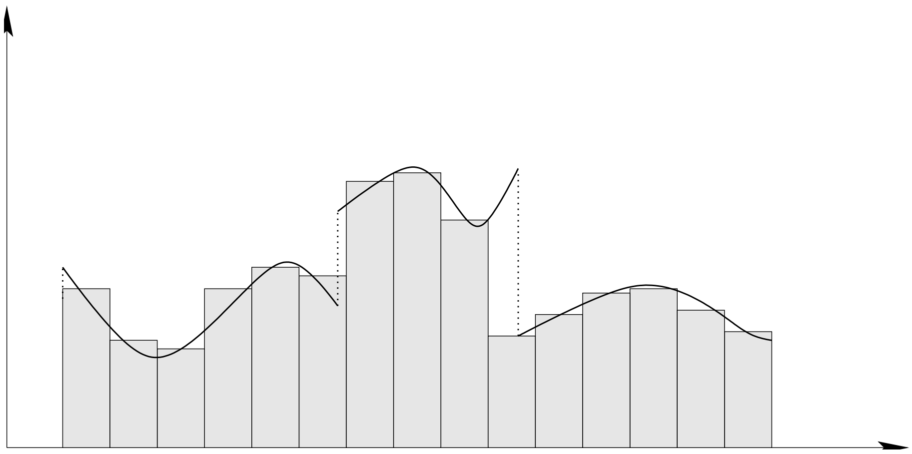
Intégrale de Lebesgue

1 Nécessité de l'intégrale de Lebesgue

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann si les sommes de Riemann

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),\ a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N = b,\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

convergent lorsque le pas de discrétisation $h = \sup_{0 \leq i \leq N-1} |x_{i+1} - x_i|$ tend vers 0. Si tel est le cas, l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ est par définition la limite des sommes de Riemann.



Graphiquement, l'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[a, b]$ représente l'aire de la surface S située entre l'axe des abscisses et la courbe $y = f(x)$; les sommes de Riemann approchent donc cette grandeur selon une méthode de découpage de l'axe des abscisses représentée sur la figure précédente.

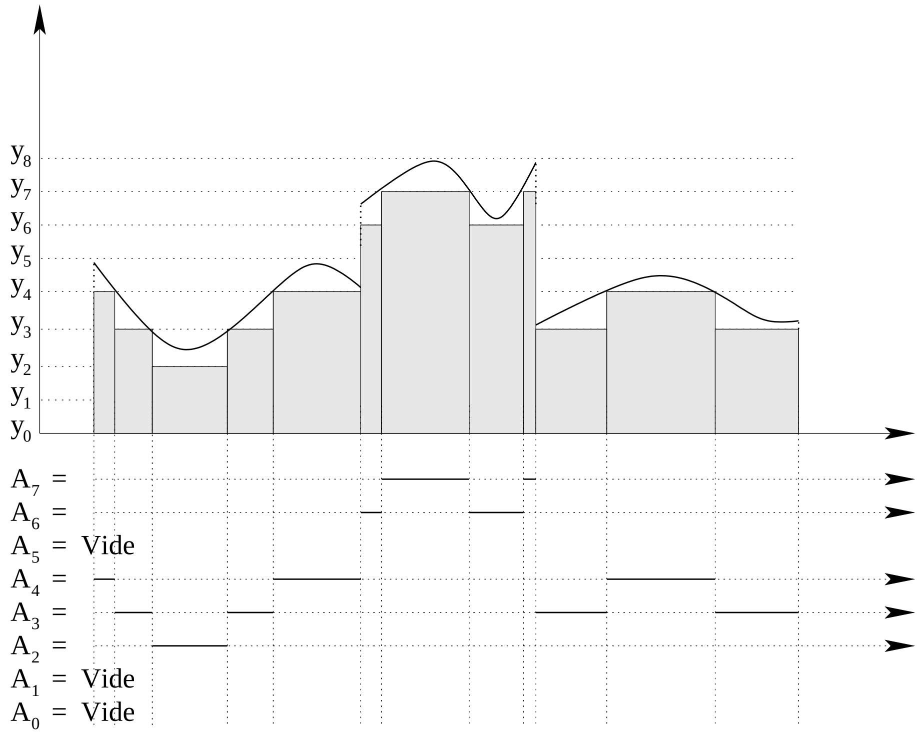
La méthode de Lebesgue consiste à approcher par valeurs inférieures l'aire de la surface S (pour une fonction f supposée ici positive bornée) à l'aide d'un découpage de l'axe des ordonnées:

$$\text{aire}(S) \approx \sum_{i=0}^{N-1} y_i \text{mes}(A_i),$$

où $\text{mes}(A_i)$ désigne la mesure de l'ensemble

$$A_i = f^{-1}(]y_i, y_{i+1}]) = \{x \in [a, b], y_i < f(x) \leq y_{i+1}\}$$

et où $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = \max_{[a,b]} f$.



