Examen du cours
Décision dans l'incertain
constitué de quatre exercices indépendants
Jeudi 13 Avril 2023 de 9h00 à 10h00

Exercise 1 À l'instant $n = 0$, une maison d'édition, reçoit un manuscrit qui doit être publié. Il contient un nombre connu $F \in \mathbb{N}$ de fautes typographiques. Avant d'envoyer le manuscrit a l'impression on fait faire des relectures successives. À la k-ième relecture, chaque faute typographique encore présente (indépendemment les unes des autres) à une probabilité p_k d'être corrigé et une probabilité $(1-p_k)$ de rester dans le manuscrit. Chaque relecture est indépendante de la précédente et coûte $c_1 > 0$. Quand on décide d'arrêter les relectures et d'envoyer le manuscrit chez l'imprimeur, chaque faute qui reste dans le manuscrit va avoir un coût $c_2 > 0$.

• Q-1.1 : Soit $(X_n, n \geq 0)$ le nombre de fautes contenues dans le manuscrit à l'instant n. Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov et écrire sa matrice de transition à l'instant n (la chaîne n'est pas homogène).

Corrigé:

On appelle $(X_n; n \in \mathbb{N})$ la suite de v.a telle que X_n est le nombre de fautes restantes à l'instant n. On a $X_0 = F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_n \in \{0, \ldots, F\}$. Si $(X_n; n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov son espace d'état sera $\mathbb{X} = \{0, \ldots, F\}$. Si maintenant $X_n = k \in \mathbb{X}$ alors $X_{n+1} = k - \sum_{m=1}^{k} U_m$ où les U_m sont des v.a indépendantes prenant la valeur 1 avec probabilité p_n et 0 avec probabilité $(1 - p_n)$. la loi de X_{n+1} sachant que $X_n = k$ est donc une loi binomiale sur $0, \ldots, k$

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = k\} = C_k^{x_{n+1}} (1 - p_n)^{x_{n+1}} (p_n)^{k - x_{n+1}} \,. \qquad (1)$$

la suite de v.a. $(X_n; n \in \mathbb{N})$ est bien une chaîne de markov et on vient de donner la matrice de transition à l'instant n.

• Q-1.2 : Écrire un problème d'arrêt optimal permettant de savoir quand s'arrêter dans le processus de relecture pour minimiser en moyenne les coûts du processus d'édition, sachant que par ailleurs on ne souhaite pas faire plus de $N \in \mathbb{N}^*$ relectures.

Corrigé:

Si on s'arrête au temps n le coût sera $f(n, X_n)$ avec $f(n, x) = n \times c_1 + x * c_2$. On cherche a minimiser ce coût pour les temps d'arrêts plus petits que N.

• Q-1.3 : Écrire l'équation de programmation dynamique associée au problème de temps d'arrêt formulé en Q-1.2.

Corrigé:

C'est devenu du recopiage d'un résultat du cours

Exercise 2 Soit $(X_n; n \in \mathbb{N})$ une chaîne de Markov à espace d'état fini $\mathbb{X}$ et soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une application de $\mathbb{X}$ vers un autre ensemble fini $\mathbb{Y}$. on considère la suite de variables aléatoires $(Y_n; n \in \mathbb{N})$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = f(X_n)$.

• Q-2.1 : On suppose que f est bijective, montrer que $(Y_n; n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov et donner son espace d'état et sa matrice de transition.

Corrigé:

On a que l'événement $\{Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \ldots, Y_0 = y_0\}$ est égal a $\{X_n = f^{-1}(y_n), X_{n-1} = f^{-1}(y_{n-1}), \ldots, X_0 = f^{-1}(x_0)\}$. On en déduit facilement que $(Y_n; n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov d'espace d'état $\mathbb{Y}$ et de matrice de transition $Q_{y,y'} = P_{f^{-1}(y),f^{-1}(y')}$ pour tout y, $y' \in \mathbb{Y}$ si P est la matrice de transition de la chaîne $(X_n; n \in \mathbb{N})$.

• Q-2.2 : On suppose que f est injective, montrer que $(Y_n; n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov et donner son espace d'état et sa matrice de transition.

Corrigé:

Si f est injective c'est une bijection de $\mathbb{X}$ sur $f(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$. En utilisant la question précédente $(Y_n; n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov d'espace d'état $f(\mathbb{X})$ et de matrice de transition comme à la question 1 mais restreinte a $f(\mathbb{X})$, $Q_{y,y'} = P_{f^{-1}(y),f^{-1}(y')}$ pour tout y, $y' \in f(\mathbb{X})$.

• Q-2.3 : On suppose ici que $\mathbb{X} = \{a, b, b', c\}$ et $\mathbb{Y} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ et que f est donnée par $f(a) = \alpha$, $f(b) = f(b') = \beta$ et $f(c) = \gamma$ et que la matrice de transition de la chaîne $(X_n; n \in \mathbb{N})$ est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Montrer que $(Y_n; n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov (soigner la justification) et donner sa matrice de transition.

