a,b]} |u(x) - u_n(x)| \leq \varepsilon. \tag{3}$$

Montrons que u est une fonction continue sur $[a,b]$. Soit $x \in [a,b]$ et $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{z\in[a,b]} |u(z) - u_N(z)| \leq \varepsilon/3.$$

Par ailleurs, u_N étant continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in [a,b]$ tel que $|y-x| \leq \eta$, on ait $|u_N(y) - u_N(x)| \leq \varepsilon/3$. L'inégalité triangulaire permet de conclure: pour tout $y \in [x-\eta; x+\eta] \cap [a,b]$, on a

$$|u(y) - u(x)| \leq |u(y) - u_N(y)| + |u_N(y) - u_N(x)| + |u_N(x) - u(x)| \leq \varepsilon.$$

Cela signifie que $u \in \mathcal{C}^0([a,b])$. On conclut en remarquant que (3) signifie que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers u dans $\mathcal{C}^0([a,b])$. CQFD

Contre-exemple: L'espace de fonctions $\mathcal{C}^0([a,b])$ muni de la norme $\|\cdot\|_R$ n'est pas complet.

Remarque: Il est plus facile de montrer qu'une suite est de Cauchy qu'elle est convergente (on n'a pas besoin de connaître la limite de la suite).

3.3 Séries normalement convergentes

Définition 3.3. (Séries normalement convergentes)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de V. On dit que la série de terme général u_n est normalement convergente si la série $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|_V$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$.

Théorème 3.1. (on ne fera pas la démonstration en cours)

Soit V un espace de Banach. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est normalement convergente, alors elle est convergente dans V.

Réciproquement, soit V un espace vectoriel normé. On suppose que V est tel que si une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est normalement convergente, alors elle est convergente dans V. Dans ce cas, V est complet.

Preuve: 1er sens: Soit V un espace de Banach et soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série normalement convergente dans V. Montrons alors que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente dans V. Pour cela on va montrer qu'elle est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 0$.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{n+p} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \right\|_V &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\|_V \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\|_V \text{ par inégalité triangulaire} \\ &= \sum_{k=0}^{n+p} \|u_k\|_V - \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|_V. \end{aligned}$$

Or, par définition, comme la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est normalement convergente dans V, la série $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|_V$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$. Donc cette série est nécessairement de Cauchy, et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n+p} \|u_k\|_V - \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|_V \leq \varepsilon.$$

Ceci implique donc nécessairement que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$,

$$\left\| \sum_{k=0}^{n+p} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \right\|_V \leq \varepsilon.$$

Ceci signifie donc que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_n$ est de Cauchy dans V, qui est un espace de Banach, donc converge dans V. CQFD

2e sens: C'est le plus difficile. Soit V un espace vectoriel normé tel que toute série normalement convergente de V est convergente dans V. Pour montrer que V est un espace de Banach, nous allons montrer que toute suite de Cauchy $(u_n)_n$ est convergente dans V. Nous allons faire la preuve en deux étapes. Tout d'abord, nous allons montrer qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge dans V puis que nécessairement toute la suite converge vers la limite de cettre sous-suite.

Comme $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_q$ et tout $p \geq 0$,

$$\|u_{n+p} - u_n\|_V \leq \frac{1}{q^2}.$$

On peut choisir n_q de telle sorte que la suite $(n_q)_q$ soit strictement croissante (en effet, il suffit de choisir n_2 tel que $n_2 > n_1$, n_3 tel que $n_3 > n_2$, etc.). On a alors en particilier, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\|u_{n_{q+1}} - u_{n_q}\|_V \leq \frac{1}{q^2}.$$

Donc en particulier la série $\sum_{q \geq 1} u_{n_{q+1}} - u_{n_q}$ est normalement convergente, donc convergente par hypothèse. Or, la suite des sommes partielles de cette série est exactement $\sum_{k=1}^{q} u_{n_{k+1}} - u_{n_k} = u_{n_{q+1}} - u_{n_1}$. Ceci implique nécessairement que la sous-suite $(u_{n_q})_q$ de (u_n) converge dans V vers une limite notée $u \in V$.