Quels sont les intérêts d'introduire cette nouvelle intégrale? Il y en a plusieurs:

- Sur un borné, toute fonction R-intégrable est L-intégrable mais il existe des fonctions L-intégrables qui ne sont pas R-intégrables.
- On a des résultats de convergence du type
$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n = \int \lim_{n\to+\infty} f_n$$
plus souples et plus puissants pour L que pour R.
- Soit
$$\mathcal{R}([a,b]) = \{f \text{ Riemann intégrable}\}$$
l'ensemble des fonctions R-intégrables sur $[a,b]$: cet ensemble n'est pas complet. Au contraire les espaces fonctionnels L^p construits avec l'intégrale de Lebesgue sont des Banach.
- On ne sait pas définir l'intégrale de Riemann sur $[0,+\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$: on ne fait que la définir sur $[0,n]$ et on passe à la limite. On parle d'intégrale de Riemann généralisée (ou impropre).
- Lorsqu'une fonction a des singularités (comme $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0), il faut faire attention avec l'intégrale de Riemann, se placer hors de la singularité et regarder à la limite: $\lim_\varepsilon \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

L'intégrale de Lebesgue est donc un outil bien plus agréable à manier que l'intégrale de Riemann, à beaucoup de points de vue. Par contre, une question importante est: pour quels ensembles A_i peut-on définir $\mathrm{mes}(A_i)$? Si f est peu régulière, alors A_i va être peu régulier, et ce n'est pas une question triviale.

Cf le poly pour une construction complète de l'intégrale de Lebesgue. Je ne vais faire ici qu'une construction formelle et surtout présenter les principaux résultats qu'il faut savoir.

2 Eléments de théorie de la mesure

Soit X un ensemble (penser un intervalle ou bien $\mathbb{R}$). On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

2.1 Tribus

Définition 2.1. (Tribu)

Une tribu sur X est une famille $\mathcal{T}$ de parties de X (i.e. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$) telle que les trois propriétés suivantes soient vérifiées:

(i) $\emptyset$ et X sont dans $\mathcal{T}$;

(ii) Si $A \in \mathcal{T}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{T}$;

(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de X qui appartiennent toutes à $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est aussi dans $\mathcal{T}$.

Les élements de $\mathcal{T}$ sont appelés les ensembles mesurables de X.

Remarque: Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de X qui appartiennent toutes à $\mathcal{T}$, on a alors aussi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ qui est aussi dans $\mathcal{T}$ (peut se voir en combinant les conditions (*ii*) et (*iii*)). Une tribu $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable et par union dénombrable.

Remarque: A un ensemble X, on peut toujours au moins associer deux tribus:

- la tribu grossière $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X\}$,
- la tribu discrète $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{P}(X)$.

La tribu grossière ne présente pas d'intérêt (on veut que les ensembles raisonnables soient dans la tribu). La tribu discrète est trop grosse: pour un élément A dans cette tribu, il ne sera pas toujours évident de définir sa "mesure".

Proposition-Définition 2.1. (Tribu engendrée)

Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble quelconque de parties de X. L'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{M}$ est encore une tribu, appelée la tribu engendrée par $\mathcal{M}$. C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{M}$.

2.2 Mesure

Définition 2.2. (Mesure)

Soit X un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur X. Une mesure sur $\mathcal{T}$ est une application $\mu : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$, telle que

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, on a la propriété de σ-additivité

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Définition 2.3. (Espace mesurable et espace mesuré)

- *Un ensemble X muni d'une tribu $\mathcal{T}$ est appelé espace mesurable;*
- *Un ensemble X muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure μ sur cette tribu est appelé espace mesuré. On dit que $(X, \mathcal{T}, \mu)$ forme un espace mesuré.*

Théorème 2.1. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ croissante pour l'inclusion: $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Soit $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors $B \in \mathcal{T}$ et*

$$\mu(B) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

2.3 Ensembles négligeables

Définition 2.4. (Ensemble négligeable)

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un ensemble mesuré. Un ensemble $A \subset X$ est dit négligeable s'il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Définition 2.5. (Propriété vraie presque partout)

On dit qu'une propriété est vraie presque partout si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.

