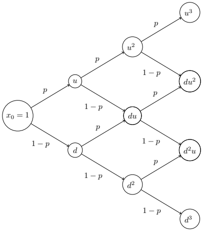
Loi et chaîne de Markov

Test d'équirépartition, Calcul de prix



J.-P. Chancelier, B. Lapeyre

http://cermics.enpc.fr/~jpc/decision-incertain

Plan

Probabilité et espérance conditionnelle

- Une *probabilité* $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
- Une espérance $\mathbb{E}$ (qui opére *linéairement* sur des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$).
- Probabilité conditionnelle : A, $B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B) > 0$ par définition

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Espérance conditionnelle : $B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B) > 0$, X v.a., par définition

$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{\mathbb{E}(X 1_B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$\rightarrow$ On obtient $\mathbb{E}(1_A|B) = \mathbb{P}(A|B)$ et la linéarité de $X \rightarrow \mathbb{E}(X|B)$.

Loi d'une variable aléatoire

- Un espace d'état fini $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,
  une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{X}$,

$$\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{X}$$

- Loi de la variable aléatoire X, $p_{\mathrm{X}} : \mathbb{X} \to [0, 1]$

$$p_{\mathrm{X}}(x) = \mathbb{P}\Big[\{X = x\}\Big] \ , \ \ \forall x \in \mathbb{X}$$

  - On a $p_{\mathrm{X}}(x) \in [0, 1]$ et $\sum_{x \in \mathbb{X}} p_{\mathrm{X}}(x) = 1$.
- A quoi ca sert ?

$$\mathbb{E}\Big[f(\mathrm{X})\Big] = \sum_{x \in \mathbb{X}} p(x) f(x)$$

Loi d'un vecteur aléatoire

- $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{X}^n$. Loi de X

$$p_X(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$$

- $\sum_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{X}} p_X(x_1, \ldots, x_n) = 1.$
- A quoi ca sert ?

$$\mathbb{E}\left[f(X_1, \ldots, X_n)\right] = \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{X}} p_X(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n)$$

- Par contraction, la loi de X permet de calculer les lois marginales p_{X_i} des X_i

$$p_{X_i}(x) = \sum_{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n \in \mathbb{X}} p_X(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

- Une remarque simple (mais utile) :

$$\mathbb{E}\left[f(X_i)\right] = \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{X}} p_X(x_1, \ldots, x_n) f(x_i) = \mathbb{E}_{p_{X_i}}\left[f(X_i)\right] = \sum_{x_i \in E} p_{X_i}(x_i) f(x_i) .$$

Loi d'un vecteur et indépendance

- $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur de v.a. indépendantes si et seulement si (au choix), pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$, pour tout $f_1, \ldots, f_n$ de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$:
  - $\mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$
  - $\mathbb{E}\left[f_1(X_1) \times \cdots \times f_n(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[f_1(X_1)\right] \times \cdots \times \mathbb{E}\left[(f_n(X_n)\right]$
- les lois marginales p^i des X_i ne caractérisent pas la loi du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$
- ... sauf si on suppose que ces v.a. sont indépendantes

$$p_{(X_1,\cdots,X_n)} = p_{X_1} \otimes p_{X_2} \otimes \cdots p_{X_n} \ .$$

Système dynamique aléatoire

- $\mathrm{W} = (\mathrm{W}_n, n \geq 1)$ suite de variables aléatoires indépendantes de même loi sur un espace $\mathbb{W}$.
- On considère $F : \mathbb{X} \times \mathbb{W} \to \mathbb{X}$ et "On tire une application de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$, au hasard" : $F(\cdot, \mathrm{W}_{n+1})$.
- Sytème dynamique aléatoire, $\mathrm{X}_0 = x_0 \in \mathbb{X}$ arbitraire, et par récurrence
$$\mathrm{X}_{n+1} = F(\mathrm{X}_n, \mathrm{W}_{n+1})$$
- La connaissance de $F : \mathbb{X} \times \mathbb{W} \to \mathbb{X}$ permet de simuler très simplement la suite $(\mathrm{X}_n, n \geq 0)$ à partir de la suite $(\mathrm{W}_n, n \geq 1)$.

