

113 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Pierre Lissy

May 6, 2010

1 Définition. Lien avec l'exponentielle

1.1 Définition

Définition-proposition 1. U = ensemble des nombres complexes de module 1, ie tels que si $z = x + iy$, on a $x^2 + y^2 = 1$. c'est un groupe multiplicatif compact connexe par arcs (pour la topologie induite par la norme qu'est le module)

Remarque 1. C'est le plus grand sous-groupe borné de $\mathbb{C}^*$ (pour l'inclusion). C'est aussi le noyau du morphisme de groupe multiplicatif $z \mapsto |z|$.

1.2 Exponentielle

Définition 1. $\exp(z) = \sum z^n/n!$.

Proposition 1. $\exp$ est un morphisme surjectif du groupe additif $\mathbb{C}$ vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

Lemme 1. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$: les $a\mathbb{Z}$ ou denses.

Théorème 1. L'application $t \mapsto e^{it}$ est un morphisme du groupe $\mathbb{R}$ vers le groupe $\mathbb{C}$, dont le noyau est un sous-groupe de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a \neq 0$. On pose $\pi := a/2$. Le morphisme défini si-dessus est alors 2π -périodique; De plus, il est à valeurs dans U et surjectif, ie tout nombre de U s'écrit sous la forme e^{it} .

Définition-proposition 2. $\cos(\theta)$ est la partie paire de $e^{i\theta}$, $\sin(\theta)$ la partie impaire divisée par i . On a alors l'égalité $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$ et $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.

On peut retrouver à partir de là toutes les formules sur

Application 1. $\sum \cos(k\theta) = \cos(n\theta/2) * \sin((n+1)\theta)/\sin(\theta)/2$. $\sum \sin(n\theta) = .$ De même on peut linéariser facilement les $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$.

Application 2. Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$. θ est appelé un argument de z . Deux arguments diffèrent de 2π .

Application 3. Tout morphisme continu du groupe additif $\mathbb{R}$ vers le groupe des racines n -ièmes de l'unité est de la forme $f(t) = e^{i\alpha t}$.

Application 4 (Tchebychev). il existe un unique polynôme de degré n vérifiant $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

1.3 Racines n-ièmes

Définition-proposition 3. $U_n =$ les z tels que $z^n = 1$. Il y en a n , ce sont exactement les nombres de la forme $e^{2ik\pi/n}$ avec k variant de 0 à $n-1$. C'est un groupe cyclique, qui est engendré par $e^{2i\pi/n} = u_n$. Les générateurs de ce groupe cyclique sont appelées les racines primitives de l'unité.

Remarque 2. ceci entraîne qu'un nombre complexe écrit sous la forme $re^{i\theta}$ a n racines : les $r^{1/n}e^{i(\theta+2ik\pi)/n}$.

Proposition 2. On note Π_n l'ensemble des racines primitives n -ièmes de l'unité. C'est un ensemble qui a $\varphi(n)$ éléments.

1.4 Sous-groupes de U , groupes isomorphes ou homéomorphes à U

Lemme 2. Si a/b n'est pas rationnel alors le groupe $aZ + bZ$ est dense dans R .

Théorème 2. Les sous-groupes de U sont soit finis et donc c'est un sous-groupe des racines de l'unité, ce qui implique qu'ils sont cycliques, soit denses dans U .

Application 5. Les sous-groupes finis de $\mathbb{C}$ sont les groupes U_n .

Théorème 3. U est isomorphe à $R/2\pi Z$ en tant que groupes. Il est même homéomorphe à ce groupe si on munit ce groupe de la topologie quotient. U est isomorphe au groupe des rotations d'un plan euclidien orienté. Il est même homéomorphe à ce groupe si on le munit de la topologie induite par n'importe quelle norme sur les matrices.

2 Polynômes cyclotomiques

2.1 Définition. Exemples

Définition 2. n -ième polynôme cyclotomique $= \Phi_n(X) = \prod_{z \in \Pi_n} (X - z)$.

Exemple 1. $\Phi_1(X) = X - 1$. $\Phi_2(X) = X + 1$. $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$. $\Phi_4(X) = X^2 + 1$. $\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$. $\Phi_6(X) = X^2 - X - 1$.

Remarque 3. On peut aussi définir les polynômes cyclotomiques d'un corps quelconque en considérant de la même manière les racines primitives (il faut quand même avoir n premier à la caractéristique de p).

2.2 Propriétés

Proposition 3. $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$

Proposition 4. Les polynômes cyclotomiques sont des polynômes unitaires de degré $\varphi(n)$. Ils sont de plus à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Application 6. On obtient le polynôme cyclotomique dans un corps quelconque k en réduisant par le canonique de $\mathbb{Z}$ dans k les coefficients du polynôme cyclotomique dans $\mathbb{C}$.