2.4 Tribu borélienne et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Définition 2.6. (Tribu borélienne)
La tribu borélienne sur $X = \mathbb{R}^d$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. C'est la plus petite tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sont appelés les boréliens de $\mathbb{R}^d$.

Remarque:

- Puisque les ouverts sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est stable par passage au complémentaire, les fermés de $\mathbb{R}^d$ sont aussi dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient en particulier tous les intervalles fermés $[a, b]$, ouverts $]a, b[$, semi-ouverts $]a, b]$ ou $[a, b[$, les réunions finies ou dénombrables d'intervalles. De même, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ contient tous les ensembles produits de tels intervalles, appelés pavés, ainsi que toutes les réunions finies ou dénombrables de pavés.
- En fait, on a même mieux. Ces familles engendrent également la tribu borélienne. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Chacune des familles suivantes engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$.*

- *les ouverts de $\mathbb{R}^d$ (c'est par définition)*
- *les fermés de $\mathbb{R}^d$ (cf passage au complémentaire)*
- *les pavés (ou intervalles en dimension 1)*
- *les pavés (ou intervalles en dimension 1) dont les bornes sont soient infinies soient rationnelles.*

Proposition-Définition 2.2. (Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$)
Soit $a \leq b$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La notation (a, b) désigne l'un des intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ ou $]a, b]$.
Il existe une mesure $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$, appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tout intervalle (a, b), $a \leq b$, on ait $\mu((a, b)) = b - a$.
Plus généralement, il existe une mesure $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$, appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, telle que, pour tout pavé $P = \Pi_{i=1}^d (a_i, b_i)$, on a $\mu(P) = \Pi_{i=1}^d (b_i - a_i)$.

Remarque: Par convention, ce produit est nul si l'un des facteurs $(b_i - a_i)$ est nul. Cette mesure est la mesure naturelle des surfaces dans $\mathbb{R}^2$, des volumes dans $\mathbb{R}^3$, ...
Exemples:

- Un ensemble formé par un point est négligeable: $A = \{x\} = [x, x]$, donc $\mu(A) = x - x = 0$. Un ensemble formé par un nombre fini de points est négligeable: $A = \bigcup_{i=1}^N \{x_n\} = \bigcup_{n=1}^N [x_n, x_n]$, donc $\mu(A) = \sum_{n=1}^N (x_n - x_n) = 0$. On admettra qu'un ensemble formé par un nombre dénombrable de points est négligeable: c'est le cas de $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$. En particulier, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont négligeables.
- Soit f définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 ailleurs. Alors, f est nulle presque partout.
- Soit $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, définie pour $x \geq 0$. Si $x > 0$, alors $f_n(x)$ converge vers 1 quand $n \to +\infty$. On a aussi $f_n(x = 0) = 0$. On pose $f(x) = 1$ sur $[0, +\infty[$. Alors f_n CV vers f presque partout.

3 Construction de l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Dans la suite, on considèrera toujours que $\mathbb{R}^d$ est muni de sa tribu borélienne pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Fonctions mesurables

Définition 3.1. (Fonction mesurable) *Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ est dite mesurable si*

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p),\ f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Proposition 3.1. *Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de parties de $\mathbb{R}^p$ qui engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}^p$ (voir Proposition 2.1) et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Pour que f soit mesurable, il suffit que*

$$\forall M \in \mathcal{M},\ f^{-1}(M) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Preuve: On considère l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ C \subset \mathbb{R}^p,\ f^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Par ailleurs, il est facile de voir que si $A, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ sont des sous-ensembles (quelconques) de $\mathbb{R}^p$, il est facile de vérifier que

$$f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c,$$

et

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n).$$

Par ailleurs, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^p$.

Toutes ces propriétés de l'image réciproque entraînent que $\mathcal{C}$ est une tribu sur $\mathbb{R}^p$. Par ailleurs, comme $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$, nécessairement $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{C}$. Or comme $\mathcal{M}$ engendre la tribu borélienne, on a que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \subset \sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{C}$, ce qui entraîne que f est mesurable.

Proposition 3.2. *Toute fonction continue est mesurable.*

Preuve: Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. En particulier, on a que pour tout O ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et donc un ensemble borélien. D'après la proposition précédente, f est donc mesurable.

La notion de fonction mesurable est conservée par les opérations élémentaires de l'analyse.

Proposition 3.3.

- *Soit f et g deux fonctions mesurables. Alors les fonctions $|f|$, $f+g$, fg, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont mesurables. De plus, si g ne s'annule pas, f/g est également mesurable.*
- *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Alors les fonctions $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ sont mesurables. De plus, si f_n converge simplement vers une fonction f, alors f est mesurable.*
- *La composée de deux fonctions mesurables est mesurable.*

Définition 3.2. (Fonctions étagées)

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ un borélien: on note χ_A sa fonction charactéristique, soit

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

χ_A est une fonction mesurable.

