

# 106:Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie. Sous-groupes de $GL(E)$ . Applications

Pierre Lissy

April 24, 2010

Dans tout ce qui suit on considère un  $ev$   $E$  de dimension finie  $n$  sur le corps  $k$ .

## 1 Groupe linéaire et spécial linéaire

### 1.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 1.** Le groupe linéaire est le groupe des endomorphismes de  $E$  inversibles, ie de déterminant non nul, pour la composition;  $I$  est isomorphe au groupe de matrice  $GL_n(k)$  correspondant. Le groupe spécial linéaire est le noyau du morphisme de groupe multiplicatif qu'est le déterminant entre  $GL(E)$  et  $k^*$ .

**Proposition 1.**  $SL(E)$  est un sous-groupe distingué de  $GL(E)$  et même plus exactement on a  $GL(E) \simeq SL(E) \rtimes k^*$

**Théorème 1.** Deux groupes linéaires  $GL_n(k)$  et  $GL_m(k)$  sont non isomorphes sauf si  $n = m$ .

**Lemme 1.** Le centre de  $GL(E)$  est les matrices scalaires; le centre de  $SL(E)$  est soit trivial si  $n$  impair, soit égal à  $Id, -Id$  si  $n$  pair.

**Définition 2.** Groupe linéaire projectif:  $PGL(E) := GL(E)/Z(GL(E))$ , ie  $GL(E)/(\lambda Id)$ . Groupe spécial linéaire projectif:  $PSL(E) := SL(E)/Z(SL(E)) = SL(E)/(\lambda Id)$ . où  $\lambda$  sont les racines  $n$ -èmes de l'unité dans  $k^*$ .

### 1.2 Générateurs de $SL(E)$ et de $GL(E)$ .

**Définition 3.** On considère un hyperplan de  $E$  d'équation  $f(x) = 0$ , et un élément  $u$  inversible égal à  $Id$  sur  $H$ . Transvection d'hyperplan  $H$ : une des définitions équivalentes

1.  $\det(u) = 1$
2.  $u$  n'est pas diago
3.  $Im(u - Id) \subset H$
4. Le morphisme quotient  $E/H$  sur lui-même est l'identité
5. Il existe  $a$  dans  $H$  tel que  $u(x) = x + f(x)a$ .
6. Dans une base convenable on a deux un dans la dernière colonne tout en bas et  $Id$  autre part.

**Définition 4.** On considère un hyperplan de  $E$  d'équation  $f(x) = 0$ , et un élément  $u$  inversible égal à  $Id$  sur  $H$ . Dilatation d'hyperplan  $H$ : une des définitions équivalentes.

1.  $\det(u)$  non égal à 1
2.  $u$  a une valeur propre différente de 1 et est diago
3.  $Im(u - Id) \not\subset H$

4. Dans une base on a un  $\lambda$  en bas.

**Lemme 2.** Si l'on se donne deux éléments  $x$  et  $y$ , il existe une transvection  $u$  ou un produit de deux transvections  $v$  tel que  $u(x) = y$  ou  $uv(x) = y$ .

**Théorème 2.** Les transvections engendrent  $SL(E)$ . Elles sont conjuguées dans  $GL(E)$  et dans  $SL(E)$  pour  $\dim(E) \geq 3$ . On a même seulement besoin de  $n$  éléments, sauf si c'est une homothétie et il en faut  $n + 1$ .

### 1.3 Simplicité de PSL

Encore une fois, on en déduit assez facilement un résultat de simplicité grâce aux générateurs.

**Théorème 3.**  $PSL(n, k)$  est simple pour un corps  $k$  quelconque et  $n \geq 3$ , ou alors pour  $n = 2$  et  $k$  non égal à  $F_2$

**Corollaire 1.**  $D(GL(n, k)) = D(SL(n, k)) = SL(n, k)$  pour  $n \geq 3$ , ou pour  $n = 2$  et  $k$  non égal à  $F_2$  ou  $F_3$ .

**Remarque 1.** on rappelle que dans le cas  $n$  impair,  $PSL$  est égal à  $SL$ . Dans le cas d'un corps algébriquement clos,  $PSL$  est égal à  $PGL$ .

**Corollaire 2.** Les transvections et les dilatations engendrent  $GL(E)$

**Application 1.** Les matrices diagonalisables inversibles réelles engendrent  $GL_n(\mathbb{R})$

**Application 2.** Les matrices inversibles de trace nulle engendrent  $GL_n(\mathbb{R})$ .

### 1.4 Cardinaux dans le cas des corps finis. Etude des petits groupes linéaires

**Théorème 4.** 1.  $|GL_n(F_q)| = (q^n - 1) \dots (q^n - q^{n-1})$

2.  $|SL_n(F_q)| = (q^n - 1) \dots (q^n - q^{n-2})q^{n-1} =: N$

3.  $|GL_n(F_q)| = N$

4.  $|GL_n(F_q)| = N / \text{pgcd}(N, q - 1)$

**Théorème 5.** [3][fin du chapitre 4]

$$GL(2, \mathbb{F}_2) = SL(2, \mathbb{F}_2) = PSL(2, \mathbb{F}_2) \simeq \mathcal{S}_3.$$

$$PGL(2, \mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{S}_4; PSL(2, \mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_4.$$

$$PGL(2, \mathbb{F}_3) = PGL(2, \mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_5.$$

$$PGL(2, \mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{S}_5; PSL(2, \mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{A}_5.$$