Systèmes dynamiques aléatoires : exemples

$(W_n, n \geq 1)$ une suite de tirages à pile ou face indépendants, $0 \leq p \leq 1$

$$W_n = \begin{cases} P & \text{avec probabilité } p \,, \\ F & \text{avec probabilité } (1-p) \,. \end{cases}$$

- Marche aléatoire ($p = 1/2$, marche aléatoire symétrique)

$$X_0 = 0 \,, \quad X_{n+1} = X_n + \left(1_{\{W_{n+1} = P\}} - 1_{\{W_{n+1} = F\}} \right) .$$

- Processus en "dents de scie": (# pile consécutifs avant n)

$$X_0 = 0 \,, \quad X_{n+1} = (1 + X_n) 1_{\{W_{n+1} = P\}} .$$

- Processus de Cox-Ross, $(d, u) \in \mathbb{R}^2$ avec $d < 1 < u$

$$X_0 = 1 \,, \quad X_{n+1} = X_n \left(u \, 1_{\{W_{n+1} = P\}} + d \, 1_{\{W_{n+1} = F\}} \right) .$$

Système dynamique aléatoire et propriété de Markov

- Un système dynamique aléatoire vérifie la propriété de Markov

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\right) = P(x_n, x_{n+1})$$

- où P une matrice de transition : $(P(x,y), x, y \in E)$ (parfois aussi noté $(P(x \to y))$) donnée par

$$P(x,y) = \mathbb{P}(F(x, W_1) = y).$$

- Matrice de transition : $P(x,y) \geq 0$ et $\sum_{y \in E} P(x,y) = 1$.
- On a forcement $P(x,y) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x\right)$ et

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\right)$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right) \\
&\quad = \mathbb{P}\left(F(X_n, W_{n+1}) = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right) \\
&\quad = \mathbb{P}\left(F(x_n, W_{n+1}) = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right).
\end{aligned}
$$

- $F(x_n, W_{n+1})$ indépendante du vecteur $(W_1, \ldots, W_n)$
- $X_0, \ldots, X_n$ fonctions de $(W_1, \ldots, W_n)$.
- Donc $F(x_n, W_{n+1})$ indépendante de $X_0, \ldots, X_n$.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right) \\
&\quad = \mathbb{P}\left(F(x_n, W_{n+1}) = x_{n+1}\right) \mathbb{P}\left(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right) \\
&\quad = \underbrace{\mathbb{P}\left(F(x_n, W_1) = x_{n+1}\right)}_{=} \mathbb{P}\left(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right) \\
&\quad = \qquad P(x_n, x_{n+1}) \quad \mathbb{P}\left(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right)
\end{aligned}
$$

- En sommant sur tous les $x_0, \ldots, x_{n-1}$ dans $\mathbb{X}$, on obtient aussi

$$
\mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n\right) = P(x_n, x_{n+1}) \mathbb{P}\left(X_n = x_n\right).
$$

Matrice de transition : exemples

- Marche aléatoire ($p = 1/2$, marche aléatoire symétrique)

$$X_0 = 0, X_{n+1} = X_n + \left(1_{\{W_{n+1} = P\}} - 1_{\{W_{n+1} = F\}}\right).$$

$x \in \mathbb{Z}$, $P(x, x+1) = p$, $P(x, x-1) = 1 - p$, 0 sinon

- Processus en "dents de scie": ($\#$ pile consécutifs avant n)

$$X_0 = 0, X_{n+1} = (1 + X_n) 1_{\{W_{n+1} = P\}}.$$

$x \in \mathbb{N}$, $P(x, x+1) = p$, $P(x, 0) = 1 - p$, 0 sinon

- Processus de Cox-Ross (cf. finance), $d < 1 < u$

$$X_0 = 1, X_{n+1} = X_n \left(u\, 1_{\{W_{n+1} = P\}} + d\, 1_{\{W_{n+1} = F\}}\right).$$

