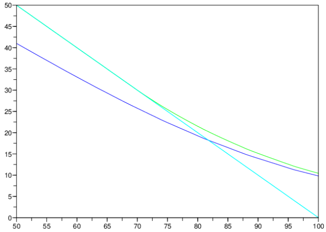
# Temps d'arrêt, Arrêt optimal

## Recrutement optimal, Options américaines




J.-P. Chancelier, B. Lapeyre

http://cermics.enpc.fr/~jpc/decision-incertain

# Plan

# Processus de Markov

- Processus de Markov et propriété de Markov

$$P\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\right)$$

- la matrice de transition : $(P(x,y), x, y \in \mathbb{X})$

$$P(x,y) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = y | X_n = x\right)$$

- Loi de $(X_0, \ldots, X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ déterminée par $P$ et la loi de $X_0$ (notée $\mu_0$).

$$\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\right) = \mu_0(x_0) P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1}, x_n)$$

- Loi de $X_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $\mu_N$ donnée par

$$\mu_n = \mu_0 P^n = \mu_{n-1} P$$

# Loi de $X_n$ : une autre façon d'écrire les choses

- $(X_n, n \geq 0)$ chaîne de Markov de matrice de transition $P$ sur $\mathbb{X}$.
- $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$ (i.e. $\mu_0(x_0) = 1$, $\mu_0(x) = 0$ si $x \neq x_0$.)
- $N \geq 0$ fixé. On sait exprimer $\mathbb{E}[f(X_N)]$ :

$$\mathbb{E}[f(X_N)] = \mu_N f = \mu_0 P^N f = \sum_{x \in \mathbb{X}} \mu_0(x)(P^N f)(x) = (P^N f)(x_0)$$

Une formulation alternative plus algorithmique.

**Theorem 1**

*Soit* $(u_n(x), n \in [\![0, N]\!], x \in \mathbb{X})$ *la solution unique de*

$$(1) \qquad \begin{cases} u_n(x) = \sum_{y \in \mathbb{X}} P(x,y) u_{n+1}(y)\,, & \forall x \in \mathbb{X}\,, \quad n < N \\ u_N(x) = f(x)\,, & \forall x \in \mathbb{X} \end{cases}$$

*Alors*

$$\mathbb{E}[f(X_N)] = u_0(x_0)$$

.

# Remarques

- La première équation de (1) peut aussi s'écrire

$$u_n = P u_{n+1} \quad \text{ou} \quad u_n = P^{N-n} f = \overbrace{P \times \cdots \times P}^{N-n \text{ fois}} f$$

- Pour $x \in \mathbb{X}$, lorsque $\mathbb{P}(X_n = x) > 0$, on a

$$u_n(x) = \mathbb{E}[f(X_N) \,|\, X_n = x] = P^{N-n} f(x)$$

Preuve $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x, X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_N = x_N)$

$$= \mathbb{P}(X_0 = x_0) P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x, x_{n+1}) \times \cdots \times P(x_{N-1}, x_N)$$

en sommant sur toutes les valeurs de $x_0, \cdots, x_{n-1}, x_{n+1}, \cdots, x_{N-1}$ on obtient
$\mathcal{L}_{(X_n, X_N)}$ : $\mathbb{P}(X_n = x_n, X_N = x_N) = \mathbb{P}(X_n = x_n) P^{N-n}(x_n, x_N)$

$$\mathbb{E}\left[f(X_N) 1_{\{X_n = x_n\}}\right] = \mathbb{P}(X_n = x_n) \sum_{x_N \in \mathbb{X}} P^{N-n}(x_n, x_N) f(x_N)$$

$$= \mathbb{P}(X_n = x_n)(P^{N-n} f)(x_n)$$

# Remarques et notations

- (1) est une équation de programmation dynamique [1]
- $\mathbb{X}$ est fini, (1) est un algorithme qui termine.

Notations pour la suite

- $x_{0:n}$ plutôt que $(x_0, \ldots, x_n)$
- $X_{0:n}$ plutôt que $(X_0, \ldots, X_n)$
- $X_{0:n} = x_{0:n}$ plutôt que $(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)$

[1] Sur l'origine du terme programmation dynamique voir [Dreyfus(2002)]. "It was something not even a congressman could object to" selon Bellman.