## 2 Action du groupe linéaire sur les espaces de matrices

### 2.1 actions par translation

**Théorème 6.** Les orbites pour l'action par translation à gauche sont les matrices de même noyau. Celles pour la translation à droite sont celles de même image

## 2.2 Action de Steinitz

On considère l'action suivante, du groupe produit  $GL_p(A) \times GL_q(A)$  sur  $M_{p,q}(A)$ :  $\varphi(P, Q, M) \mapsto PMQ^{-1}$ . C'est une action de groupe appelée opération de Steinitz.

**Définition 5.** Deux matrices sont dites équivalentes ssi elles sont dans la même orbite pour cette action, ie ssi  $\exists(P, Q)$  tels que  $B = PAQ^{-1}$ .

**Lemme 3.** Changement de bases: si l'on considère deux  $k$ -ev  $E$  et  $F$ , deux bases  $B_0$  et  $B'_0$  de  $E$  ainsi que deux bases  $B_1$  et  $B'_1$  de  $F$ . Soient  $P$  et  $Q$  les matrices de passages correspondantes. Alors Si l'on considère la matrice  $A$  d'un endomorphisme  $f$  dans les bases  $B_0$  et  $B_1$ , la matrice de  $f$  dans les nouvelles bases est  $Q^{-1}AP$ .

**Corollaire 3.** Toute matrice de rang  $r$  est équivalente à la matrice  $I_r$  qui vaut l'identité sur la sous-matrice carré d'ordre  $r$  en haut à gauche et 0 partout autre part.

**Théorème 7.** Les orbites pour l'action de Steinitz sont exactement les matrices de même rang. Il y a donc un nombre fini d'orbites.

## 2.3 Action par conjugaison

On considère l'action suivante, du groupe produit  $GL_p(A)$  sur  $M_p(A)$ :  $\varphi : (P, M) \mapsto PMP^{-1}$ . C'est une action de groupe.

**Définition 6.** Deux matrices sont dites semblables ssi elles sont dans la même orbite pour cette action, ie ssi  $\exists P$  tel que  $B = PAP^{-1}$ .

**Remarque 2.** Deux matrices semblables ont même déterminant, même trace, même rang, même polynôme caractéristique, même valeurs propres, même polynôme minimal

Réciproque fausse.

**Exemple 1.**

Par contre, on a le résultat absolument remarquable suivant.

**Théorème 8.** [2] En dimension 2 et 3, deux matrices sont semblables ssi elles ont même polynôme minimal et même polynôme caractéristique.

**Théorème 9.** Toute matrice admet dans sa classe de similitude une réduite de Frobenius, d'où la classification.

## 2.4 Actions par congruence

## 3 Groupe orthogonal

On suppose le corps  $k$  de caractéristique différente de 2, et on considère une forme quadratique  $q$  sur cet espace.

### 3.1 Généralités

**Définition 7.** groupe des isométries de  $q$ :  $O(q)$  c'est les  $u$  tq  $q(u(x)) = q(x)$ .  $O^+(q)$  de même avec  $\det(u) = 1$ .

**Remarque 3.** deux formes quadratiques équivalentes donnent des groupes orthogonaux isomorphes.

**Lemme 4.** Si  $u$  est une symétrie orthogonale par rapport à  $F$  et  $g$  un endo orthogonal, alors  $gug^{-1}$  est une symétrie orthogonale par rapport à  $g(F)$ .

**Théorème 10.**  $O(q)$  est engendré par les réflexions, et même par au plus  $n$  réflexions (th de Cartan-Dieudonné). Si  $n \geq 3$ ,  $So(q)$  est engendré par les demi-tours.

### 3.2 La dimension 2

**Définition 8.** un plan  $(P, q)$  est dit hyperbolique ssi  $q(e_1) = 0, q(e_2) = 0$  et  $f(e_1, e_2) \neq 0$ .

**Théorème 11.** Les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $(P, q)$  est un plan hyperbolique
2.  $q$  est non dégénérée non définie
3. Le discriminant de  $q$  est égal à  $-1$  à un carré près

**Application 3.** On peut toujours englober un vecteur isotrope dans un plan hyperbolique (sur un espace  $q$  de  $E$ ).

### 3.3 cas d'un espace euclidien

La forme quadratique est ici la norme euclidienne.

**Théorème 12** (Deco polaire).  $GL_n(\mathbb{R})$  est homéomorphe (et même difféomorphe) à  $S_n^{++} \times O_n(\mathbb{R})$ .  
en dimension 2:

**Proposition 2.** Tout élément de  $O(E)$  est soit de déterminant 1 et c'est une rotation, sa matrice dans n'importe quelle BON est alors de la forme  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  où  $\theta$  indépendant de la base choisie est appelée angle de la rotation, soit de déterminant  $-1$  et c'est une réflexion (symétrie orthogonale), il existe une BOND telle que la matrice soit de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Le premier vecteur donne la droite par rapport à laquelle se fait la rotation.

