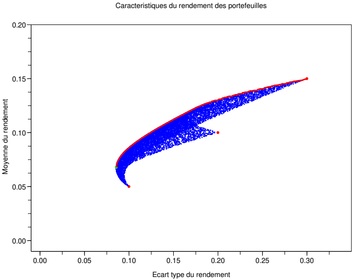
Probabilité, Espérance, Variance

Choix optimal de portefeuille



J.-P. Chancelier, B. Lapeyre

http://cermics.enpc.fr/~jpc/decision-incertain

Plan

Fonctionnement du cours

- Site du cours (Jean-Philippe Chancelier et Bernard Lapeyre)

  `http://cermics.enpc.fr/~jpc/decision-incertain`

- 6 séances : 1h de cours, 1h30 de TP informatique
  - Introduction aux chaînes de Markov et problèmes de décision associés
  - Résultats mathématiques en cours et concrétisés par des TP de simulation.
  - une conférence qui remplace le dernier cours.
- Enseignants (cours) :
  - Jean-Philippe Chancelier (`jean-philippe.chancelier@enpc.fr`)
- Enseignants (TPs informatiques) :
  - Roberta Flenghi (`roberta.flenghi@enpc.fr`)
  - Zoé Fornier (`zoe.fornier@enpc.fr`)
  - Raian Lefgoum (`rnl.persee@gmail.com`)
- Language de programmation: `Python` (`jupyter notebook`).

Organisation et règles de validation

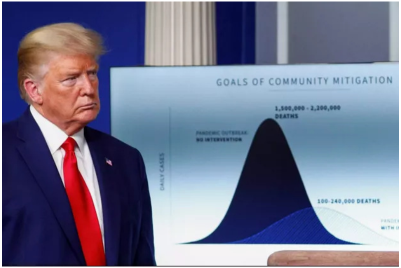
Organisation

- une semaine entre le cours et le TD correspondant ...
- ... pour: lire le cours, faire les exos, préparer le TP info
- une feuille d'exos par séance disponible sur le site

Évaluation

- contrôle sous forme de quizz: (portant sur cours, exercices, TD)
- envoi systématique à l'issu du TD (avant 12h00) du "Python notebook" à votre responsable de TD
- si plus d'une absence non justifiée examen oral final
- rendu (individuel) de l'un des 5 TD informatiques rédigé en détails (LaTeX suggéré).

Objet du cours



- Exposer des *situations* où la modélisation probabiliste est utile/indispensable pour prendre des décisions.
- Décrire un outil nouveau (les *chaînes de Markov*) et montrer comment cet outil peut être utilisé de façon effective.
- Implémenter les méthodes mathématiques proposées.

Aujourd'hui ...

- Des rappels de probabilité (espérance, variance, ...)
- Théorie du portefeuille de Markowitz.
  - Pourquoi des actifs (actions,...) ayant des rendements aux caractéristiques diverses peuvent ils coexister ?
  - Comment s'y prendre pour optimiser un portefeuille d'actif ?

Le rendement d'un actif

- Actif i (action, obligation, ...) de *rendement* R_i
- Rendement = sur une période de temps donnée T:

$$1€ \text{ à l'instant } 0 \text{ va rapporter } (1 + R_i)€ \text{ en } T.$$

- Plusieurs actifs (ex CAC40 $i = 1 \ldots 40$), vecteur de rendement $R = (R_1, \ldots, R_n)$.
- Rendements *déterministes* et un *marché* où l'on peut acheter et vendre ces actifs,

$$\text{tous les } R_i \text{ doivent être égaux.}$$

- Mais c'est un fait d'expérience que les rendements des actifs n'ont pas des caractéristiques identiques: il est *nécessaire* de les supposer *aléatoires*: "Risk is not an add-on"[1]...
- ce qui nous amène à quelques rappels de probabilité ...

[1] Voir R.C.Merton interviewed in [Bernstein(2007)].