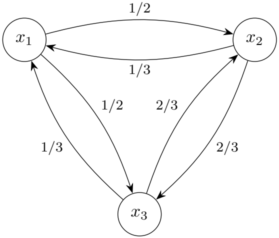
$P(x, xu) = p$, $P(x, xd) = 1 - p$, 0 sinon

Matrice de transition : exemples (suite)

- Matrice de transition P sur $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Graphe $G = (\mathbb{X}, \mathcal{E})$ avec $x\mathcal{E}y \iff P_{x,y} > 0$



- Que represente la matrice $P^2 = P \times P$?

Système dynamique aléatoire et chaîne de Markov

- une suite de variables aléatoires qui vérifie la propriété de Markov, s'appelle une chaîne de Markov.
- $P(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$, $x, y \in E$, est la matrice de transition de la chaîne de Markov.
- Un système dynamique aléatoire est une chaîne de Markov et reciproquement on peut représenter (en loi) une chaîne de Markov comme un système dynamique aléatoire.
- La matrice de transition $P(x, y)$ se déduit de F et de la loi de W.
- P contient toute l'information utile pour mener à bien les calculs de loi concernant la chaîne.
- Pour simuler une chaîne de Markov, on utilise une représentation comme système dynamique aléatoire.

Chaîne de Markov : définition

Definition 1

Une suite de v.a. $(X_n, n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ est un chaîne de Markov de *matrice de transition* $(P(x,y), x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{X})$, si et seulement si, par définition, pour tout $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\right) \\ = P(x_n, x_{n+1}) \\ = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\right) \end{aligned}$$

La loi de X_0, μ_0, est appelée la *loi initiale*.

- **Formellement, égalité vrai seulement si $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) > 0$, sinon l'interpréter comme**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}) \\ = \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) P(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

- **Matrice de transition P_n dépendant de n : chaîne de Markov inhomogène**

Matrice de transition et calcul de lois

- $\mathbb{X}$ fini
- $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov de matrice de transition P sur $\mathbb{X}$.
- μ_0 la loi de X_0 (loi initiale), $\mu_0(x) = \mathbb{P}(X_0 = x)$, $x \in \mathbb{X}$.
- La loi du vecteur $(X_0, \ldots, X_n)$ se calcule explicitement en fonction de P et μ_0

$$\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\right) = \mu_0(x_0) P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1}, x_n).$$

- Preuve = propriété de Markov

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\right) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\right) P(x_{n-1}, x_n),
\end{aligned}$$

puis on itère.

Matrice de transition : quelques notations

- $\mathbb{X}$ fini : μ est un vecteur *ligne*, P une *matrice* et f un vecteur *colonne*.
- $(Pf)(x) = \sum_{y \in \mathbb{X}} P(x,y) f(y)$, f une fonction de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$. Pf est aussi une fonction de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$.
- $(\mu P)(y) = \sum_{x \in \mathbb{X}} \mu(x) P(x,y)$, μ une loi de probabilité sur $\mathbb{X}$. μP est aussi une probabilité sur $\mathbb{X}$
- $(PQ)(x,y) = \sum_{z \in \mathbb{X}} P(x,z) Q(z,y)$, pour P et Q deux matrices de transition. PQ est aussi une matrice de transition.
- P^n est définie par récurrence par :
$$P^{n+1}(x,y) = \sum_{z \in \mathbb{X}} P(x,z) P^n(z,y).$$
- μ loi sur $\mathbb{X}$, f fonction de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$: $\mu f = \sum_{x \in \mathbb{X}} \mu(x) f(x)$.
- Si X a pour loi μ, $\mathbb{E}[f(X)] = \mu f$.

