

## Le problème du vendeur de journaux



J.-P. Chancelier, B. Lapeyre

<http://cermics.enpc.fr/~jpc/decision-incertain>

# Plan

- 1 Le problème du vendeur de journaux

## Le problème du vendeur de journaux (une période)

- Chaque matin, le vendeur doit décider d'un nombre de journaux à commander  $u \in \mathbb{U} = \{0, 1, \dots\}$  au prix unitaire  $c > 0$ .
- La demande du jour est **incertaine**  $w \in \mathbb{W} = \{0, 1, \dots\}$ 
  - Si, à la fin de la journée, il lui reste des invendus : coût unitaire  $c_S \in \mathbb{R}$ .

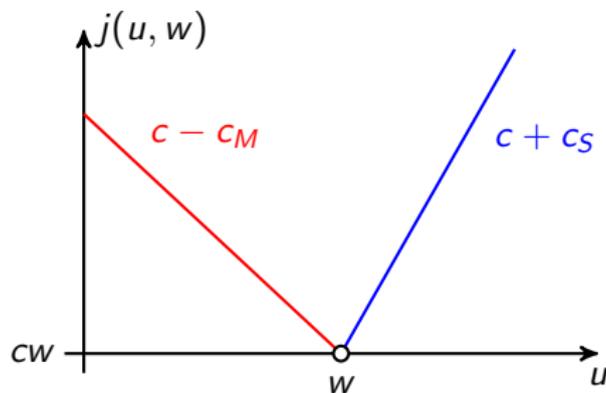
$$c_S(u - w)_+ = c_S \underbrace{\max(u - w, 0)}_{\text{invendus}}, \quad c > -c_S$$

- Si, à la fin de la journée, il n'a pas pu faire face à la demande on associe un coût unitaire  $c_M$ . Le coût lié à la non satisfaction de la demande est

$$c_M(w - u)_+ = c_M \underbrace{\max(w - u, 0)}_{\text{manquants}}$$

Face à une demande aléatoire, le coût est **aléatoire**

$$j(u, w) = \underbrace{cu}_{\text{achats}} + \underbrace{c_s(u - w)_+}_{\text{invendus}} + \underbrace{c_M(w - u)_+}_{\text{manquants}}$$



$$\arg \min_{u \in \mathbb{U}} j(u, w) = \{w\} : \text{Quantité inconnue } w !$$

## Choix d'un critère en espérance

Le choix du critère : attitude face au risque du décideur. Comme le vendeur de journaux va vendre ses journaux chaque jour, on choisit ici un critère en espérance :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u) \quad \text{avec } J(u) = \underbrace{\mathbb{E}_w[j(u, w)]}_{\text{Espérance}}$$

Ce n'est pas le seul critère possible : Un vendeur de journaux pessimiste pourrait minimiser le pire des cas (utilise le support  $\overline{\mathcal{W}}$  de la loi de la demande) :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u) \quad \text{avec } J(u) = \underbrace{\max_{w \in \overline{\mathcal{W}}} j(u, w)}_{\text{Pire des cas}}$$

## Minimisation du coût en espérance

- On suppose que la demande,  $W$ , est une variable aléatoire et le vendeur de journaux connaît,  $\mathbb{P}_W$ , la loi de  $W$ .
- Le coût à minimiser devient

$$J(u) = \mathbb{E}_W[cu + c_s(u - W)_+ + c_M(W - u)_+]$$

fonction convexe pour  $u \in \mathbb{R}_+$

- Le problème du vendeur de journaux devient

$$u^* \stackrel{?}{\in} \arg \min_{u \in \mathbb{U}} J(u).$$

Le vendeur de journaux prend une décision déterministe face à un aléa dont il connaît la loi mais pas la réalisation (Décision-Hasard).

## Minimisation du coût en espérance

### Commande optimale $u^*$ :

- Si  $c_M \leq c$  alors  $J$  est une fonction croissante et ne rien commander est optimal.
- Si  $c_M > c$  alors  $J$  atteint son minimum en  $u^*$  :

$$u^* = \inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq (c_M - c)/(c_M + c_S)\},$$

où  $F$  est la fonction de répartition de  $W$ ,  $F(z) = \mathbb{P}(W \leq z)$ .

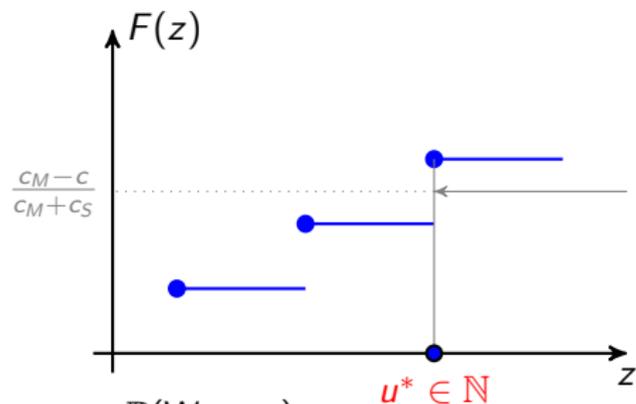
- Si  $W$  est une variable aléatoire entière alors  $u^* \in \mathbb{N}$ .