Probabilité et espérance : rappels

- Description d'un expérience aléatoire : une *probabilité*, sur $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathbb{P}$ qui opère sur des ensembles de $\mathcal{A}$.
- $A \in \mathcal{A}$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. $\sum_{i \geq 1} A_i$ signifie une réunion *dénombrable* et *disjointe*.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i)$$

- À une probabilité $\mathbb{P}$ est associée une espérance $\mathbb{E}$ (qui opère sur des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$)
  - $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$.
  - *linéarité* (X et Y positifs ou intégrables, X_i positifs).

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i \geq 1} X_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}(X_i)$$

Espérance et variance

- L'espérance est *linéaire*.
- Variance : $\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\left\{(X-\mathbb{E}(X))^2\right\} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
- $\mathrm{Var}(X) = 0$ implique $X = Cte$ (p.s.).
- Covariance :
  $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\{(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- La linéarité de l'espérance permet de prouver

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

- La variance fonctionne comme une forme *quadratique*, la covariance comme une *forme bilinéaire*.
- Cas particulier : si indépendance des X_i, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$, $i \neq j$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).$$

Vecteur et matrice de variance-covariance

- $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Γ matrice de variance-covariance de X

$$\Gamma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

- Permet de calculer $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right)$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) = \lambda^T \Gamma \lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \Gamma_{ij}.$$

- Γ est une matrice symétrique, positive ($\lambda^T \Gamma \lambda \geq 0$, pour tout λ).

Espérance et variance comme critères de décision

- Comment choisir entre 2 v.a. X et Y dont on ne connait que la loi ?
- On utilise (souvent) l'espérance et la variance comme critère de choix (plus l'espérance est grande ou plus la variance est petite, "meilleure" est la v.a.).
- C'est discutable[2], mais c'est l'approche la plus simple.
- Des "mesures de risque" mieux fondées (Voir [Föllmer and Schied(2008)]) existent et sont aussi utilisées : "value at risk", "expected shortfall", ...
- ... au prix toutefois d'une complexité accrue de la modélisation et/ou des calculs.

[2] On peut avoir $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, sans que X et Y soient comparables pour l'ordre partiel suggéré (voir la feuille d'exercice pour un exemple).

Portefeuille de Markowitz : le modèle

- d actifs (actions, obligations, ...). R_i le rendement, aléatoires, du $i$ème actif.

$$1€ \text{ en actif } i \text{ en } 0 \rightarrow (1+\mathsf{R}_i)€ \text{ en } T.$$

- $\mathsf{R} = (\mathsf{R}_1, \ldots, \mathsf{R}_d)$ le vecteur, aléatoire, des rendements
- $r = (\mathbb{E}(\mathsf{R}_1), \ldots, \mathbb{E}(\mathsf{R}_d))$, le vecteur des moyennes des rendements, par convention on suppose

$$r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_d.$$

- Γ la matrice de variance-covariance du vecteur R.

$$\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(\mathsf{R}_i) = \Gamma_{ii}.$$

Portefeuille de Markowitz : les portefeuilles

- On va considérer des portefeuilles, composés de quantités d'actifs λ_i, de valeur initiale V_0 égale (par convention) à 1€

$$V_0 = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1, \quad V_T = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i (1 + \mathrm{R}_i) = 1 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \mathrm{R}_i.$$

- Souvent $0 \leq \lambda_i \leq 1$. Mais dans certains cas on acceptera des quantités négatives pour λ_i (emprunt d'actif).
- Le gain du portefeuille est égal à $\mathrm{G} = V_T - V_0$

$$\mathrm{G} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \mathrm{R}_i$$

- La moyenne et la variance de G se calcule facilement

$$\mathbb{E}(\mathrm{G}) = \lambda . r \qquad \mathrm{Var}(\mathrm{G}) = \lambda^T \Gamma \lambda$$

en fonction de r et Γ. On va comparer les portefeuilles grâce à ces deux valeurs.