Loi de X_n

- Par contraction de la loi du vecteur $(X_0, \ldots, X_n)$, on obtient

$$\mathbb{P}(X_n = x_n) = \sum_{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{X}} \mu_0(x_0) P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1}, x_n).$$

- avec les notations précédentes :

$$\mathbb{P}(X_n = x_n) = (\mu_0 P^n)(x_n),$$

- $\text{loi}(X_n) = \mu_0 P^n$: un (simple) calcul matriciel à partir de μ_0 et P.

Un test d'équirépartition

- Question Les 100 tirages à pile ou face suivants sont ils "aléatoires" ?

P	F	F	F	P	F	P	P	F	F
F	P	P	P	F	F	P	F	P	F
P	F	F	F	P	P	F	F	P	P
P	F	F	P	F	P	P	F	F	P
F	P	P	F	P	P	F	F	F	P
P	P	F	P	F	P	P	F	P	P
F	F	P	F	P	P	F	F	P	F
P	F	F	F	P	F	P	P	F	F
P	F	F	F	P	P	P	F	P	F
P	F	F	P	P	F	P	F	P	P

- Ça n'a pas l'air trop mal : on trouve 50 piles et 50 faces ...

Un test d'équirépartition

- mais ... le nombre maximum de piles consécutifs est de 3, ce qui est (très) peu compatible avec l'hypothèse d'un tirage au hasard.
- On a du mal a imiter le hasard, ...
- Nous allons voir qu'il faut s'attendre à 4 piles consécutifs (avec proba 0.97) voire 5 (avec proba 0.81).
- On a plus de chance de voir 10 piles consécutifs (ou plus) que d'en voir 3 ou moins !
- On va calculer le loi du nombre maximum de piles consécutifs au bout de 100 tirages.

Chaîne de Markov arrêtée

- $(X_n, n \geq 0)$ un système dynamique aléatoire

$$X_{n+1} = F(X_n, W_{n+1}).$$

- $x \in \mathbb{X}$, soit $\tau_x = \inf \left\{ n \geq 0 \,\middle|\, X_n = x \right\}$: le premier temps d'atteinte de x (pas forcément fini, $+\infty$ si ensemble vide). C'est une variable aléatoire.
- $n \wedge \tau_x = \inf \{n, \tau\}$
- La suite $(Y_n, n \geq 0)$ définie par $Y_n = X_{n \wedge \tau}$ pour tout, $n \geq 0$ est aussi un système dynamique aléatoire puisque

$$Y_{n+1} = F(Y_n, W_{n+1}) 1_{\{Y_n \neq x\}} + x 1_{\{Y_n = x\}} = G(Y_n, W_{n+1}).$$

$$\forall (x', w) \in \mathbb{X} \times \mathbb{W}\,, \;\; G(x', w) = F(x', w) 1_{\{x' \neq x\}} + x 1_{\{x' = x\}} \,..$$

$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une chaîne de Markov

- On a $\{Y_n = x\} = \{n \geq \tau\}$.

Chaîne en dents de scie arrêtée

- $(X_n, n \geq 0)$ la chaîne en dents de scie
- On fixe $l > 0$ et on considère $\tau_l = \inf \{n \geq 0, X_n = l\}$
- $(Y_n^l, n \geq 0)$ avec $Y_n^l = X_{n \wedge \tau_l}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
  la chaîne de Markov en dents de scie arrêtée
- $Y_n^l \in \{0, \ldots, l\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- de matrice de transition P_l

$$P_l : \begin{cases} P_l(x, x+1) = p & \text{si } 0 \leq x < l, \\ P_l(x, 0) = 1 - p & \text{si } 0 \leq x < l, \\ P_l(l, l) = 1. & \\ P_l(x, y) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi du nombre de piles consécutifs après 100 tirages

- $(N_n^{\max}, n \geq 0)$ nombre maximum de piles consécutifs après n tirages.