# Une autre preuve

On va montrer que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\mathbb{E}\left[u_{n+1}(X_{n+1})\right] = \mathbb{E}\left[u_n(X_n)\right]$$

Et ainsi, on aura :

$$u_0(x_0) = \mathbb{E}\left[u_0(X_0)\right] = \cdots = \mathbb{E}\left[u_N(X_N)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_N)\right].$$

Par la propriété de Markov, on obtient

$$\mathbb{P}\left(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}\right) = \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}, X_{n+1} = x_{n+1}\right) = \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) P(x_n, x_{n+1}).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u_{n+1}(X_{n+1})\right] &= \sum_{x_{\mathbf{0}:n+\mathbf{1}} \in \mathbb{X}^{n+\mathbf{2}}} u_{n+1}(x_{n+1})\mathbb{P}\left(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}\right) \\
&= \sum_{x_{\mathbf{0}:n} \in \mathbb{X}^{n+\mathbf{1}}, x_{n+\mathbf{1}} \in \mathbb{X}} u_{n+1}(x_{n+1})\mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) P(x_n, x_{n+1}) \\
&= \sum_{x_{\mathbf{0}:n} \in \mathbb{X}^{n+\mathbf{1}}} \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) \sum_{x_{n+\mathbf{1}} \in \mathbb{X}} P(x_n, x_{n+1}) u_{n+1}(x_{n+1}) \\
&= \sum_{x_{\mathbf{0}:n} \in \mathbb{X}^{n+\mathbf{1}}} \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) u_n(x_n) = \mathbb{E}\left[u(n, X_n)\right]
\end{aligned}$$

# La question du jour

- $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov de matrice de transition $P$ sur $\mathbb{X}$. $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$.
- On cherche à calculer

$$\sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}\left[f(X_\tau)\right]$$

- $\tau$ appartenant à une famille de temps aléatoires,
  - plus grande (au sens de l'inclusion) que les temps déterministes,
  - mais plus petite que tous les temps aléatoires
- plus grande que les temps déterministes : parce que l'on souhaite pouvoir tenir compte des valeurs de $X_n$ observées au cours du temps.
- plus petite que tous les temps aléatoires : parce que à l'instant $n$ on ne connait pas la trajectoire future $X_{n+1}, \ldots, X_N$

$$\tau = \text{Argmax}\{f(X_n), 0 \leq n \leq N\}$$

est optimum, mais réclame de connaitre le futur !
- Voir Pour la Sciences [Hill(2009)] pour une introduction à ce genre de problème.

# Temps d'arrêt

La notion adéquate est celle de temps d'arrêt : on souhaite prendre la décision de s'arrêter au temps $n$ avec l'information que l'on a au temps $n$.

## Definition 2

$\tau$ est un temps d'arrêt, si, pour tout $n$, il existe $A_n \subset \mathbb{X}^{n+1}$ tel que

$$\{\tau = n\} = \{(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in A_n\}$$

- "Je peux déterminer si $\tau = n$ en ne considérant que la portion de trajectoire avant $n$".
- $\mathrm{Argmax}\{f(X_n), 0 \leq n \leq N\}$ ne peut pas être un temps d'arrêt (sauf cas particulier).
- Le temps d'atteinte d'un point $z$ de $\mathbb{X}$ est un temps d'arrêt

$$\tau = \inf \{n \geq 0, X_n = z\}.$$

En effet $\{\tau = n\} = \{X_0 \neq z, X_1 \neq z, \ldots, X_{n-1} \neq z, X_n = z\}$.

# Formulation d'un problème d'arrêt optimal

- On se donne une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ sur $\mathbb{X}$, de matrice de transition $P$, issue de $x_0$ en 0 ($\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$).
- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ donné, on cherche à calculer le sup suivant

$$\sup_{\tau \text{ t.a.} \leq N} \mathbb{E}\left[f(\tau, X_\tau)\right]$$

- et aussi à trouver un temps d'arrêt $\tau$ qui réalise ce sup.
- ... on sait répondre complétement à ces deux questions.

Les données : $P$, $x_0$, $f$.