Montrons que toute la suite (u_n) converge vers u. Soit $\epsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$,

$$\|u_{n+p} - u_n\|_V \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, comme la sous-suite $(u_{n_q})_q$ converge vers u, il existe $Q \in \mathbb{N}^*$ (que l'on peut choisir tel que $n_Q \geq N$), tel que

$$\|u_{n_Q} - u\|_V \leq \varepsilon.$$

Donc, pour tout $n \geq n_Q$, on a

$$\|u_n - u_{n_Q}\|_V \leq \varepsilon,$$

ce qui implique que

$$\|u_n - u\|_V \leq \|u_n - u_{n_Q}\|_V + \|u_{n_Q} - u\|_V \leq 2\varepsilon,$$

et la suite (u_n) toute entière converge bien vers $u \in V$. CQFD

Remarque: Dans la preuve du théorème, nous avons en fait démontré le résultat suivant.

Proposition 3.5. *Soit V un espace vectoriel normé quelconque. Toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente dans V converge toute entière vers la limite de cette sous-suite.*

3.4 Théorème du point fixe de Picard

Définition 3.4. (Application contractante)

Soit A une application de V dans V. On dit que A est contractante s'il existe un réel α ***strictement inférieur à 1*** *tel que*

$$\forall u, v \in V,\ \|A(u) - A(v)\|_V \leq \alpha \|u - v\|_V.$$

Attention! Ce n'est pas la même chose que:

$$\forall u, v \in V,\ u \neq v,\ \|A(u) - A(v)\|_V < \|u - v\|_V.$$

La définition d'une application contractante est plus forte.

Remarque: Une application contractante est continue.

Théorème 3.2. (Point fixe de Picard)
Soit V un espace de Banach et A une application contractante de V dans V. Alors, l'équation

$$A(u) = u,$$

admet une solution unique $u_* \in V$. Cette solution est appelée point fixe de A.

Preuve:

(i) **Existence.** Soit $u_0 \in V$ quelconque et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ donnée par $u_{n+1} = A(u_n)$. On constate que

$$\|u_{n+1} - u_n\|_V = \|A(u_n) - A(u_{n-1})\|_V \leq \alpha\|u_n - u_{n-1}\|_V \leq \alpha^n\|u_1 - u_0\|_V,$$

d'où on déduit que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est normalement convergente (par comparaison à une série géométrique). L'espace V étant complet, nous déduisons du théorème précédent que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente, i.e., que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente. On note u_* sa limite. Comme A est contractante, on a

$$\|A(u_n) - A(u_*)\|_V \leq \alpha\|u_n - u_*\|_V$$

donc $A(u_n)$ converge vers $A(u_*)$. Or $A(u_n) = u_{n+1}$ converge vers u_*. Par unicité de la limite, $A(u_*) = u_*$.

(ii) **Unicité.** L'unicité se montre par l'absurde. Si on a deux solutions u_1 et u_2 avec $u_1 \neq u_2$, on obtient

$$\|u_1 - u_2\|_V = \|A(u_1) - A(u_2)\|_V \leq \alpha\|u_1 - u_2\|_V < \|u_1 - u_2\|_V,$$

ce qui est absurde. CQFD

4 Application: théorème de Cauchy-Lipschitz

4.1 Définitions

Définition 4.1. (Problème de Cauchy)
Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $u_0 \in \mathbb{R}^d$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle problème de Cauchy le problème suivant: trouver $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

$$\frac{du}{dt} = f(u(t)) \text{ sur } t > 0 \text{ et } u(0) = u_0. \tag{4}$$

Définition 4.2. (Application lipschitzienne) *Soit V un ev normé, et f une application de V dans V. On dit que f est lipschitzienne sur V s'il existe une constante $L > 0$ telle que*

$$\forall u_1, u_2 \in V,\ \|f(u_1) - f(u_2)\|_V \leq L\|u_1 - u_2\|_V.$$

Remarque: Si f est une application lipschitzienne de V dans V, alors f est continue (comme pour la continuité de la norme, on peut le voir en utilisant la caractérisation (iii) de la continuité).