En effet :

$$\begin{aligned} J(u) &= c_M \mathbb{E}_W[W] + (c - c_M)u + (c_M + c_S) \mathbb{E}_W[(u - W)_+] \\ &= c_M \mathbb{E}_W[W] + (c - c_M)u + (c_M + c_S) \int_0^u F(z) dz \end{aligned}$$

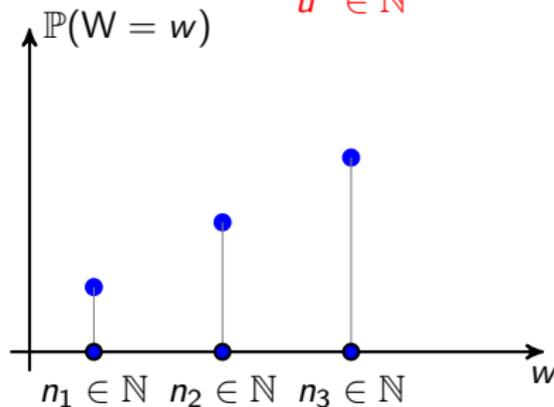
$J$  est continue et coercive pour  $u \in \mathbb{R}_+$ . Pour  $c_M > c$  elle décroît puis croît avec un minimum en  $u^*$ .

## Minimisation du coût en espérance

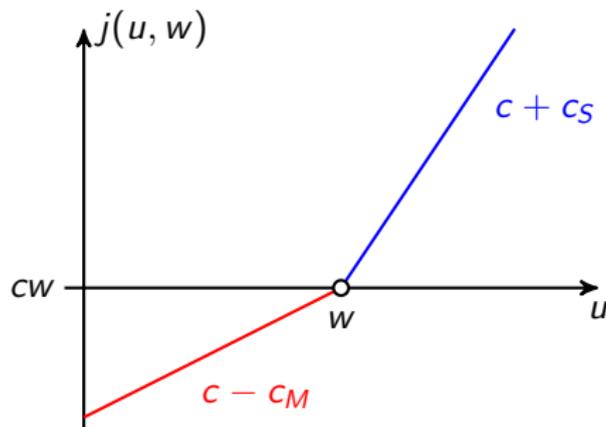


La commande optimale prend des valeurs entières

$$u^* = \inf \left\{ z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S} \right\},$$



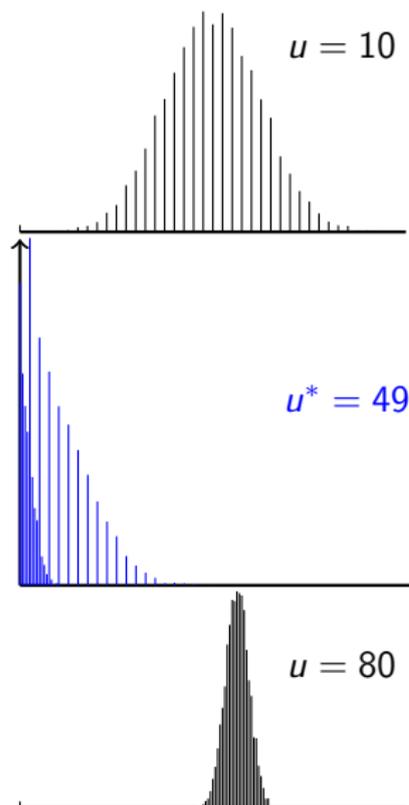
si la demande est une variable aléatoire entière.

Minimisation du coût en espérance  $c_M \leq c$ 

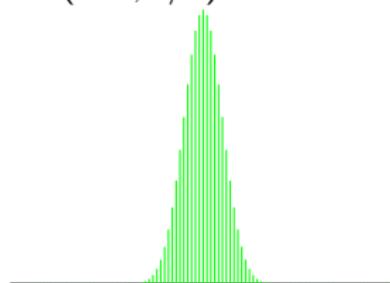
On remarque que

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) \geq \min_{u = \phi(W)} J(u) = \mathbb{E}_W[\min_{u \in \mathbb{U}} j(u, W)]$$

Or  $\min_{u \in \mathbb{U}} j(u, w)$  est atteint pour  $u = 0$  pour tout  $w$  et donne une commande admissible pour le problème  $\min_{u \in \mathbb{U}} j(u, w)$ .