Portefeuille de Markowitz : les 2 critères

- L'hypothèse de base du modèle est que l'investisseur va classer les portefeuilles en utilisant la moyenne et l'écart-type (= la racine de la variance) du gain.
- Un portefeuille de moyenne inférieure et de variance supérieure ne sera jamais choisi par un investisseur rationnel (c'est réaliste, mais ça reste une hypothèse).
- On définit un ordre *partiel* sur les portefeuilles :

  G_1 préférable à G_2, ssi $\mathbb{E}(\mathrm{G}_1) \geq \mathbb{E}(\mathrm{G}_2)$ et $\mathrm{Var}(\mathrm{G}_1) \leq \mathrm{Var}(\mathrm{G}_2)$.
- On suppose que les actifs de base ne sont pas comparables pour cet ordre partiel, ce qui impose

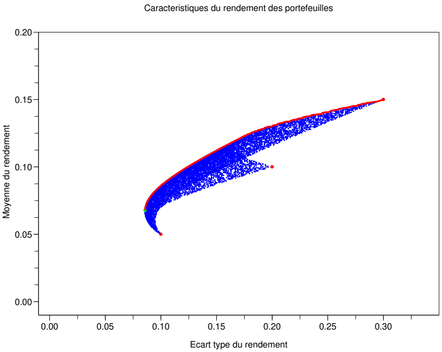
$$0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_d.$$

Portefeuille de Markowitz : frontière efficiente

- On s'intéresse aux portefeuilles "non dominés" (maximaux pour l'ordre partiel) : ceux sont les seuls susceptibles d'être utilisés par un intervenant rationnel.
- Ces portefeuilles "non dominés" forment une frontière de *Pareto* (ou d'indifférence).
- Markowitz l'appelle la *frontière efficiente*.
- On calculera cette frontière par exploration/simulation (en TD).
- Il existe d'autres méthodes plus efficaces (voir page 23) .

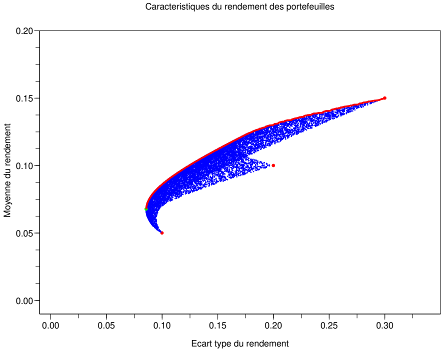
Exemple de frontière efficiente

- 3 actifs risqués, covariances nulles, frontière obtenue par simulation (cf TD), avec contraintes $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.
- frontière efficiente : points non dominés.



Frontière efficiente : remarques

- Le point de variance minimale.
- Effet de diversification : portefeuille de variance inférieure à l'actif de variance minimale, rendement meilleur.
- Sur la frontière efficiente on choisit un compromis espérance-variance.

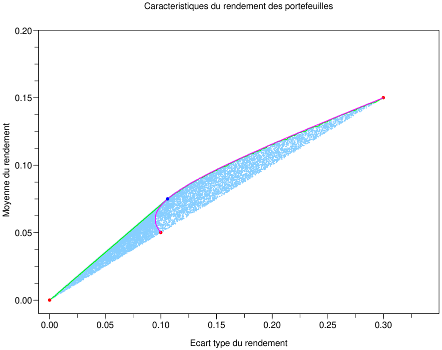


Actif sans risque et portefeuille de marché

- On suppose souvent l'existence d'un actif 0 sans risque (de variance nulle $\sigma_0 = 0$) et (donc) de rendement constant r_0.
- Cet actif correspond à un placement (quantité positive) ou un emprunt (quantité négative) dans une banque.
- Le rajout de cet actif modifie la forme de la frontière efficiente (cf TD) et fait apparaître un portefeuille remarquable: *le "portefeuille de marché"*.