4.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 4.1. (Cauchy-Lipschitz)
On considère le problème de Cauchy, avec f lipschitzienne. Alors le problème de Cauchy admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0,\infty), \mathbb{R}^d)$.

Preuve: (faire la preuve avec $d = 1$)

(i) **Existence et unicité locales.** Nous allons démontrer d'abord l'existence et l'unicité locale en temps en utilisant le théorème du point fixe de Picard. On munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme notée $\|u\|_{\mathbb{R}^d}$ (par exemple le max de la valeur absolue des composantes, le norme euclidienne, ...). Posons $T = \frac{1}{2L}$ et notons $E = \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ équipé de la norme

$$\forall u \in E,\ \|u\|_E = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^d}.$$

On vérifie facilement que E munit de cette norme est un espace de Banach. Il est clair par ailleurs que pour tout $u \in E$ la fonction

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [0,T] & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & u_0 + \int_0^t f(u(s))\,ds, \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée valant $f(u(t))$. On peut donc définir l'application

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & A(u) \end{array} \right. \quad \text{avec } A(u)(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))\,ds,$$

qui vérifie la propriété suivante: $u \in E$ est solution du problème de Cauchy sur $[0,T]$ si et seulement si $A(u) = u$. Or, A est contractante puisque pour $u_1, u_2 \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|A(u_2) - A(u_1)\|_E & = & \sup_{t\in[0,T]} \left\| \int_0^t (f(u_2(s)) - f(u_1(s)))\,ds \right\|_{\mathbb{R}^d} \\ & \leq & T \sup_{s\in[0,T]} \|f(u_2(s)) - f(u_1(s))\|_{\mathbb{R}^d} \\ & = & T\|f(u_1) - f(u_2)\|_E \\ & \leq & TL\|u_2 - u_1\|_E, \end{array}$$

et $TL = \frac{1}{2}$. Nous déduisons du théorème du point fixe que le problème de Cauchy admet une solution unique sur $[0,T]$.

(ii) **Existence et unicité sur tout $[0,+\infty)$.** En appliquant le résultat d'existence et d'unicité locales au problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dt}(t) = f(w(t)), \\ w(0) = u(T), \end{array} \right.$$

et en posant pour $t \in [T, 2T]$, $u(t) = w(t-T)$, on obtient l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy sur $[0,2T]$. On recouvre ainsi de proche en proche l'intervalle $[,\infty)$. CQFD

Remarque: En changeant t en $-t$, f en $-f$ et en posant $v(t) = u(-t)$, il est clair que dans le cadre des hypothèses du théorème, le problème (4) admet une solution unique $u \in \mathcal{C}^1((-\infty,\infty), \mathbb{R}^d)$.

Remarque: Le caractère lipschitzien de f est essentiel pour assurer l'unicité de la solution. Ainsi, pour $d = 1$ et $f(u) = \sqrt{u}$, (4) avec $u_0 = 0$ admet la famille de solutions

$$u_c(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pour } t \leq c, \\ \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{pour } t \geq c, \end{array} \right.$$

pour tout réel $c > 0$.

5 Dualité

5.1 Applications linéaires continues

Dans cette section, V et W désignent deux $\mathbb{R}$-ev normés.

Proposition 5.1. *Soit A une application linéaire de V dans W. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) A est continue.

(ii) A est continue en 0.

(iii) Il existe une constante $0 < c < \infty$ telle que

$$\forall u \in V,\ \|A(u)\|_W \leq c\|u\|_V. \tag{5}$$

Preuve:

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Evident.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Soit A une application linéaire continue en 0. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $u \in B(0, \eta)$, la boule fermée de centre 0 et de rayon η, on ait

$$\|A(u)\|_W = \|A(u) - A(0)\|_W \leq 1.$$

Soit maintenant $v \in V$ avec $v \neq 0$. Le vecteur $w = \frac{\eta}{\|v\|_V} v$ appartient à $B(0, \eta)$ si bien que $\|A(w)\| \leq 1$, ce qui par linéarité, implique (5) avec $c = \frac{1}{\eta}$. Enfin, l'inégalité (5) est trivialement satisfaite si $u = 0$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V qui converge vers u, on veut montrer que $(A(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A(u)$ (toujours en utilisant la caractérisation (iii) de la continuité). On a

$$\|A(u_n) - A(u)\|_W = \|A(u_n - u)\|_W \leq c\|u - u_n\|_V \to 0.$$

Donc c'est bon. CQFD

Définition 5.1. *L'espace vectoriel des applications linéaires continues de V dans W est noté $\mathcal{L}(V, W)$.*

Proposition 5.2. *L'application*

$$\| \cdot \|_{\mathcal{L}(V,W)} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(V, W) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \sup_{u\in V, u\neq 0} \frac{\|A(u)\|_W}{\|u\|_V} \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{L}(V, W)$.