# Solution du problème d'arrêt optimal

## Theorem 3

*Si* $(u_n(x), n = 0, \ldots, N, x \in \mathbb{X})$ *est la solution unique de*

$$(2) \qquad \begin{cases} u_n(x) = \max\left\{ \sum_{y\in\mathbb{X}} P(x,y)u_{n+1}(y), f(n,x)\right\}, & n < N \ , \ \forall x \in \mathbb{X} \\ u_N(x) = f(N,x) \ , \ \forall x \in \mathbb{X}. \end{cases}$$

*Alors*

- $\sup_{\tau\leq N} \mathbb{E}\left[f(\tau, X_\tau)\right] = u_0(x_0)$
- $\tau_0 = \inf\{n \geq 0, u_n(X_n) = f(n, X_n)\}$ *est un temps d'arrêt optimal.*

- Lorsque la matrice de transition dépend de $n$ il faut remplacer $P$ par $P_n$ (la matrice de transition entre les instants $n$ et $n+1$) dans l'équation.
- $\tau_0$ est bien un temps d'arrêt $\leq N$.

$$\{\tau_0 = n\} = \{u(0, X_0) \neq f(0, X_0), \ldots, u(n-1, X_{n-1}) \neq f(n-1, X_{n-1}), u(n, X_n) = f(n, X_n)\}$$

- Preuve formelle du théorème : transparent 18.

# Commentaires

- (2) est une équation de programmation dynamique.
- Interprétation de $u_n$ : $u_n(x) = \sup_{n \le \tau \le N} \mathbb{E}\left[f(\tau, X_\tau) \,\middle|\, X_n = x\right]$.
- Preuve informelle ("Principe d'optimalité") :

  *Au temps $n$, si $X_n = x$*

  - *soit je m'arrête et je gagne $f(n,x)$*
  - *soit j'attends le temps suivant $n+1$ où je peux gagner $u_{n+1}(X_{n+1})$.*
  - *La moyenne de mes gains futurs si je passe à $n+1$ est donnée par*

  $$\mathbb{E}\left[u_{n+1}(X_n+1) \,\middle|\, X_n = x\right] = \sum_{y \in \mathbb{X}} P(x,y) u_{n+1}(y)$$

  - *je m'arrête ou je continue en regardant*

  $$\max\left(f(n,x), \sum_{y \in \mathbb{X}} P(x,y) u_{n+1}(y)\right)$$

- On l'utilise (2) pour écrire un algorithme

# Exemple 1: Calcul du prix d'options américaines

- $(X_n, 0 \leq n \leq N)$ une chaîne de Markov de matrice de transition $P$ décrivant l'évolution des prix des actifs (e.g. modèle de Cox-Ross).
- J'ai la possibilité si j'"exerce" mon option en $n \leq N$ de gagner $f(n, X_n)$.
- Que vaut ce droit ?. À quel moment dois-je exercer ce droit pour maximiser mon gain ?
- Pour calculer le prix (i.e. la valeur de ce droit), il est naturel de chercher à maximiser l'espérance du flux $\mathbb{E}\left[f(\tau, X_\tau)\right]$ parmi tous les temps d'arrêt de $X$.
- Justification compléte : cours de Mathématiques Financière (2A) ou [Lamberton and Lapeyre(1997)].

# Le "put américain" dans le modèle de Cox-Ross

- On cherche à calculer $\sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}\left[f(\tau, X_\tau)\right]$, le prix de l'option et à determiner le moment d'exercice optimum.
- $(X_n, 0 \leq n \leq N)$ est le processus de Cox-Ross

$$X_0 = 1, X_{n+1} = X_n \left(u1_{\{U_{n+1} = P\}} + d1_{\{U_{n+1} = F\}}\right).$$

$(U_n, n \geq 1)$ une suite de tirage à pile ou face indépendant,

$$0 \leq p \leq 1, \quad \mathbb{P}(U_n = P) = p = 1 - \mathbb{P}(U_n = F).$$

- $r$ le taux d'intérêt sur une période, $K$ le strike, $d < 1 + r < u$.

$$f(n, x) = \frac{1}{(1+r)^n}(K - x)_+$$

# Solution

- On commence par calculer (cf TD) $(u_n(x), n = 0, \ldots, N, x \in \mathbb{X})$ la solution de l'équation (2) du théorème 3, ici

$$(3) \qquad \begin{cases} u_n(x) = \max\left(p\ u_{n+1}(xu) + (1-p)\ u_{n+1}(xd), \dfrac{(K-x)_+}{(1+r)^n}\right) \\ u_N(x) = \dfrac{(K-x)_+}{(1+r)^N}. \end{cases}$$

