Analyse numérique et optimisation
TD4 – 18/02/2014
A. Ern – Groupes 5 & 12

Formulation variationnelle et théorème de Lax–Milgram

Exercice 1 : condition limite de type Robin

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1, $f \in C^0(\overline{\Omega})$ et $g \in C^0(\partial\Omega)$ deux fonctions données, et β un réel positif. On considère le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \qquad \text{dans } \Omega, \\ \beta u + \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Lorsque $\beta > 0$, on dit que la condition limite $\beta u + \frac{\partial u}{\partial n} = g$ est de type Robin (ou Fourier).

1. Montrer que toute solution de (1) est solution d'un problème de la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \qquad \forall v \in V, \end{cases} \tag{2}$$

où $V = C^1(\overline{\Omega})$ et où a et L sont des formes bilinéaires et linéaires que l'on précisera. (Indication : effectuer une intégration par parties et utiliser la condition limite de Robin dans l'intégrale de bord.)

Remarque : l'espace V n'a pas une structure d'espace de Hilbert ; le problème (2) ne rentre donc pas dans le cadre d'application du théorème de Lax–Milgram. Nous construirons prochainement un cadre fonctionnel mieux adapté à l'étude de ce problème.

2. Montrer que si $\beta > 0$, le problème (2) possède au plus une solution, et qu'il en est de même pour le problème (1).

Exercice 2 : approximation interne (Galerkin) et lemme de Céa

Soit V un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire sur $V \times V$, continue et coercive (paramètres M et ν) et L une forme linéaire continue sur V. On considère le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \qquad \forall v \in V, \end{cases} \tag{3}$$

qui, de par le théorème de Lax–Milgram, admet une et une seule solution.

1. Soit $V_N \subset V$ un sous-espace de V de dimension finie N. Montrer que le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_N \in V_N \text{ tel que} \\ a(u_N, v_N) = L(v_N) \qquad \forall v_N \in V_N, \end{cases} \tag{4}$$

admet une et une seule solution. On dit que le problème (4) constitue une approximation interne (ou de Galerkin) du problème de départ (3). Montrer que si (par miracle) $u \in V_N$, alors $u_N = u$.

2. Soit $(\phi_1, \dots, \phi_N)$ une base de V_N et $(U_1, \dots, U_N)$ les composantes de l'unique solution u_N de (4) dans la base $(\phi_1, \dots, \phi_N)$. Montrer que le vecteur colonne $U = (U_1, \dots, U_N)^t$ est solution d'un système linéaire du type

$$AU = B.$$

On exprimera les coefficients de la matrice $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ et du vecteur $B \in \mathbb{R}^N$ en fonction des formes a et L et de la base $(\phi_1, \dots, \phi_N)$.

3. Montrer que la matrice A est définie positive (et donc inversible !).

4. Établir l'estimation d'erreur *a priori* suivante (lemme de Céa) : il existe une constante C, que l'on précisera, telle que

$$\|u - u_N\|_V \leq C \inf_{y_N \in V_N} \|u - y_N\|_V.$$

(Indication : montrer que le réel $a(u - u_N, u - y_N)$ est indépendant du choix de $y_N \in V_N$.) On dit que l'estimation d'erreur ci-dessus est optimale ; pourquoi ?

Exercice 3 : une méthode de résolution itérative

Soit V un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire sur $V \times V$, continue et coercive (paramètres M et ν) et L une forme linéaire continue sur V. Soit u l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \qquad \forall v \in V. \end{cases} \tag{5}$$

On se propose d'approcher la solution $u \in V$ par une méthode itérative en générant une suite $(u^k)_{k \geq 0}$ d'éléments de V. On initialise la méthode avec un u^0 arbitraire dans V.

1. Soit $u^k \in V$. Montrer qu'il existe un unique $d(u^k) \in V$ tel que

$$\langle d(u^k), v \rangle = a(u^k, v) - L(v) \qquad \forall v \in V.$$

2. Soit λ un paramètre réel strictement positif. On génère la suite $(u^k)_{k \geq 0}$ en posant pour tout $k \geq 0$,

$$u^{k+1} = u^k - \lambda d(u^k).$$

Montrer que si $u^k \to y$ dans V, alors $y = u$, l'unique solution de (5).

3. Vérifier que si $d(u^{k_0}) = 0$ pour un certain indice k_0, alors pour tout $k \geq k_0$, u^k est constante et égale à u.