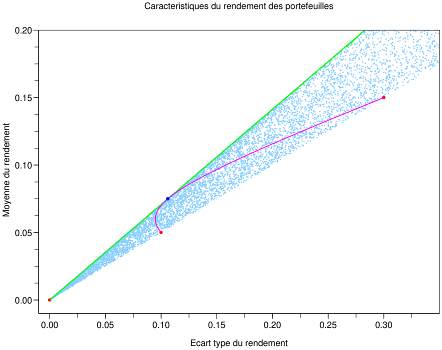
Le portefeuille de marché

- Cas 2 actifs risqués et un actif sans risque $r_0 = 0$, frontière obtenue par simulation (cf TD), avec contrainte $\lambda_i \geq 0$.
- Frontière efficiente pour les deux actifs risqués, les trois actifs.
- Portefeuille de marché : le point où les deux frontières se séparent.



Portefeuille de marché

- Son intérêt apparaît lorsque l'on autorise l'*emprunt* de l'actif non risqué.
- La frontière efficiente est modifiée (cf TD). La droite se prolonge au delà de P.
- Cette droite porte le nom de “droite de marché”.



Intérêt du portefeuille de marché

- La droite de marché domine strictement la frontière efficiente "sans emprunt" (sauf pour le portefeuille de marché où elle coïncide).
- Le seul point "rationnel" de la frontière efficiente, qui ne contient pas d'actif sans risque, est le portefeuille de marché.
- Si l'on peut emprunter, les portefeuilles "rationnels" sont obtenus par combinaison de l'actif sans risque et du portefeuille de marché.
- En empruntant, on peut obtenir un rendement de même moyenne mais de variance inférieure à celle du meilleur actif individuel.
- En empruntant, on peut obtenir un rendement de même variance mais de moyenne supérieure à celle du meilleur actif individuel.
- Si l'on peut emprunter, il faut le faire !
- Le portefeuille de marché fait intervenir l'ensemble des actifs risqués (tous les actifs peuvent coexister).
- Variance nulle : il faut tout investir dans l'actif sans risque.

Conclusions

- finance et aléas
  - Sans hasard, pas d'activité financière.
  - ... ou dès qu'il y a du hasard, l'activité financière se développe.
  - cf développement des produits dérivées suite à l'abandon en 1971 de la convertibilité du dollars en or (accord de Bretton-Wood).
- Comment comparer des variables aléatoires ?
  - ici ordre partiel (Espérance,Variance)
  - Comme agréger des valeurs $X(\omega)$?

$$\min_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[f(X)]\ , \quad \min_{X\in\mathcal{X}} \sup_{\omega\in\Omega} f(X(\omega))\ , \quad \min_{X\in\mathcal{X}} \sup_{P} \mathbb{E}_{P\in\mathcal{P}}[f(X)] \tag{1}$$

Le portefeuille de marché comme solution d'un problème d'optimisation

- Pour calculer P il faut résoudre le problème d'optimisation suivant : max en λ (vérifiant les contraintes) de la pente du point $(\sqrt{\mathrm{Var}(\mathsf{G})}, \mathbb{E}(\mathsf{G}))$ ou encore

$$\max_{\lambda} \frac{\mathbb{E}(\mathsf{G})^2}{\mathrm{Var}(\mathsf{G})} = \max_{\lambda} \frac{(r^T\lambda)^2}{\lambda^T\Gamma\lambda}$$

- Le quotient $\frac{\mathbb{E}(\mathsf{G})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathsf{G})}}$ s'appelle le *ratio de Sharpe* du portefeuille[3].

[3] William Sharpe a été lui aussi prix Nobel d'économie en 1990 avec Harry Markowitz et Merton Miller.

Calcul du portefeuille de marché

$$\max_{\lambda} \frac{\mathbb{E}(G)^2}{\mathrm{Var}(G)} = \max_{\lambda} \frac{(r^T \lambda)^2}{\lambda^T \Gamma \lambda}$$

- Voir cours optimisation de 1A.
- Lorsque l'on ne tient pas compte des contraintes de positivité sur λ, mais seulement de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1^T \lambda = 1$, on peut résoudre ce problème.
- On peut utiliser un algorithme générique d'optimisation de type gradient. Ce type de problème est accessible dans `Scicoslab` ou `Python`, via une fonction d'optimisation. Voir le corrigé du TD.
- Le problème évoqué peut être traité explicitement, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Calcul du portefeuille de marché