- Souvent on calcule $v_n(x) = (1+r)^n u_n(x)$ plutot que $u_n(x)$.

$$\begin{cases} v_n(x) = \max\left(\dfrac{p\ v_{n+1}(xu) + (1-p)\ v_{n+1}(xd)}{1+r}, (K-x)_+\right) \\ v_N(x) = (K-x)_+. \end{cases}$$

- $u_0(x) = v_0(x) = \sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}\left[f(\tau, X_\tau)\right]$
- $\tau_0$ le temps d'arrêt optimal

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \inf\left\{n \geq 0, u_n(X_n) = (K - X_n)_+/(1+r)^n\right\} \\ &= \inf\left\{n \geq 0, v_n(X_n) = (K - X_n)_+\right\}. \end{aligned}$$

# Preuve du théorème 3 : $\tau$ temps d'arrêt quelconque

- $u$ solution (2), on va voir que, pour tout $\tau$ t.a., $\mathbb{E}\left[u_{n\wedge\tau}(X_{n\wedge\tau})\right]$ décroît en $n$.
- En admettant la décroissance en $n$, on obtient pour tout $\tau$ t.a.

$$\begin{aligned} u_0(x_0) &= \mathbb{E}\left[u_0(X_0)\right] = \mathbb{E}\left[u_{0\wedge\tau}(X_{0\wedge\tau})\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[u_{N\wedge\tau}(X_{N\wedge\tau})\right] = \mathbb{E}\left[u_\tau(X_\tau)\right] \geq \mathbb{E}\left[f(\tau, X_\tau)\right]. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sup_{0\leq\tau\leq N,\text{t.a.}} \mathbb{E}\left[f(\tau, X_\tau)\right] \leq u_0(x_0)$$

- Pour montrer la décroissance annoncée, on remarque que

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \mathbb{E}\left[u_{(n+1)\wedge\tau}(X_{(n+1)\wedge\tau})\right] - \mathbb{E}\left[u_{n\wedge\tau}(X_{n\wedge\tau})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(u_{n+1}(X_{n+1}) - u_n(X_n)\right)1_{\{\tau\,\geq\, n+1\}}\right] \end{aligned}$$

Et on montre que $\Delta_{n+1} \leq 0$

# Preuve du théorème 3 : $\tau$ temps d'arrêt quelconque

- $\tau$ est un temps d'arrêt, $\{\tau \geq n+1\} = \{\tau \leq n\}^c$, s'écrit sous la forme

$$\{\tau \geq n+1\} = \{X_{0:n} \in \bar{A}_n\}$$

- La loi de $(X_{0:n}, X_{n+1})$ est donnée par (c'est la propriété de Markov)

$$\mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}, X_{n+1} = x_{n+1}\right) = \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) P(x_n, x_{n+1}).$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= \mathbb{E}\left[\left(u_{n+1}(X_{n+1}) - u_n(X_n)\right)1_{\{X_{0:n} \in \bar{A}_n\}}\right] \\
&= \sum_{x_{0:n} \in \bar{A}_n, x_{n+1} \in \mathbb{X}} \left(u_{n+1}(x_{n+1}) - u_n(x_n)\right)\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n})P(x_n, x_{n+1}) \\
&= \sum_{x_{0:n} \in \bar{A}_n} \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n})\left(\sum_{x_{n+1} \in \mathbb{X}} u_{n+1}(x_{n+1})P(x_n, x_{n+1}) - u_n(x_n)\right)
\end{aligned}$$

$u$ est sol. de (2), $\sum_{x_{n+1} \in \mathbb{X}} u_{n+1}(x_{n+1})P(x_n, x_{n+1}) \leq u_n(x_n)$

$$\leq 0$$

# Preuve du théorème 3 : $\tau_0$ temps d'arrêt optimal

- $\tau_0 = \inf\{n \geq 0, u_n(X_n) = f(n, X_n)\}$.
- On va montrer que $\mathbb{E}\left[u\left(n \wedge \tau_0, X_{n\wedge\tau_0}\right)\right]$ est constant en $n$ (i.e. $\Delta_{n+1} = 0$).
- En admettant ceci, il est facile de conclure

$$
\begin{aligned}
u_0(x_0) &= \mathbb{E}\left[u_0(X_0)\right] = \mathbb{E}\left[u_{0\wedge\tau_0}(X_{0\wedge\tau_0})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[u_{N\wedge\tau_0}(X_{N\wedge\tau_0})\right] = \mathbb{E}\left[u_{\tau_0}(X_{\tau_0})\right]
\end{aligned}
$$