4. Montrer que l'application $F_\lambda : V \ni y \mapsto y - \lambda d(y) \in V$ est strictement contractante sous l'hypothèse

$$0 < \lambda < 2\frac{\nu}{M^2}.$$

(Indication : développer la norme $\|F_\lambda(y) - F_\lambda(z)\|_V^2$ et observer que $\langle d(y) - d(z), v \rangle = a(y - z, v)$ pour tout $v \in V$.) En déduire la convergence de la méthode itérative proposée. Remarque : ce résultat constitue une preuve alternative à celle du théorème de Lax–Milgram concernant l'existence de la solution de (5).

5. On suppose de plus que la forme bilinéaire a est symétrique. Rappeler la fonctionnelle d'énergie minimisée par la solution $u \in V$ et montrer que cette fonctionnelle est décroissante pour la suite $(u^k)_{k \geq 0}$.

Corrigé

Exercice 1 : condition limite de type Robin

1. Soit u solution de (1) et montrons que u est solution d'un problème de la forme (2). Tout d'abord, $u \in C^2(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega}) = V$. On multiplie ensuite l'équation $-\Delta u = f$ par une fonction $v \in V$, on intègre sur Ω, et on utilise la formule de Green (Corollaire 3.2.4). Il vient
$$\int_\Omega f(x)v(x)dx = -\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds.$$
On utilise la condition limite de Robin dans l'intégrale de bord ; d'où
$$\int_\Omega f(x)v(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x) + \beta\int_{\partial\Omega} u(x)v(x)ds - \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)ds.$$
On obtient un problème de la forme (2) avec
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \beta\int_{\partial\Omega} u(x)v(x)ds,$$
$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)ds.$$
2. Supposons que le problème (2) admette deux solutions u_1 et u_2. Posons $w = u_1 - u_2$. La fonction w est dans V et vérifie
$$a(w,v) = 0 \qquad \forall v \in V.$$
En prenant $v = w$, il vient $a(w,w) = 0$, c'est-à-dire
$$\int_\Omega |\nabla w(x)|^2 + \beta\int_{\partial\Omega} |w(x)|^2 ds = 0.$$
Donc, d'une part $\nabla w = 0$, ce qui prouve que w est constante sur chacune des composantes connexes de Ω, et d'autre part $w = 0$ sur le bord de Ω (car $\beta > 0$) ; d'où $w = 0$ et donc l'unicité de la solution de (2). Comme toute solution de (1) est solution de (2), on en déduit l'unicité de la solution de (1).

Exercice 2 : approximation interne (Galerkin) et lemme de Céa

1. On applique le théorème de Lax–Milgram. L'espace V_N est de dimension finie ; c'est donc un espace de Hilbert (pour toute norme). La forme bilinéaire a est continue et coercive sur V donc *a fortiori* sur le sous-espace V_N (avec les mêmes paramètres M et ν si on munit V_N de la norme de V). De même, L est continue sur V_N. Enfin, si par miracle $u \in V_N$, alors comme $a(u, v_N) = L(v_N)$ pour tout $v_N \in V_N$ (car $V_N \subset V$), u est solution de (4), et par unicité de la solution, $u_N = u$.
2. Par linéarité, (4) équivaut à
$$a(u_N, \phi_i) = L(\phi_i) \qquad \forall 1 \le i \le N.$$
D'où, en utilisant le fait que $u_N = \sum_{j=1}^N U_j\phi_j$,
$$L(\phi_i) = a\left(\sum_{j=1}^N U_j\phi_j, \phi_i\right) = \sum_{j=1}^N a(\phi_j,\phi_i)U_j \qquad \forall 1 \le i \le N.$$
Les composantes de la matrice A sont données par $A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$ (attention à l'ordre des indices lorsque a n'est pas symétrique) et celles du vecteur B par $B_i = L(\phi_i)$.