Proposition 5. Les polynômes cyclotomiques sont irréductibles sur $\mathbb{Z}[X]$, et donc sur $\mathbb{Q}[X]$ puisqu'ils sont primitifs.

Citons une curiosité.

Proposition 6. Le plus petit nombre n tel que le polynôme cyclotomique Φ_n ait des coefficients autres que $1, 0, -1$ est 105 .

2.3 méthodes de calcul de certains poly cyclotomiques

Proposition 7. Si m et n sont premiers entre eux alors $\varphi_{mn}(X) = \prod a \in \Pi_n \prod b \in \Pi_m(X - ab)$. Notamment, pour n impair non égal à 1 on a $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$.

Proposition 8. Soit p premier. Alors $\Phi_{p^\alpha} = \Phi_p(X^{p^{\alpha-1}})$.

Proposition 9. Pour n pair, on a $\Phi_{2n} = \Phi_n(X^2)$.

Proposition 10. Si $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ alors en posant $d = \prod p_i$, on a $\Phi_n(X) = \Phi_d(X^{n/d})$.

Proposition 11. Soit p un nombre premier ne divisant pas n . Alors $\Phi_{pn} = \Phi_n(X^p)/\Phi_p(X)$.

2.4 Applications

Proposition 12. φ_n est le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ des racines primitives.

Application 7. Si a et b sont des racines n -ièmes et m -ièmes avec n et m premiers entre eux, alors $Q(a) \cap Q(b) = Q$.

Application 8 (Wedderburn). La commutativité est une conséquence des autres axiomes de la structure de corps pour les corps finis.

Application 9 (Dirichlet). il existe une infinité de nombres premiers de la forme $an + 1$, avec a et n premiers entre eux.

3 Analyse de Fourier.

3.1 Groupe dual

Définition 3. Soit G un groupe topologique localement compact. On appelle groupe dual de G , noté $\widehat{G}$ le groupe des caractères de G , ie. des morphismes de G vers le groupe multiplicatif U (il en existe au moins 1, celui qui envoie tout sur 1), muni du produit terme à terme (dont le neutre est le caractère trivial)

Exemple 2. On a déjà montré que les caractères de $\mathbb{R}$ sont les $x \mapsto e^{itx}$. $\widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$. De même, les caractères de $\mathbb{R}^n$ sont les produits tensoriels de caractères de $\mathbb{R}$ et on a encore $\widehat{\mathbb{R}^n} \simeq \mathbb{R}^n$. Enfin, si l'on considère le cercle unité (ie le tore), ses caractères sont les $z = e^{it} \mapsto e^{imt}$ avec m entier. Donc $\widehat{T} \simeq \mathbb{Z}$. Enfin, on considère le groupe U_n ; Ses caractères sont les $e^{2i\pi kt/n} \mapsto e^{2i\pi mkt/n}$ avec m entier compris entre 0 et $n - 1$, donc $\widehat{U}_n \simeq U_n$.

Définition 4. On note $M_1(G)$ l'espace de Banach des mesures de Radon signées sur G de masse finie. On appelle transformée de Fourier de la mesure μ l'application $\xi \in \widehat{G} \mapsto \int_G \xi(g) d\mu$.

Exemple 3. sur les réels on prend la mesure de Lebesgue et on considère une application f intégrable. Alors si l'on considère la mesure signée définie par la fonction f , elle est bien de masse finie et on peut s'intéresser à sa transformée de Fourier. C'est la transformée de Fourier au sens usuel.

Exemple 4. Sur le tore on prend la mesure de Lebesgue λ , et on considère une application f intégrable. Alors . Alors la transformée de Fourier est juste $F(\xi) = \int_T \xi(e^{it}) f(t) d\lambda(t)$. Mais on identifie le groupe dual à $\mathbb{Z}$ dont on obtient $F(n) = \int_T e^{int} f(t) d\lambda(t)$. Ce sont les coefficients de Fourier au sens usuel.

Exemple 5. Sur l'ensemble U_n on considère la mesure de comptage non renormalisée, et de même une application f sur U_n . Alors la transformée de Fourier est $F(\xi) = \sum \xi(e^{2ik\pi/n}) f(e^{2ik\pi/n})$, et donc compte tenu de l'isomorphisme précédent on obtient $F(l) = \sum (e^{2ik\pi l/n}) f(e^{2ik\pi/n})$.

Intêret de tout cela?

Théorème 4. On a dans les trois cas précédent, à savoir le tore, les réels, et les ensembles finis, une formule d'inversion qui permet de faire la synthèse spectrale de l'application f considérée.

