

107:sous-groupes finis de $O(2, R)$ et $SO(3, R)$. Applications.

Pierre Lissy

April 23, 2010

1 Dimension 2

Dans ce paragraphe, E désigne un plan euclidien orienté muni du ps $(\cdot|\cdot)$. On ramène l'étude de $O(2, R)$ à celle de $O(E)$.

1.1 Rappels sur $O(E)$

Proposition 1. *Tout élément de $O(E)$ est soit de déterminant 1 et c'est une rotation, sa matrice dans n'importe quelle BON est alors de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où θ indépendant de la base choisie est appelée angle de la rotation, soit de déterminant -1 et c'est une réflexion (symétrie orthogonale), il existe une BOND telle que la matrice soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le premier vecteur donne la droite par rapport à laquelle se fait la rotation.*

Proposition 2. *Les rotations forment un sous-groupe de $O(E)$ noté $SO(E)$ commutatif, plus exactement la composée d'une rotation d'angle θ et d'angle θ' est une rotation d'angle $\theta + \theta'$. Les éléments d'ordre fini de $SO(E)$ sont les rotation d'angle $2k\pi/n$. Si τ est une réflexion et r une rotation, alors il existe une rotation τ' telle que $u = \tau\tau'$, et $\tau u\tau^{-1} = u^{-1}$.*

Proposition 3. *On note $O^-(E)$ les réflexions. Toute réflexion est d'ordre 2. Si l'on conjugue une réflexion par une rotation on retombe sur elle-même.*

1.2 Les deux types de sous-groupes finis

Définition 1. *Un polygone régulier à n côtés est une figure plane délimitée par n segments formant une ligne brisée fermée, l'angle entre deux segments étant $2\pi/n$. Chacun de ses segments est appelé côté ou arête du polygone.*

Voici une autre définition équivalente.

Définition 2. *Un polygone convexe est une intersection d'un nombre fini de demi-plans. Un polygone régulier à n côtés est un polygone convexe tel qu'il existe un point O et un entier n pour lesquels P est invariant par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$.*

Remarque 1. *Les côtés d'un polygone sont forcément de même longueur. Il y a exactement n sommets. Un polygone est compact.*

Définition-proposition 1. *On considère un polygone régulier à n côtés centré en O . Les isométries qui conservent ce polygone forment un groupe, appelé groupe diédral, noté D_n . Il contient n rotations (d'angle $2k\pi/n$) qui forment un sous-groupe abélien distingué de D_n et n réflexions.*

Remarque 2. *Si l'on considère un polygone plus gros mais ayant le même nombre de côtés, on évidemment on obtient le même groupe diédral que le précédent!*

Théorème 1. *Soit G un sous-groupe fini de $O(E)$.*

1. *Soit $G \subset SO(E)$. Alors G est formée de rotation d'angle $2k\pi/n$. G est alors un groupe cyclique d'ordre n , et est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

2. Soit $G \not\subset \text{So}(E)$. Alors G est de cardinal pair et est un certain groupe diédral (ou $Z/2Z$ si il contient juste une symétrie et Id).

Corollaire 1. Comme une isométrie d'un espace stabilisant un polygône affine stabilise aussi l'isobarycentre des sommets de ce polygône, on a le même résultat pour le sous-groupe fini des groupes des isométries affines d'un plan affine

Lemme 1. Tout sous-groupe fini de $GL(E)$ est conjugué à un sous-groupe fini de $O(E)$ (pour n'importe quel espace euclidien E de dimension finie)

Application 1. Tout sous-groupe fini de $GL(E)$ est soit conjugué à un groupe de rotations (et dans ce cas il est cyclique), soit conjugué à un groupe diédral. On doit pouvoir disjoncetr ces cas selon qu'il contient des matrices de déterminant négatif ou non.

1.3 Etude détaillée du groupe diédral

Théorème 2. D_n est isomorphe à un produit semi-direct $Z/nZ \rtimes_{\varphi} Z/2Z$, dont l'action de groupe correspondant est le passage à l'opposée : $\varphi(0) = (k \mapsto 0)$ et $\varphi(1) = (k \mapsto -k)$. Une section de la projection canonique est donnée par n'importe quelle réflexion.