**Proposition 3.** Les rotations forment un sous-groupe de  $O(E)$  noté  $SO(E)$  commutatif, plus exactement la composée d'une rotation d'angle  $\theta$  et d'angle  $\theta'$  est une rotation d'angle  $\theta + \theta'$ . Les éléments d'ordre fini de  $SO(E)$  sont les rotations d'angle  $2k\pi/n$ . Si  $\tau$  est une réflexion et  $r$  une rotation, alors il existe une rotation  $\tau'$  telle que  $u = \tau\tau'$ , et  $\tau u \tau^{-1} = u^{-1}$ .

**Proposition 4.** On note  $O^-(E)$  les réflexions. Toute réflexion est d'ordre 2. Si l'on conjugue une réflexion par une rotation on retombe sur elle-même.

## 4 Quelques autres sous-groupes dans le cas réel ou complexe

### 4.1 Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

**Lemme 5** (Ellipsoïde de John).

**Application 4.** Ellipsoïde de John: si l'on se donne un compact de  $\mathbb{R}^n$  il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant  $K$ .  $O$

**Théorème 13.** Tout sous-groupe compact de  $GL_n(\mathbb{R})$  est conjugué à un sous-groupe de  $O_n(\mathbb{R})$ .

**Théorème 14.** Les sous-groupes compacts maximaux de  $GL_n(\mathbb{R})$  sont les conjugués des groupes orthogonaux.

**Application 5.** On considère une norme  $N$  sur  $E$  telle que le groupe des isométries pour cette norme agit de manière transitive sur la sphère unité. Alors  $N$  est euclidienne.

### 4.2 Application aux sous-groupes finis de $GL(2, \mathbb{R})$

**Théorème 15.** Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $O(E)$ .

1. Soit  $G \subset SO(E)$ . Alors  $G$  est formée de rotations d'angle  $2k\pi/n$ .  $G$  est alors un groupe cyclique d'ordre  $n$ , et est donc isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
2. Soit  $G \not\subset SO(E)$ . Alors  $G$  est de cardinal pair et est un certain groupe diédral (ou  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  si il contient juste une symétrie et  $Id$ ).

**Corollaire 4.** Tout sous-groupe fini de  $O(E)$  est soit conjugué à un groupe de rotations, soit conjugué à un groupe diédral.

### 4.3 Application aux sous-groupes finis de $GL(3, \mathbb{R})$

**Lemme 6** (Formule des classes). *Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$ . Supposons  $G$  et  $X$  finis. Soit  $\omega$  un ensemble de représentants des orbites de  $X$ . Alors  $|X| = \sum_{x \in \omega} \frac{|G|}{|Stab(x)|}$ .*

**Définition 9.** *On appelle pôle d'une rotation  $u$  différente de l'identité l'intersection de l'axe de  $U$  et de la sphère unité. C'est un ensemble à  $n$  éléments. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $SO(3, \mathbb{R})$  non trivial de cardinal  $n$ . On note  $X$  l'ensemble des pôles des éléments de  $G$  privé de l'identité.  $X$  est un ensemble de cardinal au moins 2 et inférieur à  $2(n-1)$*

**Proposition 5.**  *$G$  agit sur  $X$  de la manière évidente, ie  $g.x = g(x)$ .*

En utilisant cette action, la formule des classes et la formule de Burnside, on démontre

**Théorème 16.** *Les sous-groupes finis de  $SO(3, \mathbb{R})$  sont soit des groupes cycliques, soit isomorphes à un groupe diédral, soit isomorphes à un des trois groupes d'isométries des solides platoniciens.*

**Application 6.** *On a du coup la même chose pour les sous-groupes finis de  $GL(3, \mathbb{R})$*

**Remarque 4.** *Attention, contrairement au cas de la dimension 2 où on a décrit PRÉCISEMENT les sous-groupes, on a ici que des classes d'isomorphismes!*

### 4.4 Sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$

**Théorème 17** (Burnside). *tout sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  d'indice fini est fini.*

**Théorème 18.** *Tout sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{C})$  est conjugué à un sous-groupe de matrices diagonales.*

**Remarque 5.** *Vrai dans n'importe quel corps algébriquement clos.*

**Théorème 19.** *Il n'existe pas de sous-groupes non triviaux de  $GL_n(\mathbb{C})$  arbitrairement petits (ie tout sous-groupe trop petit est réduit à  $Id$ )*

**Théorème 20.** *Les morphismes de groupes continus de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $GL_n(\mathbb{C})$  sont nécessairement de la forme  $e^{tA}$ . Autrement dit tous les groupes à un paramètre de  $GL_n(\mathbb{C})$  sont de cette forme.*

**Application 7.** *Sous-groupes à un paramètre de  $GL_n(\mathbb{R})$*

## References

- [1] fgn algèbre 2
- [2] Gourdon algèbre
- [3] Perrin