$$\{Y_n^l = l\} = \{N_n^{\max} \geq l\}$$

- Le calcul de la loi de Y_n^l pour tout n donne $\mathbb{P}(Y_n^l = l)$
  - $\mathbb{P}(Y_0^l = 0) = 1$. Loi initiale $\mu_0(0) = 1$, $\mu_0(k) = 0$ sinon. $\mu_0 = (1, 0, \ldots, 0)$.
  - Loi de $Y_n^l = \mu_0 (P_l)^n = (P_l^n(0,k), 0 \leq k \leq l)$ (un vecteur ligne).
  - $\mathbb{P}(Y_n^l = l) = (P_l)^n(0, l)$.
- On obtient la *loi* du nombre de piles consécutifs maximum après 100 tirages avec $N_{100}^{\max}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{100}^{\max} = l) &= \mathbb{P}(Y_{100}^l = l) - \mathbb{P}(Y_{100}^{l+1} = l+1) \\ &= P_l^{100}(0, l) - P_{l+1}^{100}(0, l+1).\end{aligned}$$

Loi du nombre maximum de piles consécutifs

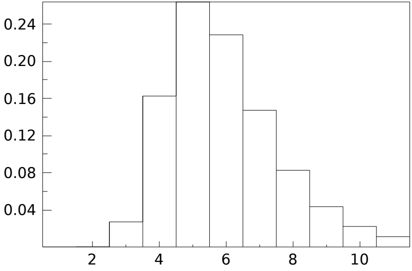


Figure: Loi du nombre de piles consécutifs.

- $\mathbb{P}(\text{nombre de piles consécutifs } \leq 3) = 0.0273$
- $\mathbb{P}(\text{nombre de piles consécutifs } \geq 5) = 0.8101$

Une régle de décision

- Si l'on voit au moins 4 piles consécutifs, la suite sera déclarée aléatoire, sinon, la suite sera déclarée non aléatoire.
- Si la suite a été tirée aléatoirement, je vais me tromper avec moins de 3% d'erreur.
- Si la suite n'est pas aléatoire, je suis aidé par la tendance naturelle à ne pas faire de trop longues series.
- "Mon" exemple ne passe pas le test. Mais si on le lit par colonne ou lieu de ligne, il le passe aisément!
- À vérifier avec l'un de vos camarades, si vous êtes sceptique.

Loi de X_n : une autre façon d'écrire les choses

- $(X_n, n \geq 0)$ chaîne de Markov de matrice de transition P sur $\mathbb{X}$.
- $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$ (i.e. $\mu_0(x_0) = 1$, $\mu_0(x) = 0$ si $x \neq x_0$.)
- On sait exprimer $\mathbb{E}\left[f(X_N)\right]$

$$\mathbb{E}\left[f(X_N)\right] = \mu_N f = \mu_0 P^N f = \sum_{x \in \mathbb{X}} \mu_0(x)(P^N f)(x) = (P^N f)(x_0).$$

Une formulation alternative plus algorithmique.

Theorem 2

Soit $(u(n,x), n = 0, \ldots, N, x \in \mathbb{X})$ la solution unique de

$$(1) \qquad \begin{cases} u(n,x) = \sum_{y \in \mathbb{X}} P(x,y) u(n+1,y), & n < N \\ u(N,x) = f(x), \end{cases}$$

Alors $\mathbb{E}[f(X_N)] = u(0, x_0)$.

Remarques

- La première équation de (1) peut aussi s'écrire

$$u(n,x) = P[u(n+1,.)](x) = \sum_{y\in\mathbb{X}} P(x,y)u(n+1,y)$$

- $u(n,x)$ peut s'interpréter comme

$$u(n,x) = \overbrace{P\times\cdots\times P}^{N-n \text{ fois}} f(x) = P^{N-n}f(x),$$