Théorème 5.1. (à laisser en exercice) *Soit V un espace vectoriel normé et W un espace de Banach. Alors, $\mathcal{L}(V, W)$ muni de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(V,W)}$ est un espace de Banach.*

Remarque: V n'a pas besoin d'être complet, c'est l'espace d'arrivée qui compte.

Preuve: Soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(V, W)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$,

$$\|A_{n+p} - A_n\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|(A_{n+p} - A_n)(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq \varepsilon.$$

Soit $v_0 \in V$, on a alors

$$\|A_{n+p}(v_0) - A_n(v_0)\|_W \leq \|v_0\|_V \varepsilon, \tag{6}$$

ce qui veut exactement dire que la suite $(A_n(v_0))_n$ est de Cauchy dans W, donc convergente dans W car W est un espace de Banach. Notons $A(v_0)$ sa limite pour tout $v_0 \in V$. Il est évident de voir que l'application $v_0 \in V \mapsto A(v_0) \in W$ est linéaire dans W. En faisant tendre p vers l'infini dans (6), on obtient que pour tout $n \geq N$,

$$\|A(v_0) - A_n(v_0)\|_W \leq \varepsilon\|v_0\|_V \varepsilon, \tag{7}$$

ce qui implique que pour tout $v \in V$,

$$\|A(v)\|_W \leq (\varepsilon + \|A_N\|_{\mathcal{L}(V,W)})\|v\|_V,$$

et donc $A \in \mathcal{L}(V, W)$. De plus, (7) implique que pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|A(v) - A_n(v)\|_W}{\|v\|_V} = \|A - A_n\|_{\mathcal{L}(V,W)} \leq \varepsilon.$$

Ceci implique donc que toute la suite $(A_n)_n$ converge vers A dans $\mathcal{L}(V, W)$. CQFD

Exemples: (à vérifier en exercice)

- Sur $\mathcal{C}^1([a, b])$, l'application $f \mapsto \max(\sup |f|, \sup |f'|)$ est une norme, notée $\| \cdot \|_{\mathcal{C}^1([a,b])}$.

  Remarque: Plus généralement, $f \in \mathcal{C}^k([a, b]) \mapsto \max(\sup |f|, \sup |f'|, \cdots, \sup |f^{(k)}|)$ est une norme.

- Sur $\mathcal{C}^1([a, b])$, l'application $f \mapsto \|f\|_{\mathcal{C}^0([a,b])}$ est une autre norme, qui n'est pas équivalente à la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{C}^1([a,b])}$.

- L'application qui à $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ associe $f' \in \mathcal{C}^0([a, b])$ est linéaire continue (avec ces espaces respectivement équipés de $\| \cdot \|_{\mathcal{C}^1([a,b])}$ et $\| \cdot \|_{\mathcal{C}^0([a,b])}$.

5.2 Espace dual

Un cas particulier important d'applications linéaires continues entre $\mathbb{R}$-ev normés est celui où l'espace d'arrivée est $W = \mathbb{R}$.

Définition 5.2. (Espace dual) *Soit V un $\mathbb{R}$-ev normé. $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ est appelé espace dual de V et est noté V'. Un élément $A \in V'$ est appelé forme linéaire continue et son action sur un élément $v \in V$ est notée à l'aide du crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V',V}$ de sorte que*

$$\langle A, v \rangle_{V',V} = A(v) \in \mathbb{R}.$$

V' est équipé de la norme

$$\|A\|_{V'} = \sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{\langle A, u \rangle_{V',V}}{\|u\|_V}.$$

Exemple: Soit $c \in [a, b]$. L'application qui à $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ associe $f(c)$ est une forme linéaire continue pour la norme $\mathcal{C}^0$.