  Mais, par définition de $\tau_0$, $u_{\tau_0}(X_{\tau_0}) = f(\tau_0, X_{\tau_0})$, donc

$$
u_0(x_0) = \mathbb{E}\left[f(\tau_0, X_{\tau_0})\right]
$$

- Ce qui finit la démonstration puisque $\tau_0$ réalise alors le sup.
- Il nous reste à montrer que, pour ce temps d'arrêt $\Delta_{n+1} = 0$

# Preuve du théorème 3 : $\tau_0$ temps d'arrêt optimal

- $\tau_0$ est un temps d'arrêt, $\{\tau_0 \geq n+1\} = \{X_{0:n} \in \bar{A}^0_n\}$ où

$$\bar{A}^0_n = \{u_0(x_0) \neq f(0, x_0), \ldots, u_n(x_n) \neq f(n, x_n)\}$$

- Sur l'événement $\{\tau_0 \geq n+1\}$, on a $u_n(X_n) \neq f(n, X_n)$ et comme $u$ sol. de (2)

$$\sum_{x_{n+1} \in \mathbb{X}} u_{n+1}(x_{n+1}) P(X_n, x_{n+1}) = u_n(X_n)$$

- On termine alors comme tout à l'heure, mais en tenant compte de cette égalité :

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= \mathbb{E}\left[\left(u_{n+1}(X_{n+1}) - u_n(X_n)\right) 1_{\left\{X_{0:n} \in \bar{A^0}_n\right\}}\right] \\
&= \sum_{x_{0:n} \in \bar{A}^0_n, x_{n+1} \in \mathbb{X}} \left(u_{n+1}(x_{n+1}) - u_n(x_n)\right) \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) P(x_n, x_{n+1}), \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{X_{0:n} \in \bar{A}^0_n\}} \left( \sum_{x_{n+1} \in \mathbb{X}} u_{n+1}(x_{n+1}) P(X_n, x_{n+1}) - u_n(X_n)\right)\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

# Exemple 2: un problème de recrutement

- Il y a $N$ candidats à un poste
- Je reçois les candidats consécutivement
- Les circonstances m'imposent de décider tout de suite du recrutement (soit je recrute la personne que je viens de recevoir, soit je la refuse définitivement).
- La seule information que j'ai sur les candidats est leur classement (je peux comparer un candidat à ceux que j'ai vu précédemment)
- Je souhaite maximiser la probabilité de recruter le meilleur candidat
- Quelle est la façon de s'y prendre ?

# Le résultat

- Il faut recevoir (environ) 37% des candidats sans les recruter
- Puis, choisir le premier candidat qui suit qui est meilleur que tous les précédents (le dernier si cela n'arrive jamais).
- On obtient ainsi un temps d'arrêt optimal.
- La probabilité d'obtenir le meilleur candidat est (environ) de 37%.
- Les transparents qui suivent expliquent comment arriver à ces résultats à l'aide de la théorie précédente.

# Le modèle

- $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ une permutation de $(1, \ldots, N)$.
- $\omega_k$ le classement du $\#k$-ième individu dans la permutation.

$$\begin{array}{ll} \textit{Indice} & (\#1 \quad \#2 \quad \ldots \quad \#k \quad \ldots \quad \#N) \\ \textit{Rang} & (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \ldots \quad \omega_k \quad \ldots \quad \omega_N) \end{array}$$

- $\Omega_N$ l'ensemble des permutations de $(1, \ldots, N)$ muni de la probabilité uniforme.
- $B_n$ l'évenement "le $n$-ième candidat est le meilleur".
- On cherche un temps d'arrêt $\tau$ qui maximise $\mathbb{P}(B_\tau)$.