Corrigé:

La matrice de transition est

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Il faut le justifier en ré-exprimant à chaque fois un événement $Y_n = y_n$ par son équivalent en $X_n \in ?$ et en vérifiant la propriété de Markov quand on s'est ramené à des événements sur la chaîne $(X_n; n \in \mathbb{N})$. Ici f n'est pas injective mais on continue à obtenir une chaîne de Markov pour $(Y_n; n \in \mathbb{N})$. C'est bien sur faix dans le cas général. C'est un + si certains élèves l'ont fait remarquer.

Exercise 3 On lance un dé de manière répétitive. Parmi les suites suivantes, lesquelles sont des chaînes de Markov ? Quand elles le sont, donner leur matrice de transition.

• Q-3.1 : $(X_n; n \in \mathbb{N})$, où X_n est le plus grand résultat obtenu après n lancers.

Corrigé:

On appelle $(U_n; n \in \mathbb{N})$ la suite de tirages de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, 6\}$ qui représente les lancés de dès indépendants. Dans cette première question $X_n = \max\{U_k \mid k \leq n\}$. On a bien sur $X_{n+1} = \max(X_n, U_{n+1})$ et on a vu en cours que cela donne une chaîne de Markov. La matrice de transition s'en déduit.

• Q-3.2 : $(N_n; n \in \mathbb{N})$, où N_n est le nombre de 6 obtenus au bout de n lancers.

Corrigé:

Dans cette question $N_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_6(U_k)$. On a bien sur $N_{n+1} = N_n + \mathbf{1}_6(U_{n+1})$ et on a vu en cours que cela donne une chaîne de Markov. La matrice de transition s'en déduit.

• Q-3.3 : $(C_n; n \in \mathbb{N})$, où C_n est le nombre de lancer, à l'instant n, depuis le dernier 6.

Corrigé:

Dans cette question

$$C_{n+1} = \begin{cases} 0 & si\ U_{n+1} = 6 \\ 1 + C_n & si\ U_{n+1} \neq 6 \end{cases} \tag{4}$$

et on a vu en cours que cela donne une chaîne de Markov. La matrice de transition s'en déduit.

• Q-3.4 : $(B_n; n \in \mathbb{N})$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} N_k$.

Corrigé:

Dans cette question on a pas une chaîne de Markov. On doit exhiber un cas ou la propriété de Markov n'est pas satisfaite par ex

$$\mathbb{P}\big\{B_4 = 5 \,\big|\, B_3 = 3, B_2 = 1, B_1 = 0\big\} = 5/6$$
$$\neq \mathbb{P}\big\{B_4 = 5 \,\big|\, B_3 = 3, B_2 = 2, B_1 = 1\big\} = 1/6 \ .$$

Exercise 4 On considère une suite de variables aléatoire $(X_n; n \in \mathbb{N})$ données par $X_{n+1} = X_n + W_{n+1}$ où $(W_n; n \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans un sous ensemble fini de $\mathbb{Z}$ et $X_0 = x_0 \in \mathbb{N}$ est fixée. Au temps $n < N$ on peut décider de s'arrêter et on gagne alors la somme $X_n - p$ ($p > 0$ est un réel fixé). Par contre si on attends le temps N on ne gagne rien. On cherche à trouver le temps d'arrêt qui maximise notre gain en espérance.
• Q-4.1 : Écrire le problème de temps d'arrêt optimal que l'on cherche à résoudre.

Corrigé:

On veut maximiser pour les temps d'arrêts plus petits que N un gain en espérance de $f(n, X_n)$ avec $f(n, x) = 0$ si $n = N$ et $f(n, x) = x - p$ si $n < N$.

• Q-4.2 : Montrer que l'Équation de programmation dynamique à résoudre s'écrit sous la forme

$$V_k(x) = \max\{x - p, \mathbb{E}[V_{k+1}(x + W_1)]\} \ , \ \ \forall k \in \{0, \dots, N-1\} \text{ et } V_N(x) = 0 \ .$$

Corrigé:

C'est une formuel du cours à nouveau sauf que dans le cours on a vu des chaînes de Markov à espace d'état fini. C'est pourquoi la chaîne précédente à été contrainte a avoir une dynamique où pour $n \leq N$ on va rester dans un sous ens fini de $\mathbb{Z}$.

• Q-4.3 : Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, V_k comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe et que $V_k \geq V_{k+1}$.

Corrigé:

La convexité se montre par récurence un max de deux fonctions convexes est convexe. Le fait que V_k est une suite décroissante se déduit de Jensen (j'ai un doute, ils ne connaissent peut-etre pas Jensen).

• Q-4.4 : Soit $p_k = \inf\{x \geq 0 \,|\, V_k(x) = x - p\}$. Montrer que le suite $(p_k)_{k\in\{0,\dots,N\}}$ est décroissante.

Corrigé:

par récurence en utilisant la question précédente.

• Q-4.5 : Montrer que la politique optimale est de s'arrêter dès que $X_k \geq p_k$.

Corrigé:

Résultat du cours on doit s'arrêter dès que $V_k(X_k) = X_k - p$ ce qui combiné avec la question précédente donne le résultat.