- En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour la norme $\sqrt{x^T \Gamma x}$, on obtient

$$r^T \lambda = (\Gamma^{-1} r)^T \Gamma \lambda \leq \sqrt{r^T \Gamma^{-1} r} \sqrt{\lambda^T \Gamma \lambda}.$$

On en déduit que

$$\sup_{\lambda, \sum_{i=\mathbf{1}}^d \lambda_i = 1} \frac{r^T \lambda}{\sqrt{\lambda^T \Gamma \lambda}} \leq \sqrt{r^T \Gamma^{-1} r}$$

et que l'égalité est atteinte pour $\lambda = \Gamma^{-1} r / (1 \, \Gamma^{-1} r)$ où $1 = (1, \ldots, 1)$

Paramètrisation de la frontière efficiente par des problèmes d'optimisation

- Une façon de calculer la frontière efficiente est de minimiser la variance à espérance égale à α, puis de faire varier α.

$$\min_{\lambda,\ 1^T\lambda=1,\ r^T\lambda=\alpha} \lambda^T \Gamma \lambda.$$

- Toujours en ignorant les contraintes de positivité sur λ, on peut encore résoudre ce problème
- Soit en utilisant une routine d'optimisation en éliminant les 2 contraintes (voir TD).
- Soit une utilisant deux multiplicateurs de Lagrange, le problème se résolvant alors de façon explicite en utilisant l'inverse de la matrice Γ (exercice).

Conclusions : décider dans l'incertain

- Décider en environnement incertain suppose d'*identifier* un modèle et de *choisir des critères* de décision (ce qui n'est pas toujours simple).
- Un fois ceci fait, on utilise des algorithmes pour résoudre les problèmes d'*optimisation* (ce qui n'est pas toujours simple).
- Une modélisation aléatoire simple peut éclairer la pratique et conduire à des règles opératoires.

Harry Markowitz

- Né en 1927, prix Nobel d'Economie 1990.
- Article fondateur, à 25 ans, en 1952 ("Portfolio Selection", The Journal of Finance).

- " ... when I defended my dissertation as a student in the Economics Department of the University of Chicago, Professor Milton Friedman argued that portfolio theory was not Economics, and that they could not award me a Ph.D. degree in Economics for a dissertation which was not in Economics. ... at the time I defended my dissertation, portfolio theory was not part of Economics. But now it is." Nobel Lecture, December 7, 1990, Harry M. Markowitz.

Pour aller plus loin : cours de l'École des Ponts

- 1A : cours de "Probabilité", cours d'"Optimisation"
- 2A : cours "Processus Aléatoires", cours de "Recherche Opérationnelle", cours "Optimisation", cours "Méthodes Mathématiques pour la Finance", cours "Stratégie financière de l'entreprise"

Bibliographie

P.L. Bernstein.
Capital Ideas Evolving.
Jhon Wiley and Son, 2007.

Hans Föllmer and Alexander Schied.
Convex and coherent risk measures.
http://www.alexschied.de/Encyclopedia6.pdf, 2008.

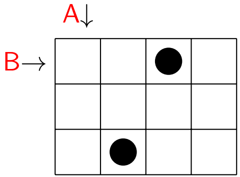
M. Haugh.
Asset allocation and risk management.
Available on ieor e4602 web page, Columbia University, 2009.

H.M. Markowitz.
Portfolio selection.
The Journal of Finance, 7(1):77–91, 1952.

H.M. Markowitz.
Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.
John Wiley and Sons, 1959.

TP: Sur un puzzle (du site) de la NSA

- Deux œufs “au hasard” dans une matrice $p \times q$.
- Deux joueurs: le joueur A parcours la matrice en colonne, le joueur B en ligne.
- Le gagnant est celui qui atteint le premier l'un des deux œufs.



- Ce jeu est-il équitable ?
- La réponse dépend de p et q de façon bizarre:

$$\neq \text{ pour } (p = 3, q = 4), (p = 4, q = 4) \text{ et } (p = 4, q = 5)!$$