Les fonctions étagées sont les combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques mesurables, autrement dit toute fonction étagée e peut s'écrire sous la forme

$$e(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

où les $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et les A_i sont des boréliens de $\mathbb{R}^d$. Les fonctions étagées sont mesurables.

3.2 Intégrale d'une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$

Définition 3.3. (Intégrale d'une fonction étagée positive)

Soit X un borélien de $\mathbb{R}^d$, soit $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \cdots, N$, et soit $A_i \subset X$ des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$. Soit la fonction

$$e(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}(x).$$

On appelle intégrale de Lebesgue de e sur X et on note $\int_X e(x)\,dx$ l'élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\int_X e(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i).$$

On dit que la fonction e est intégrable si $\int_X e(x)\,dx$ est fini, ce qu'on note aussi $\int_X e(x)\,dx < +\infty$.

Définition 3.4. (Intégrabilité et intégrale d'une fonction mesurable)
Soit X un borélien de $\mathbb{R}^d$.

- *Soit f une fonction définie sur X, mesurable et positive. On définit son intégrale de Lebesgue sur X par*
$$\int_X f(x)\,dx = \sup\left\{\int_X e(x)\,dx,\ e \text{ étagée vérifiant } 0 \le e \le f\right\} \in [0,+\infty].$$
On dit que la fonction f est intégrable si $\int_X f(x)\,dx < +\infty$.

- *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. On dit que f est intégrable (au sens de Lebesgue) sur X si $\int_X |f(x)|\,dx < +\infty$. On note*
$$\mathcal{L}^1(X) = \left\{f \ \middle|\ \int_X |f(x)|\,dx < +\infty\right\}$$
l'espace des fonctions intégrables sur X.

- *Pour toute fonction f intégrable, on définit son intégrale de Lebesgue, notée $\int_X f(x)\,dx$, par*
$$\int_X f(x)\,dx = \int_X f_+(x)\,dx - \int_X f_-(x)\,dx$$
où $f_+ = max(f,0)$ et $f_- = min(f,0)$.

Remarque: L'intégrale d'une fonction positive est toujours définie, et peut valoir éventuellement $+\infty$.

Dans tout ce qui suit, X désigne un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

3.3 Propriétés de l'intégrale

Théorème 3.1.
- ***Linéarité:*** *Soit f et g deux fonctions intégrables sur X, α et β deux réels. La fonction $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur X et*
$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\left(\int_X f(x)\,dx\right) + \beta\left(\int_X g(x)\,dx\right).$$

- ***Monotonie:*** *Soit f et g deux fonctions intégrables sur X telle que $f \le g$ sur X. Alors*
$$\int_X f(x)\,dx \le \int_X g(x)\,dx.$$

Consequence importante: Pour tout f intégrable sur X, $\left|\int_X f(x)\,dx\right| \le \int_X |f(x)|\,dx$.

Théorème 3.2. *Soit A un sous-ensemble mesurable de X. Soit χ_A la fonction caractéristique de A et soit f une fonction intégrable sur X. Alors f est intégrable sur A et*
$$\int_A f(x)\,dx = \int_X f(x)\chi_A(x)\,dx.$$

Théorème 3.3. *Soit f une fonction intégrable sur X, et $A \subset X$ un ensemble négligeable. Alors f est intégrable sur A et*
$$\int_A f(x)\,dx = 0.$$

Définition 3.5. (Fonctions égales presque partout)
Soit f et g deux fonctions définies sur un borélien $X \subset \mathbb{R}^d$. On dit que f et g sont égales presque partout sur X si $\{x \in X,\ f(x) \neq g(x)\}$ est un ensemble négligeable.

Théorème 3.4. *Soit f et g deux fonctions intégrables sur X, égales presque partout sur X. Alors $\int_X f(x)\,dx = \int_X g(x)\,dx$.*

Remarque: Une fonction nulle presque partout est d'intégrale nulle.

Théorème 3.5. *Soit $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$, et les deux intégrales sont égales.*

Remarque: En particulier, si f est continue et si F est une primitive de f, on a alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

Contre-exemple: Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Cette fonction est nulle presque partout, donc elle est intégrable d'intégrale nulle au sens de Lebesgue. Par contre, elle n'est pas Riemann-intégrable.

Proposition 3.4.