- Lorsque $\mathbb{P}(X_n = x) > 0$, on a

$$u(n,x) = \mathbb{E}\left[f(X_N) \,|\, X_n = x\right] = P^{N-n}f(x).$$

Preuve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_N = x_N) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_0 = x_0) P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x_n, x_{n+1}) \times P(x_{n+1}, x_{n+2}) \times \cdots \times P(x_{N-1}, x_N)
\end{aligned}$$

en sommant sur toutes les valeurs de $x_0, \cdots, x_{n-1}$ et $x_{n+1}, \cdots, x_{N-1}$ on obtient la loi de (X_n, X_N)

$$\mathbb{P}(X_n = x_n, X_N = x_N) = \mathbb{P}(X_n = x_n) P^{N-n}(x_n, x_N)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f(X_N) 1_{\{X_n = x_n\}}\right) &= \mathbb{P}(X_n = x_n) \sum_{x_N \in \mathbb{X}} P^{N-n}(x_n, x_N) f(x_N) \\
&= \mathbb{P}(X_n = x_n)(P^{N-n} f)(x_n)
\end{aligned}$$

Remarques et notations

- (1) est *une équation de programmation dynamique*
- $\mathbb{X}$ est fini, (1) est un *algorithme* qui termine.

Une notation commode

- $x_{0:n}$ plutôt que $(x_0, \ldots, x_n)$
- $X_{0:n}$ plutôt que $(X_0, \ldots, X_n)$
- $X_{0:n} = x_{0:n}$ plutôt que $(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)$

Preuve formelle

On le sait déjà ... mais voici une autre méthode de preuve. On va montrer que

$$\mathbb{E}\left[u(n+1, X_{n+1})\right] = \mathbb{E}\left[u(n, X_n)\right].$$

Si cela est vrai :

$$u(0, x_0) = \mathbb{E}\left[u(0, X_0)\right] = \cdots = \mathbb{E}\left[u(N, X_N)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_N)\right].$$

La loi de $X_{0:n+1} = (X_{0:n}, X_{n+1})$ est donnée par (c'est un façon d'exprimer la propriété de Markov)

$$\mathbb{P}(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}) = \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}, X_{n+1} = x_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n})P(x_n, x_{n+1}).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u(n+1, X_{n+1})\right] &= \sum_{x_{\mathbf{0}:n+\mathbf{1}} \in \mathbb{X}^{n+\mathbf{2}}} u(n+1, x_{n+1})\mathbb{P}(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}),\\
\text{[propriété de Markov]} &= \sum_{x_{\mathbf{0}:n} \in \mathbb{X}^{n+\mathbf{1}}, x_{n+\mathbf{1}} \in \mathbb{X}} u(n+1, x_{n+1})\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n})P(x_n, x_{n+1}),\\
&= \sum_{x_{\mathbf{0}:n} \in \mathbb{X}^{n+\mathbf{1}}} \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) \sum_{x_{n+\mathbf{1}} \in \mathbb{X}} P(x_n, x_{n+1})u(n+1, x_{n+1}),\\
\text{[définition de } u(n, .)\text{]} &= \sum_{x_{\mathbf{0}:n} \in \mathbb{X}^{n+\mathbf{1}}} \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n})u(n, x_n) = \mathbb{E}\left[u(n, X_n)\right].
\end{aligned}$$

Calcul du prix d'une option

- Un modèle : le processus de Cox-Ross

$$X_0 = x_0, X_{n+1} = X_n \left(u\, 1_{\{W_{n+1} = P\}} + d\, 1_{\{W_{n+1} = F\}} \right).$$

- Un profil d'option $f(X_N)$ (ce que je vais recevoir en N)

$$f(x) = (x - K)_+, \text{ option d'achat de prix d'exercice } K.$$

- Prix : $\mathbb{E}\left[f(X_N)\right]$ ("intuitif", voir cours de maths financière 2A).
- Calcul du prix : $(u(n,x), n = 0, \ldots, N, x \in \mathbb{X})$

$$(2) \qquad \begin{cases} u(n,x) = pu(n+1, xu) + (1-p)u(n+1, xd), \\ u(N,x) = f(x). \end{cases}$$

- $\mathbb{E}\left[f(X_N)\right] = u(0, x_0)$.