# Où est la chaîne de Markov ?

- Un temps d'arrêt mais pour quel processus de Markov ?
- $R_k(\omega)$ le rang du $\#k$-ième individu parmi les $k$ premiers individus.
- $B_n = \{R_n = 1, R_{n+1} > 1, \ldots, R_N > 1\}$.
- Quelle est la loi de $(R_1, \ldots, R_N)$ ?

# Un exemple de calcul de $R = (R_1, \dots, R_N)$

- $\omega = (2\ 3\ 1\ 4)$ donne $R = (1\ 2\ 1\ 4)$.
- $R = (1\ 2\ 1\ 4)$ donne $\#3 \leq \#1 \leq \#2 \leq \#4$ et donc $\omega$

$$
\begin{array}{rll}
(1) \rightarrow (\#1) & & \#1 \text{ est le premier puisqu'il est tout seul!} \\
(1\ 2) \rightarrow (\#1 \leq \#2) & & \#2 \text{ est le deuxième parmi les 2 premiers} \\
(1\ 2\ 1) \rightarrow (\#3 \leq \#1 \leq \#2) & & \#3 \text{ est le premier parmi les 3 premiers} \\
(1\ 2\ 1\ 4) \rightarrow (\#3 \leq \#1 \leq \#2 \leq \#4) & & \#4 \text{ est le quatrième parmi les 4 premiers}
\end{array}
$$

On obtient la permutation de départ $\omega = (2\ 3\ 1\ 4)$

$$
\begin{array}{lcccc}
\textit{Indice} & (\#1 & \#2 & \#3 & \#4) \\
\textit{Rang} & (2 & 3 & 1 & 4)
\end{array}
$$

# En Python

Si vous avez un doute voici, deux fonctions Python qui font le job.

```
import numpy as np

def Omega2R(omega):
# Calcule les rang d'insertion pour un omega donne
  R=np.zeros(np.size(omega), dtype=int)
  # dtype=int, pour specifier que l'on veut un tableau d'entier
  for n in range(np.size(omega)):
    # classe le vecteur omega[1,...,n] en croissant
    y=np.sort(omega[0:n+1]);
    # R[n] = le classement de omega[n] parmi les n premiers
    R[n]=np.where(y==omega[n])[0][0]+1
  return R

def R2Omega(R):
    # Calcule omega connaissant les rangs d'insertion
    iomega=np.zeros(0, dtype=int);
    for n in range(np.size(R)):
        # J'insére n à l'indice R[n]
        iomega=np.concatenate([iomega[0:int(R[n]-1)],[n+1],iomega[int(R[n]-1):n+1]])
    # On inverse la permutation
    omega=np.zeros(np.size(R), dtype=int)
    for n in range(np.size(omega)):
        omega[iomega[n]-1]=n+1
    return omega

Taille=6
omega=np.random.permutation(Taille)+1 # permutation aléatoire
print(omega)
print(R2Omega(Omega2R(omega))) # devrait être égal à omega
```

# Calcul de lois

- À un $R$ correspond un et un seul $\omega$, **donc**, pour $\alpha_k \in \{1, \ldots, k\}$

$$P\left(R_1 = \alpha_1, \ldots, R_N = \alpha_N\right) = \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{N!}.$$

- (Par contraction) les $R_k$ suivent des lois uniformes sur $\{1, \ldots, k\}$. Elles sont indépendantes
- $S_k = 1_{\{R_k = 1\}}$ sont aussi des variables aléatoires indépendantes. Elles suivent des lois de Bernoulli de paramètre $p_k = \mathbb{P}(S_k = 1) = 1/k$
- La suite de variable $(S_1, \ldots, S_N)$ suffira pour traiter le problème.

# Le critère

- $B_n$ l'évenement "le $n$-ième candidat est le meilleur".

$$B_n = \{R_n = 1, R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1\} = \{S_n = 1, S_{n+1} = 0, \dots, S_N = 0\}.$$

- $\tau$ un temps d'arrêt par rapport au processus $R = (R_1, \dots, R_N)$. À l'instant $n$, $(R_1, \dots, R_n)$ "contient toute l'information disponible".
- Pour un temps d'arrêt[2] $\tau$, on va voir que

$$\mathbb{P}(B_\tau) = \mathbb{E}\left[\frac{\tau}{N} S_\tau\right].$$

ce qui permettra de mettre le problème "sous forme markovienne".