Distribution des coûts  $j(u, W)$ 

Distribution de la demande  
 $\text{bin}(100, 1/2)$ .



## Stock initial et coût fixe d'approvisionnement

On suppose ici que l'on peut avoir un stock initial  $x \in \mathbb{Z}$  et que toute commande a un coût fixe  $c_F$ . Le coût à minimiser devient maintenant :

$$\begin{aligned}\tilde{J}(u) &= \mathbb{E}_W[c_F \mathbb{I}_{\{u > 0\}} + cu + c_s(x + u - W)_+ + c_M(W - x - u)_+] \\ &= c_F \mathbb{I}_{\{u > 0\}} - cx + \mathbb{E}_W[j(u + x, W)] \\ &= c_F \mathbb{I}_{\{u > 0\}} + J(u + x) - cx\end{aligned}$$

### Commande optimale $u^*(x)$ pour $c_M > c$ :

La commande optimale est une stratégie  $(s, S)$  :

$$u^*(x) = (S - x) \mathbb{I}_{\{x \leq s\}}$$

Quand le stock devient en dessous de  $s$ , on commande des journaux de façon à ramener le stock à  $S$ . La valeur de  $S$  est donnée par  $\arg \min_{u \in \mathbb{U}} J(u)$ .

## Stock initial et coût fixe d'approvisionnement

Soit  $S$  le stock donné par  $\{S\} = \arg \min_{u \in \mathbb{U}} J(u)$ .

- Si  $x \geq S$ , il est optimal de ne rien faire ( $J(\cdot) \nearrow$  et  $c_F \geq 0$ ) :

$$\tilde{J}(0) = J(x) - cx \leq J(x + u) - cx + c_F = \tilde{J}(u)$$

- Si  $x \leq S$ , comme  $J(\cdot)$  est minimale en  $S$  :
  - Si on commande, il faut commander  $u = S - x$  de coût

$$\tilde{J}(u) = J(S) - cx + c_F$$

- Si on ne commande rien le coût est  $J(x) - cx$

On doit choisir la solution la moins coûteuse, Il faut donc compléter son stock jusqu'à  $S$  si  $J(x) \geq c_F + J(S)$  et ne rien faire sinon. De plus, on remarque que :

$$\{x \leq S \mid J(x) \geq c_F + J(S)\} = \{x \mid x \leq s\}$$

où  $s$  est donné par

$$\text{où } s = \sup \{z \in (-\infty, S) \mid J(z) \geq c_F + J(S)\}$$

## Stock initial et coût fixe d'approvisionnement

Posons  $X_0 = x$  et  $f(x, u, w) = x + u - w$  et  
 $\tilde{j}(u, x_1) = c_F \mathbb{I}_{\{u > 0\}} + cu + c_s(x_1)_+ + c_M(-x_1)_+$

### Le vendeur de journaux : problème dynamique

$$\min_{u \in \mathcal{U}, X_1, X_0} \mathbb{E}_W[\tilde{j}(u, X_1)]$$

sous contraintes

$$X_0 = x \quad X_1 = f(X_0, u, W)$$

### Avec une contrainte de non-anticipativité

$$\mathcal{U} = \{u : \mathbb{X}_0 \rightarrow \mathbb{N}\}$$

La commande du nombre de journaux est contrainte à n'utiliser que l'information disponible  $X_0 = x$  et pas la demande future  $W$ .

## Une “chaîne” de Markov

Les deux stocks de journaux  $X_0$  et  $X_1$  peuvent être vus comme les états d'une chaîne de Markov contrôlée. On peut autoriser des stocks négatifs et on a alors a priori  $X_0 \in \mathbb{Z}$  et  $X_1 \in \mathbb{Z}$ .

- Supposant  $u \in \mathbb{N}$  fixé, la matrice de transition de la chaîne de Markov est

$$P_{x_0, x_1}^u = \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0)$$

$$P_{x_0, x_1}^u = \begin{cases} \mathbb{P}(W = w_0) & \text{si } x_1 = x_0 + u - w_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Supposant que  $u$  puisse être choisi comme une fonction de  $X_0$ ,  $u = \phi(X_0)$ , alors

$$P_{x_0, x_1}^\phi = \begin{cases} \mathbb{P}(W = w_0) & \text{si } x_1 = x_0 + \phi(x_0) - w_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Étudier des problèmes sur  $N$  pas de temps sera l'objet du prochain cours.