Un programme

Un programme en `Python`, catastrophique (complexité 2^N), mais qui a le bon goût de terminer (lentement)

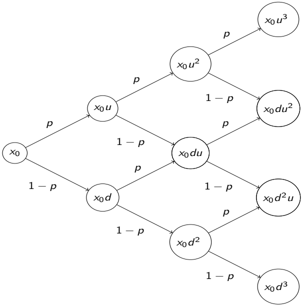
```python
N=10;p=1/2;
down=1/2;up=2;
K=1;

def f(x): return max(x-K,0)

def u(n,x):
   if n==N:
      return f(x);
   else:
      return p * u(n+1,x*up)+ (1-p) * u(n+1,x*down);

def prix_rec(x): return u(0,x)
```

Pour aller plus vite, un dessin pour $N = 3$



Un algorithme qui fait la même chose, plus vite ...

- Si $X_0 = x_0$ les seules valeurs que peut prendre X_n sont données par ($k =$ nombre de fois où l'on tire u entre 0 et $n-1$)

$$(x_k^{(n)} = x_0 u^k d^{n-k}, 0 \leq k \leq n).$$

- Il suffit de calculer les vecteurs $U^{(n)} = (u(n, x_k^{(n)}), 0 \leq k \leq n)$, qui vérifient

$$(3) \qquad \begin{cases} U^{(N)}(k) = f(x_k^{(N)}), & k = 0, \ldots, N \\ U^{(n)}(k) = pU^{(n+1)}(k+1) + (1-p)U^{(n+1)}(k), & k = 0, \ldots, n. \end{cases}$$

- Ce qui donne un agorithme (de complexité N^2).

Un algorithme qui fait la même chose, plus vite ...

```python
def prix_iter(x_0):
  U=np.zeros((N+1,N+1))
  for k in range(N+1): # = intervalle [0,1,...,N]
    U[N,k] = f(x_0 * up**k * down**(N-k))

  for n in range(N-1,-1,-1):  # = intervalle [N-1,N-2,...,0]
    for k in range(n+1):  # intervalle [0,1,...,n]
        U[n,k] = p*U[n+1,k+1]+(1-p)*U[n+1,k]
  return U[0,0]
```

Andry Markov

- Mathematicien russe 1856 – 1922, élève de Chebyshev, "known for his work in number theory, analysis, and probability theory."
- ... "He introduced a new sequence of dependent variable, called a chain, as well as a few basic concepts of chains such as transition probabilities, irreductibility and stationarity. His ideas were taken up and developed further by scientists around the world and now the theory of Markov Chains is one of the most powerful theories for analyzing various phenomena of the world"

А. А. Марков (1886).

Pour des détail sur la vie et l'œuvre de Markov voir [Basharin et al.(2004)Basharin, Langville, and Naumov].

Pour aller plus loin : cours de l'Ecole des Ponts

- 2A : cours "Processus Aléatoires"
- cours "Méthodes Mathématiques pour la Finance"

Bibliographie

Gely P. Basharin, Amy N. Langville, and Valeriy A. Naumov.
The life and work of A. A. Markov.
Linear Algebra Appl., 386:3–26, 2004.

Nathanaël Berestycki.
Notes on card shuffling.
Technical report, http://www.statslab.cam.ac.uk/~beresty/Articles/shuffle.pdf, 2007.

P.L. Bernstein.
Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street.
The Free Press, 1992.

P.L. Bernstein.
Capital Ideas Evolving.
Jhon Wiley and Son, 2007.

F. Thomas Bruss.
The art of a right decision.
from Oxfo, page 15, 2006.

Jean-François Delmas and Benjamin Jourdain.
Modèles aléatoires.
Mathématiques & Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

Mark R. Dennis, Paul Glendinning, Paul A. Martin, Fadil Santosa, and Jared Tanner, editors.
The Princeton companion to applied mathematics.
Princeton University Press, Princeton, NJ, 2015.
p. 648–658.

Stuart Dreyfus.
Richard bellman on the birth of dynamic programming.