[2] Ce n'est plus vrai sinon ... Exercice: trouver un contre-exemple.

# Preuve

$$\{\tau = n\} = \{(R_1, \dots, R_{n-1}, R_n) \in A_n\} = \{R_{1:n} \in A_n\}.$$

**Notation :** $R_{1:n} = (R_1, \dots, R_{n-1}, R_n)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau = n, B_\tau) &= \mathbb{P}(\tau = n, B_n). \\
&= \mathbb{P}(\tau = n, R_n = 1, R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1) \\
&= \mathbb{P}(R_{1:n} \in A_n, R_n = 1, R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1) \\
&= \mathbb{P}(R_{1:n} \in A_n, R_n = 1)\mathbb{P}(R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1)
\end{aligned}$$

car indépendance des vecteurs $R_{1:n}$ et $R_{n+1:N}$, puis par indépendance des $R_n$ entre eux

$$\mathbb{P}(R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1) = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n+2} \times \cdots \times \frac{N-1}{N} = \frac{n}{N}$$

# Preuve

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau = n, B_\tau) &= \frac{n}{N}\mathbb{P}(R_{1:n} \in A_n, R_n = 1) = \frac{n}{N}\mathbb{P}(\tau = n, R_n = 1) \\
&= \frac{n}{N}\mathbb{E}\left[1_{\{\tau = n, R_n = 1\}}\right] = \mathbb{E}\left[1_{\{\tau = n\}}\frac{n}{N}S_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{\tau = n\}}\frac{\tau}{N}S_\tau\right].
\end{aligned}
$$

En sommant pour $n$ variant de 1 à $N$

$$
\mathbb{P}(B_\tau) = \mathbb{E}\left[\frac{\tau}{N}S_\tau\right].
$$

# Résumons nous !

- $(S_1, \ldots, S_N)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $1/k$,
  donc une chaîne de Markov sur l'espace $\mathbb{X} = \{0, 1\}$, non homogène, de matrice de transition, dépendant du temps, $P_n$

$$P_n(0,0) = P_n(1,0) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$
$$P_n(0,1) = P_n(1,1) = \frac{1}{n+1}$$

- On chercher à maximiser $\mathbb{P}(B_\tau) = \mathbb{E}\left[\frac{\tau}{N} S_\tau\right] = \mathbb{E}\left[f(\tau, S_\tau)\right]$ parmi tous les temps d'arrêt plus petits que $N$.

# Résolution

- On peut résoudre le problème grâce à (2)
- On calcule ($u_n(0)$ et $u_n(1)$ pour $1 \leq n \leq N$)
  la solution du problème est donnée par $u_1(1)$ (noter que $S_1 = 1$)

$$\begin{cases} u_n(x) = \max\left\{\frac{n}{n+1} u_{n+1}(0) + \frac{1}{n+1} u_{n+1}(1), \frac{n}{N} x\right\}, n < N \ , \quad \forall x \in \{0,1\} \\ u_N(x) = x \ , \quad \forall x \in \{0,1\} \end{cases}$$

- Deux suites à calculer $u_n(0)$ et $u_n(1)$ pour $1 \leq n \leq N$)
- Une fois ceci fait, un temps d'arrêt optimal est obtenu par

$$\tau = \inf\left\{n \geq 0, u_n(S_n) = \frac{n}{N} S_n\right\}.$$

- Dans ce cas, on peut mener des calculs explicites
  (voir [Delmas and Jourdain(2006)] et TD) pour obtenir les résultats annoncés.

- En posant, $f_n(x) = \frac{n}{N}x$ on obtient pour $x \in \{0,1\}$

$$u_n(x) = \max\left(\frac{n}{n+1}u_{n+1}(0) + \frac{1}{n+1}u_{n+1}(1), f_n(x)\right), \quad u_N(x) = f_N(x) .$$

- Comme $u_n(x)$ est positive et $f_n(0) = 0$ on obtient

$$u_n(0) = \frac{1}{n+1}u_{n+1}(1) + \frac{n}{n+1}u_{n+1}(0), \qquad u_n(1) = \max\left(u_n(0), \frac{n}{N}\right).$$