Remarque 3. Dans les cas $n = 3$ ou $n = 4$ ou $2p$ avec p premier impair, c'est le seul produit semi-direct non trivial, dans les autres cas il en existe d'autres)

Application 2. Le seul sous-groupe non abélien d'ordre 6 est $S_3 \simeq D_3$. Les sous-groupes non abéliens de cardinal 8 sont D_4 et H_8 . Le seul groupe non abélien de cardinal $2p$ avec p premier est D_p

Proposition 4. Soit r la rotation élémentaire et s n'importe quelle symétrie. Alors $\langle r, s \rangle = D_n$ et r engendre les rotations laissant fixes le polyèdre. L'ordre de r^k est donc k/k^n .

Proposition 5. On considère un groupe K d'ordre $2n$ tel que $K = \langle a, b \rangle$ avec a d'ordre n et b d'ordre 2, $(ab)^2 = 1$ et $b^2 = 1$. Alors $K \simeq D_n$.

Proposition 6. $Z(D_n)$ est trivial si n impair, Id et $-\text{Id}$ si n pair. $D(D_n) = r^2$, d'ordre n si n impair, $n/2$ si n pair.

Lemme 2. Tout élément s'écrit sous la forme $r^k s$ ou r^k .

Proposition 7. Si n est impair, toutes les réflexions sont conjuguées. Si n est pair, on a deux classes de conjugaison: les symétries passant par les mileiux des arêtes et celles passant par les sommets. Le centralisateur d'une réflexion est dans le cas impair Id, s , et dans le cas pair $\text{Id}, s, -s, -\text{Id}$. Le centralisateur d'une rotation est l'ensemble des rotations, la classe de conjugaison de r^k est r^k, r^{-k} .

1.4 Applications de groupes diédraux aux problèmes de colliers

Lemme 3 (Burnside). Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X . Soit k le nombre d'orbites, et posons $\text{fix}(g) := \{x \in X | g.x = x\}$. Alors $k = 1/|G| \sum |\text{fix}(g)|$.

Application 3. 1. Avec 4 perles bleues, 3 perles blanches et 2 perles orange on peut fabriquer 76 colliers "différents" (ie différents pour le fabricant du collier, tels qu'on peut passer d'un collier à un autre par n'improte quel composé d'une rotation et d'une réflexion).

2. Avec 4 perles bleues, 6 perles blanches et 4 perles oranges on peut fabriquer 7620 colliers "différents"

Application 4. Le nombre de colorations d'un collier à n perles avec m couleurs est $1/n \sum_{d|n} \varphi(d) m^{n/d}$ (seules les rotations du collier sont considérées ici)

2 Sous-groupes finis de $SO(3, R)$

On considère dorénavant un espace euclidien de dimension 3 orienté. On ramène l'étude de $SO(3, R)$ à celle de $SO(3)$.

2.1 Rappels sur $SO(E)$

Proposition 8. *Tout élément u est une rotation par rapport à un axe.*

Proposition 9. *Tout élément de $SO(E)$ est produit de deux réflexions. Les retournements engendrent $SO(E)$.*

Proposition 10. *$SO(E)$ est simple. $Z(SO(E)) = Id$, $D(SO(E)) = SO(E)$.*

Proposition 11. *Pour tout axe D , on choisit un vecteur unitaire x . On appellera BOND relativement à D toute base de la forme $B = (x, \hat{B})$ où $\hat{B}$ est une base de l'orthogonal de D telle que B soit une BOND. Si l'on considère maintenant une rotation d'axe D , sa matrice dans n'importe quelle BOND relativement à D s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où θ indépendant de la base choisie est appelée angle de la rotation.*

2.2 Solides platoniciens

Définition 3. *Un solide platonicien, ou un polyèdre régulier convexe, est une figure géométrique en trois dimensions ayant des faces planes qui se rencontrent les long d'arêtes droites, les faces planes étant elle-mêmes des polygones réguliers identiques, qui est convexe.*

Une autre définition équivalente.