3. Soit $X = (X_1, \dots, X_N)^t \in \mathbb{R}^N$. Posons $\xi := \sum_{i=1}^N X_i \phi_i \in V$. Il vient
$$\sum_{i,j=1}^N A_{ij} X_i X_j = a\left(\sum_{j=1}^N X_j \phi_j, \sum_{i=1}^N X_i \phi_i\right) = a(\xi, \xi) \geq \nu \|\xi\|_V^2.$$
Par suite, la matrice A est positive. De plus, si $\sum_{i,j=1}^N A_{ij} X_i X_j = 0$, on déduit que $\xi = 0$ et par suite $X_1 = \ldots = X_N = 0$. La matrice A est donc définie positive.
4. L'indication se vérifie en observant que pour tout $y_N \in V_N$,
$$a(u - u_N, y_N) = L(y_N) - L(y_N) = 0.$$
En utilisant coercivité et continuité, il vient pour tout $y_N \in V_N$,
$$\nu \|u - u_N\|_V^2 \leq a(u - u_N, u - u_N) = a(u - u_N, u - y_N) \leq M \|u - u_N\|_V \|u - y_N\|_V.$$
Si $u \in V_N$, on a vu que $u_N = u$ et l'estimation d'erreur est évidente (pour toute constante C). Si $u \notin V_N$, alors en divisant par $\|u - u_N\|_V$, il vient
$$\|u - u_N\|_V \leq \frac{M}{\nu} \|u - y_N\|_V,$$
d'où l'estimation d'erreur avec $C = \frac{M}{\nu}$ en prenant l'infimum sur $y_N \in V_N$. On dit que l'estimation est optimale car $\inf_{y_N \in V_N} \|u - y_N\|_V$ est la plus petite valeur possible pour l'erreur.

Exercice 3 : une méthode de résolution itérative

1. On applique le théorème de représentation de Riesz.
2. Si $u^k \to y$ dans V, alors $d(u^k) \to 0$ dans V. En utilisant la continuité de a, on déduit que pour tout $v \in V$, en faisant $k \to \infty$,
$$0 = a(y, v) - L(v) \qquad \forall v \in V.$$
Le vecteur y est donc solution de (5) et par unicité, $y = u$.
3. Si $d(u^{k_0}) = 0$, alors par définition, u^{k_0} est solution de (5) et par unicité de la solution, $u^{k_0} = u$. De plus, $u^{k_0+1} = u^{k_0}$ (car $d(u^{k_0}) = 0$) si bien que $u^{k_0+1} = u$. Par suite, $d(u^{k_0+1}) = 0$ et on conclut par récurrence.
4. On observe que pour tout $(y, z) \in V \times V$,
$$\langle d(y) - d(z), v\rangle = a(y - z, v) \qquad \forall v \in V.$$
Par coercivité de a, il vient en prenant $v = y - z$,
$$\nu \|y - z\|_V^2 \leq \langle d(y) - d(z), y - z\rangle.$$
De plus, par continuité de a, il vient
$$\|d(y) - d(z)\|_V = \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\langle d(y) - d(z), v\rangle}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{a(y - z, v)}{\|v\|_V} \leq M \|y - z\|_V.$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned}\|F_\lambda(y) - F_\lambda(z)\|_V^2 &= \|(y - z) - \lambda(d(y) - d(z))\|_V^2 \\ &= \|y - z\|_V^2 - 2\lambda\langle d(y) - d(z), y - z\rangle + \lambda^2 \|d(y) - d(z)\|_V^2 \\ &\leq (1 - 2\lambda\nu + \lambda^2 M^2) \|y - z\|_V^2 \\ &< \|y - z\|_V^2,\end{aligned}$$
sous l'hypothèse $\lambda < 2\nu/M^2$. La convergence de la méthode itérative résulte alors du théorème du point fixe de Picard.

5. La solution exacte minimise sur V la fonctionnelle d'énergie

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - L(v).$$

Un calcul direct montre, en posant $d^k = d(u^k)$, que

$$\begin{aligned} J(u^{k+1}) &= J(u^k - \lambda d^k) \\ &= J(u^k) - \lambda(a(u^k, d^k) - L(d^k)) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 a(d^k, d^k) \\ &= J(u^k) - \lambda \|d^k\|_V^2 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 a(d^k, d^k) \\ &\leq J(u^k) - \lambda \|d^k\|_V^2 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 M \|d^k\|_V^2 \\ &= J(u^k) + \lambda(\tfrac{1}{2}\lambda M - 1)\|d^k\|_V^2 < J(u^k) \end{aligned}$$

sous l'hypothèse $d^k \neq 0$ puisque $\lambda < 2\nu/M^2 \leq 2/M$ car $\nu \leq M$. La décroissance est stricte tant qu'il n'y a pas convergence.