- *La fonction $f(x)=\frac{1}{|x|^\alpha}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[-1,1]^d$ si et seulement si $\alpha<d$.*
- *La fonction $f(x)=\frac{1}{|x|^\alpha}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d\setminus[-1,1]^d$ si et seulement si $\alpha>d$.*

4 Théorèmes de convergence

Les théorèmes de cette section seront à faire en exercices.

4.1 Théorèmes sur les suites de fonctions

Théorème 4.1. (Convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions positives mesurables sur X ($\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in X,\ f_{n+1}(x)\geq f_n(x)$). On note f la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\,dx.$$

Théorème 4.2. (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives sur X. Alors

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\,dx.$$

Théorème 4.3. (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur X. On fait les deux hypothèses suivantes:

(i) Pour presque tout $x\in X$, la suite $(f_n(x))$ est convergente, et la limite $f(x)$ est une fonction mesurable;

(ii) Il existe une fonction g, positive et intégrable sur X, telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour presque tout $x\in X$, $|f_n(x)|\leq g(x)$.

Alors:

- *La fonction f est intégrable sur X.*
- $\lim_n\int_X|f_n(x)-f(x)|\,dx=0$*; en particulier,* $\lim_n\int_X f_n(x)\,dx=\int_X f(x)\,dx$.

Contre-exemple: La bosse glissante.

4.2 Fonctions définies par une intégrale

Soient Y un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et

$$f:\begin{cases}\Omega\times Y & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & f(x,y)\end{cases}$$

une fonction intégrable par rapport à la variable y pour tout $x\in\Omega$. On peut alors définir sur Ω la fonction

$$F(x)=\int_Y f(x,y)\,dy.$$

Théorème 4.4. (Continuité de F)
Soit $x_0 \in \Omega$. Si pour presque tout $y \in Y$, f est continue en x au voisinage de x_0, i.e. si

$$f(x,y) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0,y) \ \text{ pour presque tout } y \in Y,$$

et si il existe une fonction $g : Y \to \mathbb{R}$ intégrable vérifiant

$$\forall x \in \Omega,\ |f(x,y)| \le g(y) \ \text{ pour presque tout } y \in Y,$$

alors F est continue en x_0.

Théorème 4.5. (Différentiabilité de F)
Si pour presque tout $y \in Y$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ en x sur Ω et si il existe une fonction $g : Y \to \mathbb{R}$ intégrable vérifiant

$$\forall x \in \Omega,\ \forall 1 \le i \le p,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\right| \le g(y) \ \text{ pour presque tout } y \in Y,$$

alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et

$$\forall x \in \Omega,\ \forall 1 \le i \le p,\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_Y \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,dy.$$

5 Théorème de Fubini

Soient p et q deux entiers, et $d = p + q$. Soit X un ouvert (ou plus généralement un borélien) de $\mathbb{R}^p$, Y un ouvert (ou borélien) de $\mathbb{R}^q$. $X \times Y$ est un ouvert (borélien) de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 5.1. (Fubini)
Soit $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ mesurable.

- *Si f est positive, les fonctions $x \in X \mapsto \int_Y f(x,y)\,dy$ et $y \in Y \mapsto \int_X f(x,y)\,dx$ sont mesurables et*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

- *Si f est intégrable sur $X \times Y$, les fonctions $x \in X \mapsto \int_Y f(x,y)\,dy$ et $y \in Y \mapsto \int_X f(x,y)\,dx$ sont définies presque partout et*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

6 Changements de variable

6.1 Enoncé général du théorème

Théorème 6.1. (Changement de variable)
Soit ω et Ω deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, $\Phi : \omega \to \Omega$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, et $J(y)$ le jacobien de Φ en $y \in \omega$. Autrement dit, $J(y)$ est le déterminant de la matrice $\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}(y)\right)_{1\le i,j\le d}$. Alors la fonction $(f \circ \Phi)|J|$ est une fonction intégrable sur ω et

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\omega f(\Phi(y))|J(y)|\,dy.$$

Par ailleurs, l'égalité ci-dessus est toujours vraie si f est une fonction mesurable positive (dans ce cas, les deux membres peuvent prendre la valeur $+\infty$).

6.2 Applications

- **Coordonnées polaires:** Soit f intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta.$$

- **Coordonnées cylindriques:** Soit f intégrable sur $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-\infty}^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,dr\,d\theta\,dz.$$

- **Coordonnées sphériques:** Soit f intégrable sur $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

- **Translation:** Soit f intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+a)\,dx.$$

- **Changement d'échelle:** Soit f intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $\lambda > 0$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \lambda^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\,dx.$$