Définition 4. *Un polyèdre P est une intersection d'un nombre fini de demi-espaces. P est alors entièrement situé du même côté de chaque plan et est délimité par des surfaces polygonales qu'on appelle faces. Il est dit régulier ssi ses faces sont des polygones réguliers convexes.*

Lemme 4. *Un polyèdre convexe est un solide de Platon si et seulement si*

1. *Toutes ses faces sont des polygones réguliers convexes isométriques superposables*
2. *Aucune de ses faces ne se coupe, excepté sur les arêtes*
3. *Le même nombre de faces se rencontrent à chacun de ses sommets. Chaque solide de Platon peut par conséquent être noté par un symbole p, q où*
 p = le nombre de côtés de chaque face (ou le nombre de sommet sur chaque face) et
 q = le nombre de faces se rencontrant à chaque sommet (ou le nombre d'arêtes se rencontrant à chaque sommet). Si on appelle S le nbe de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. On a les égalités

1. $pF = 2A = qS$ (facile à démontrer, juste logique)

2. $S - A + F = 2$ (formule d'Euler, non triviale, vrai pour tout polygone convexe)

Par de simples considérations sur les solutions des équations ci-dessus, on obtient

Théorème 3. *Il n'existe que 5 solides platoniciens*

1. *Tétraèdre. $S = 4, A = 6, F = 4, (p, q) = (3, 3)$. Autodual*
2. *Cube. $S = 8, A = 12, F = 6, (p, q) = (4, 3)$ Dual: octaèdre*
3. *octaèdre. $S = 6, A = 12, F = 8, (p, q) = (3, 4)$ Dual: cube*
4. *Dodécaèdre. $S = 20, A = 30, F = 12, (p, q) = (5, 3)$ Dual: icosaèdre*
5. *Icosaèdre. $S = 12, A = 30, F = 20, (p, q) = (3, 5)$ Dual: dodécaèdre*

Définition 5. *On considère un solide de Platon centré en 0. On appelle groupe des déplacements de P , noté $Is^+(P)$, le groupe des éléments de $SO(E)$ qui conservent le solide P .*

Ils permettent de donner des représentations géométriques des petits groupes symétriques ou alternés.

Application 5. $Is^+(T) \simeq A_4$, $Is^+(C) = Is^+(O) \simeq S_4$. $Is^+(D) = Is^+(I) = A_5$.

On en déduit les groupes de toutes les isométries laissant invariants ces braves objets.

Application 6. $Is(T) \simeq S_4$, $Is(C) = Is(O) \simeq S_4 \times Z/2Z$. $Is(D) = Is(I) = A_5 \times Z/2Z$.

2.3 Sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$

Lemme 5 (Formule des classes). *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X . Supposons G et X finis. Soit ω un ensemble de représentants des orbites de X . Alors $|X| = \sum_{x \in \omega} \frac{|G|}{|Stab(x)|}$.*

Définition 6. *On appelle pôle d'une rotation u différente de l'identité l'intersection de l'axe de u et de la sphère unité. C'est un ensemble à n éléments. Soit G un sous-groupe fini de $SO(3, \mathbb{R})$ non trivial de cardinal n . On note X l'ensemble des pôles des éléments de G privé de l'identité. X est un ensemble de cardinal au moins 2 et inférieur à $2(n-1)$.*

Proposition 12. G agit sur X de la manière évidente, ie $g.x = g(x)$.

En utilisant cette action, la formule des classes et la formule de Burnside, on démontre

Théorème 4. *Les sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$ sont soit des groupes cycliques, soit isomorphes à un groupe diédral, soit isomorphes à un des trois groupes d'isométries des solides platoniciens.*

Application 7. *On a le même résultat pour les isométries affines d'un espace affine.*

Application 8. *On a du coup la même chose pour les sous-groupes finis de $GL(3, \mathbb{R})$.*

Remarque 4. *Attention, contrairement au cas de la dimension 2 où on a décrit PRÉCISEMENT les sous-groupes, on a ici que des classes d'isomorphismes!*

2.4 Applications aux problèmes de coloration

Application 9. *Il y a 57 manières de colorier le cube avec 3 couleurs (ou moins). Il y a $1/24 * (|C|^6 + 6 * |C|^3 + 8 * |C|^2 + 6 * |C|^3 + 3 * |C|^4)$ manières de colorier le cube avec C couleurs (ou moins).*

Faire de même avec tétraèdre et icosaèdre en utilisant la formule $1/g \sum |C|^{\gamma(g)}$ où $\gamma(g)$ désigne le nombre de cycles de g dans sa décomposition en cycles à supports disjoints. Page de dessins: un groupe diédral pair, un groupe diédral impair, et les 5 solides platoniciens (rajouter éventuellement les isométries dans certains cas)

References

[1]