## Temps d'arrêt et problème de contrôle

Soit  $P$  la matrice de transition d'une chaîne de Markov d'espace d'état  $\mathbb{X}$ . On considère  $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cup \Delta$  et deux matrices de transition

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X} \quad P_{x,y}^C = P_{x,y} \quad \text{et} \quad P_{\Delta,\Delta}^C = 1 \quad (\text{continue})$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X} \quad P_{x,y}^S = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{Y} \quad P_{x,\Delta}^S = 1 \quad (\text{stop})$$

On cherche à évaluer un coût sur un pas de temps pour la chaîne partant de  $X_0 = x \in \mathbb{X}$

$$v_0(x) = \sup_{u \in \{C, S\}, X_0=x} \mathbb{E}(c(u, X_0) + f_1(X_1))$$

où la matrice de transition de la chaîne est  $P^u$  si le contrôle utilisé est  $u$  et avec  $c(C, \cdot) = 0$  et  $c(S, x) = f_0(x)$  et  $f_1(\Delta) = 0$ . On obtient :

$$v_0(x) = \sup \left( \sum_{y \in \mathbb{X}} P_{x,y} v_1(y), f_0(x) \right) \quad \text{et} \quad v_1(x) = f_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

Similaire à l'Equation du temps d'arrêt optimal

# Un programme linéaire

Le problème du vendeur de journaux

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) = \mathbb{E}_W[j(u, W)]$$

avec

$$j(u, w) = c_M w + (c - c_M)u + (c_M + c_S)(u - w)_+$$

peut s'écrire comme un problème linéaire

## Explicitons l'espérance

La demande  $W$  prend un nombre fini  $S$  de valeurs  $w_s$ ,  $s \in S$ , avec probabilité  $\pi_s$

$$\mathbb{P}(W = s) = \pi_s, \quad \forall s \in S$$

$$\sum_{s \in S} \pi_s = 1 \quad \text{et} \quad \pi_s \geq 0, \quad \forall s \in S$$

Le critère à minimiser s'écrit alors

$$J(u) = \sum_{s \in S} \pi_s (c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)(u - w_s)_+)$$

# Explicitons le $\max (\cdot)_+$ avec des variables supplémentaires (Optim S1)

$$(u - w_s)_+ = \max\{0, u - w_s\} = \min \{v_s \mid v_s \geq 0 \text{ et } v_s \geq u - w_s\}$$

$$\begin{aligned} J(u) &= \sum_{s \in S} \pi_s (c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)(u - w_s)_+) \\ &= \sum_{s \in S} \pi_s \min_{\substack{v_s \geq 0, \forall s \in S \\ v_s \geq u - w_s, \forall s \in S}} c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)v_s \\ &= \min_{\substack{v_s \geq 0, \forall s \in S \\ v_s \geq u - w_s, \forall s \in S}} \sum_{s \in S} \pi_s (c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)v_s) \end{aligned}$$

# Le problème du vendeur de journaux comme un programme linéaire

$$\min_{u \in \mathbb{U}, (v_s)_{s \in S} \in \mathbb{V}^S} \sum_{s \in S} \pi_s (c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)v_s)$$

sous les contraintes

$$v_s \geq u - w_s \quad \forall s \in S$$

$$v_s \geq 0 \quad \forall s \in S$$

$$u \geq 0$$

On obtient un programme linéaire en nombres entiers ( $\mathbb{U} = \mathbb{N}$  et  $\mathbb{V} = \mathbb{N}$ ) et on peut étudier la version relâchée ( $\mathbb{U} = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ ).

**Question :**

Est-ce que la version relâchée donne une solution entière ?

## La contrainte de mesurabilité

Le fait que la commande  $u \in \mathbb{U}$  doit être la même pour toutes les réalisations de  $w_s$  peut s'exprimer en introduisant de nouvelles commandes  $u_s \in \mathbb{U}^S$  (duplication de variables) et en les contraignant à être toutes égales,  $u_s = u \quad \forall s \in S$ .

$$\min_{u \in \mathbb{U}, u_s \in \mathbb{U}^S, (v_s)_{s \in S} \in \mathbb{V}^S} \sum_{s \in S} \pi_s (c_M w_s + (c - c_M) u_s + (c_M + c_S) v_s)$$

sous les contraintes

$$v_s \geq u - w_s \quad \forall s \in S$$

$$v_s \geq 0 \quad \forall s \in S$$

$$u \geq 0$$

$$u_s = u \quad \forall s \in S$$

Si on dualise les contraintes,  $u_s = u \quad \forall s \in S$ , on découpe les problèmes  $s$  par  $s$ . Des méthodes numériques sont basées sur cette idée.

# POUR ALLER PLUS LOIN : COURS DE L'ÉCOLE DES PONTS

- 1A : cours d'« Optimisation » (matrices unimodulaires)
- 2A :
  - cours de « Recherche Opérationnelle »
  - cours d'« Optimisation et contrôle »
  - cours « Modéliser l'Aléa »