1. Si $f \in L_1(R)$ et $\widehat{f} \in L_1$ alors $\widehat{\widehat{f}} = 2\pi f$
2. Si $f \in L_1(T)$ alors $\widehat{\widehat{f}} = 2\pi f$.
3. Si f est quelconque sur $[1, n]$ alors $\widehat{\widehat{f}} = Nf$.

3.2 Transformée de Fourier discrète

Définition 5. On considère un signal s dont on se donne un échantillon de N valeurs. On pose la transformée de Fourier discrète $S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}$ pour $0 \leq k < N$. La transformée de Fourier inverse est donnée par la formule $\widehat{s}(n) = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \cdot e^{-2i\pi n \frac{k}{N}}$

Remarque 4. Avec le formalisme précédent, la transformée de Fourier discrète de notre signal, c'est juste la transformée de Fourier de la mesure de comptage sur $[1, n]$ mais pondérée par les valeurs $s(k)$ comme précédemment.

Dans ce cas, on a bien comme annoncé

Théorème 5. $\widehat{\widehat{s}}(n) = s(n)$

3.3 Application en EDP

Résolution de l'équation des ondes périodiques de manière approchée.

Définition 6. Equation des ondes périodiques: $u_{tt} - u_{xx} = 0$ pour $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$, u L -périodique et $u(x, 0) = v^0(x)$ et $u_t(x, 0) = v^1(x)$.

On admet que sous certaines conditions on a une unique solution à ce problème. Plutôt que de faire un schéma aux différences finies classiques pour calculer de manière approchée l'équation de la chaleur, on applique à bon escient les petits résultats suivantes.

Proposition 13. On considère une fonction f qu'on échantillonne en N (avec N une puissance de 2) points régulièrement espacés sur $[0, L]$. On note v_j les valeurs aux points d'interpolation. Alors si l'on appelle P le polynôme symétrique qui interpole f en ces points, ie $P(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} c_k^n e^{2ik\pi x/L}$, alors les coefficients c_k^n jouissent des propriétés suivantes: $c_k^n = \widehat{v}_k/N$ pour $k \leq 0$, et $c_{k-N}^n = \widehat{v}_k/N$ pour ceux négatifs.

Proposition 14. Si l'on applique la formule des trapèzes composite à l'ordre N pour approximer les coefficients de Fourier de f , on aboutit aux coefficients de la TFD.

Ceci suggère que l'on peut bien approximer les solutions de l'équation de la chaleur en procédant de la manière suivante. On échantillonne v^0 et v^1 , on calcule les coefficients de la tfd correspondant et on cherche la solution de notre système des ondes sous la forme $u(x, t) = 1/N \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \widehat{u}_k(t) e^{2ik\pi x/L}$. Les coefficients $\widehat{u}_k(t)$ vérifiant alors une équation différentielle ordinaire à savoir $\widehat{u}_k'' - 4\pi^2 k^2/L \widehat{u}_k = 0$ avec comme conditions initiales $\widehat{u}_k(0) = \widehat{v}_k^0$ pour $k > 0$, $\widehat{u}_{k-N}(0) = \widehat{v}_k^0$ pour k positif par trop grand, et de même pour $\widehat{u}_k'(0)$. On résoud de manière explicite cette EDO, et ceci nous donne u que l'on calcule donc en effectuant une transformée de Fourier inverse.

3.4 Application en traitement d'images

Regardons ce qui se passe quand on sous-échantillonne un signal.

Théorème 6. On considère une fonction périodique $u(x) = \sum_{\mathbb{Z}} c_n(u) e^{2in\pi x/a}$, avec les coefficients de Fourier qui CVA. Alors les coefficients du polynôme trigonométrique qui interpole u est la N -périodisée de la suite des coefficients de Fourier de u : $\widehat{u}_n = \sum_{q \in \mathbb{Z}} c_{n+qN}(u)$ pour $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$.

Définition 7. On considère un signal échantillonné u_k . Un signal sous-échantillonné à l'ordre p est la donnée des u_{kp}

Corollaire 1. *Si l'on considère un signal sous-echelonné à l'ordre 2, la formule précédente donne $\hat{v}_n = \hat{u}_n + u_{n-N/2} + \hat{u}_{n+N/2}$.*

Ceci illustre le phénomène de repliement du spectre : on superpose notre spectre avec le spectre du signal dont le spectre est décalé de $N/2$. Le spectre du signal sous-echantillonné contient donc des informations parasites qui n'ont rien à voir avec le signal lui-même. En traitement d'image, on obtient ce qu'on appelle un effet de moiré: apparitions de taches et de filaments parasites sur l'image, ainsi que non-conservation des motifs réguliers. Ceci apparait dans de nombreux DVD commerciaux. Pour éviter ceci, une technique possible: avant d'échantillonner notre signal, on tronque les hautes fréquences.