6 Espaces de Hilbert

6.1 Formes bilinéaires continues

Définition 6.1. (Forme bilinéaire)
Soient V et W deux $\mathbb{R}$-ev normés. Une forme bilinéaire sur $V \times W$ est une application $a : V \times W \to \mathbb{R}$ telle que

- Pour tout $v \in V$, l'application $a(v, \cdot) : W \to \mathbb{R}$ est linéaire;
- Pour tout $w \in W$, l'application $a(\cdot, w) : V \to \mathbb{R}$ est linéaire.

Définition 6.2. (Forme bilinéaire continue)
Soient V et W deux $\mathbb{R}$-ev. Une forme bilinéaire $a : V \times W \to \mathbb{R}$ est continue sur $V \times W$ s'il existe une constante $c < \infty$ telle que

$$\forall (v, w) \in V \times W, \ |a(v, w)| \leq c\|v\|_V \|w\|_W.$$

On note $\|a\|_{(V \times W)'} = \sup_{(v,w) \in V \times W,\ v \neq 0,\ w \neq 0} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V \|w\|_W}$.

6.2 Produit scalaire

Soit V un $\mathbb{R}$-ev.

Définition 6.3. (Produit scalaire)
Un produit scalaire sur V est une forme bilinéaire sur V, notée $(\cdot, \cdot)_V : V \times V \to \mathbb{R}$, et vérifiant les trois propriétés suivantes:

(i) symétrie: $\forall v, w \in V, \ (v, w)_V = (w, v)_V$,

(ii) positivité: $\forall v \in V, \ (v, v)_V \geq 0$,

(iii) $(v, v)_V = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

Proposition 6.1. (Cauchy-Schwartz) *Soit $(\cdot, \cdot)_V$ un produit scalaire sur V. L'application $v \in V \mapsto \|v\|_V = \sqrt{(v, v)_V}$ définit une norme sur V appelée norme induite. Elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz:*

$$\forall v, w \in V, \ |(v, w)_V| \leq \|v\|_V \|w\|_V.$$

Remarque: Cette inégalité montre que la forme bilinéaire $(v, w) \in V \times V \mapsto (v, w)_V$ est continue, autrement dit que le produit scalaire est une forme bilinéaire continue.
Preuve:

- Montrons d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Soient $v, w \in V$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(v + \lambda w, v + \lambda w)_V \geq 0$. Or si on développe ce produit scalaire on obtient

$$(v + \lambda w, v + \lambda w)_V = \|v\|^2 + 2\lambda(v, w)_V + \lambda^2 \|w\|^2.$$

  Il s'agit d'un polynôme du second degré en λ. Comme il est toujours positif ou nul, son discriminant est forcément négatif ou nul ce qui implique:

$$4|(v, w)_V|^2 \leq 4\|v\|^2 \|w\|^2,$$

  ce qui entraine Cauchy-Schwartz en prenant la racine carrée de cette expression.

- Montrer que c'est une norme: la "linéarité" et la positivité sont évidentes; L'inégalité triangulaire découle de Cauchy-Schwartz. En effet, soient $v, w \in V$.

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \|v\|^2 + 2(v, w)_V + \|w\|^2, \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2, \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

6.3 Espaces de Hilbert

Définition 6.4. (Espace de Hilbert)
Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (donc normé), et complet pour la norme induite.

Un espace de Hilbert est donc un cas particulier d'un espace de Banach (la norme est définie à partir d'un produit scalaire).

Exemple: Soit $l_2 = \{\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R};\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 < \infty\}$.

On considère l'application qui à $u, v \in l_2$ associe $(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$. Ce nombre est bien défini (en effet, $|u_n v_n| \leq u_n^2/2 + v_n^2/2$ donc la série est absolument convergente donc convergente).

L'application $(\cdot, \cdot)$ est donc bien définie, symétrique, définie et positive: c'est un produit scalaire sur l_2. La norme induite est $\|u\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2}$.

l_2 muni de cette norme est un espace complet, donc un espace de Hilbert.