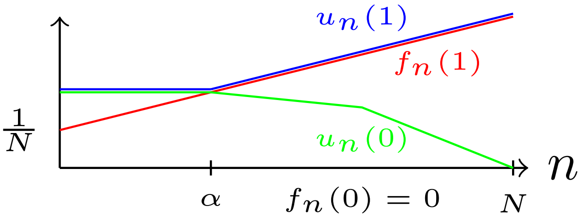
- Pour $N > 1$, $\exists \alpha \in [1, N)$ tel que $\max\left(u_\alpha(0), \frac{\alpha}{N}\right) = u_\alpha(0)$. **preuve par contradiction: on autait sinon $u_n(1) = n/N > u_n(0)$ pour tout $n \in [1, N]$ ce qui donne**

$$u_n(0) = \frac{n}{N}\sum_{i=n}^{N-1}\frac{1}{i}$$

**On aurait alors $u_1(0) \geq 1/N$ ce qui donne une contradiction.**

- $\forall n \in [1, N)$, $u_n(1) = u_n(0) = \beta \geq n/N$
  $\implies \forall p \in [1, n-1] u_p(1) = u_p(0) = \beta > p/N$ **La preuve se fait par recurence**
- On appelle $\alpha^*$ le plus grand $\alpha$ qui vérifie la propriété au dessus.

- Le coût optimal




- $u_n(1) = u_n(0) = u_{\alpha^*}(1) > n/N$ , $\forall n \in [1, \alpha^*[$
- $u_{\alpha^*}(1) = u_{\alpha^*}(0) \geq \alpha^*/N$
- $u_n(1) = f_n(1) > u_n(0) = \frac{n}{N} \sum_{i=n}^{N-1} \frac{1}{i}$ , $\forall n \in ]\alpha^*, N]$

- La stratégie optimale

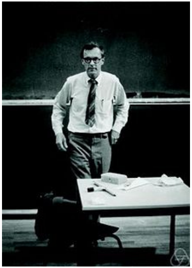
$$\tau = \inf\{n \geq 1 \mid u_n(S_n) = f_n(S_n)\}$$

  - Si $S_n = O$ comme $u_n(0) > f_n(0)$ pour $n \neq N$ et $u_N(0) > f_N(0)$
    $\Longrightarrow$ On ne s'arrête jamais quand $S_n = 0$ sauf si on est a la fin
  - Si $S_n = 1$ et $u_n(1) = f_n(1)$ (n'arrive que si $n \geq \alpha^*$)
    $\Longrightarrow$ On s'arrête.
  - $\alpha^*$ est caractérisé par :

$$\alpha^* = \max\left\{ n \geq 1 : \frac{n}{N} \sum_{i=n}^{N-1} \frac{1}{i} \geq \frac{n}{N} \right\}$$

    et $\lim_{N \mapsto \infty} \alpha_N^*/N = e^{-1}$.
  - On s'arrête après $\alpha^*$, la première fois que $S_n = 1$

# Snell, James Laurie



- La théorie de l'arrêt optimal porte le nom d'enveloppe de Snell (voir [Snell(1952)]), "so named by the Russian mathematician, Kolmogorov".
- Snell (1925-2011), mathématicien américain, élève de Doob.
- Il utilise la théorie des martingales pour traiter le problème d'arrêt optimal.

# Bibliographie

Gely P. Basharin, Amy N. Langville, and Valeriy A. Naumov.
The life and work of A. A. Markov.
*Linear Algebra Appl.*, 386:3–26, 2004.

Nathanaël Berestycki.
Notes on card shuffling.
Technical report, http://www.statslab.cam.ac.uk/~beresty/Articles/shuffle.pdf, 2007.

P.L. Bernstein.
*Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street.*
The Free Press, 1992.

P.L. Bernstein.
*Capital Ideas Evolving.*
Jhon Wiley and Son, 2007.

F. Thomas Bruss.
The art of a right decision.
*from Oxfo*, page 15, 2006.

Jean-François Delmas and Benjamin Jourdain.
*Modèles aléatoires.*
Mathématiques & Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

Mark R. Dennis, Paul Glendinning, Paul A. Martin, Fadil Santosa, and Jared Tanner, editors.
*The Princeton companion to applied mathematics.*
Princeton University Press, Princeton, NJ, 2015.
p. 648–658.

Stuart Dreyfus.
Richard bellman on the birth of dynamic programming.