

114: Anneau des séries formelles. Applications.

Pierre Lissy

May 6, 2010

1 Anneau des séries formelles

1.1 Séries formelles

Définition 1. Toute suite (a_n) d'éléments d'un anneau A est appelée anneau des séries formelles sur A à une indéterminée. Notation $\sum a_n X^n$. L'ensemble des séries formelles est noté $A[[X]]$.

Remarque 1. Notamment un polynôme est une série formelle.

Proposition 1. On a une injection de A dans $A[[X]] : a \mapsto (a, 0, 0, \dots)$.

Définition 2. Valuation d'une série formelle: $v(S) = \inf \{i | a_i \neq 0\}$, $+\infty$ sinon.

1.2 Structure d'anneau

Définition 3. Produit de convolution de deux séries formelles (a_i) et (b_i) : la série formelle dont le coefficient i est $\sum_{k=0}^i a_k b_{i-k}$.

Théorème 1. $(A[[X]], +, *)$ est un anneau commutatif.

Proposition 2. $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$, avec égalité si elles ne sont pas de même valuation. $v(x * y) \geq v(a) + (b)$ avec égalité si A est intègre.

Corollaire 1. A intègre implique $A[[X]]$ intègre.

Proposition 3. Si $v(x) \geq v(y)$, alors il existe u tel que $x = uy$.

Remarque 2. Si K est un corps on munit très facilement $K[[X]]$ d'une structure de K -algèbre commutative.

Proposition 4. La série formelle est inversible ssi $a_0 \neq 0$. Donc l'ensemble des unités de $A[[X]]$ est l'ensemble des séries formelles de valuation nulle.

Proposition 5. Les idéaux de $K[[X]]$ sont les X^i .

Corollaire 2. $K[[X]]$ est un anneau principal.

Remarque 3. On rappelle que si A est un anneau qui n'est pas un corps alors $A[X]$ n'est pas principal, donc $A[[X]]$ ne peut pas du tout être principal.

En fait, on arrive pas à transférer beaucoup de structures sur l'anneau des séries formelles.

Remarque 4 (Gauss). Si A est factoriel alors $A[[X]]$ n'est pas factoriel en général. (on rappelle que c'est vrai pour un nombre fini d'indéterminées)

Remarque 5. $A[[X]]$ n'est pas non plus noethérien en général même si A est noethérien (on rappelle que c'est vrai avec un nombre fini d'indéterminées)

1.3 Distance ultra-métrique

Définition 4. On définit $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $e^{-v(x-y)}$ sinon.

Proposition 6. On $d(S, T) \geq 0$, $d(S, T) = 0 \Leftrightarrow S = T$, on a $D(S, T) = D(T, S)$, $D(R, T) \leq \sup(D(R, S), D(S, T)) \leq D(R, S) + D(S, T)$.

Corollaire 3. d est une distance.

Théorème 2. $K[[x]]$ muni de cette distance est un espace métrique complet.

Remarque 6. $K[x]$ n'est pas complet pour cette distance.

Proposition 7. $K[x]$ est dense dans $K[[x]]$ pour d . $K[[x]]$ est donc le complété de $(K[x], d)$. En fait, le polynôme tronqué $(a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ tend vers la série formelle.

Proposition 8. Pour qu'une série de terme général $S_i = \sum a_{n,i} X^n$ converge, il faut et il suffit que pour tout n , l'ensemble des $a_{n,i}$ est fini. Alors la limite est $\sum S_i = \sum_n \sum_i a_{n,i} X^n$.

Corollaire 4. La série est cv ssi elle est absolument cv ssi elle est commutativement convergente.

Corollaire 5. Une série de séries formelles est convergente ssi le terme général tend vers 0.

Proposition 9. Si la série des S_i converge, alors $S * (\sum S_i)$ aussi et converge vers la limite évidente. Idem multiplication par un scalaire

2 Manipulation sur les séries formelles

2.1 Composition

Définition 5. On considère S et T deux séries formelles de coefficients s_i et t_i , telle que $t_0 = 0$. On appelle $t_{n,j}$ le coefficient de X^n dans la série formelle T^j .

Proposition 10. La série formelle $\sum s_i T^i$ converge vers une série appelée série composée et notée $S \circ T$.

Remarque 7. $S \circ T = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k a_i b_{k,i} X^k$ (avec $b_{0,0} = 1$ et $b_{k,0} = 0$). Si $T = 0$ alors $S \circ T = a_0$, si $S = X^n$ alors $S \circ T = T^n$. Si $T = X$ alors $S \circ T = S$, si $S = 1$, alors $S \circ T = 1$

Proposition 11. Distributivité par rapport à l'addition. $(\sum_i S_i) \circ T = \sum_i (S_i \circ T)$. $(S * T) \circ U = (S \circ U) * (T \circ U)$

Proposition 12. L'ensemble des séries formelles de valuation 1 muni de la composition forme un groupe d'éléments neutre X . L'inverse est appelée série réciproque.

2.2 Dérivation

Définition 6. $S = \sum a_n X^n$. La série dérivée est la série formelle $S' = \sum (n+1)a_{n+1} X^n$.

Proposition 13. L'application $s \mapsto s'$ est continue pour la distance d .

Proposition 14. $(ST)' = S'T + TS'$, $(S \circ T)' = T'(S' \circ T)$, $S^{n'} = nS' * S^{n-1}$

Exemple 1. $(1 - X)^{-1'} = (1 - x)^{-2}$

2.3 Séries formelles classiques

Définition 7. $\exp(X) = \sum X^n / n!$. On en déduit $(1 + X)^\alpha$.

Définition 8. $\log(1 + x) = \sum (-1)^{n-1} X^n / n$.

Proposition 15. $\exp((a+b)X) = \exp(aX)\exp(bX)$, $\exp(aX)' = a\exp(aX)$, $\log(1 + X)' = (1 + X)^{-1}$. $\exp(\log(1 + X)) = 1 + X$ et $\log(1 + \exp(X) - 1) = X$.

Proposition 16. $(1 + X)^\alpha = \sum C_\alpha^n X^n$ avec $C_\alpha^n = (\alpha) \dots (\alpha - k)/k!$.

L'intérêt énorme de ceci est que l'on voit que les coefficients de la série formelle composée ne s'obtiennent qu'à partir de calculs formels.

Application 1. On peut montrer que $\exp(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ très facilement en utilisant la théorie des séries formelles.

Définition 9. *Séries de Bernoulli:* $X(\exp(zX) - 1)^{-1} = \sum B_n(z)/n! X^n$. les B_n sont des polynômes en z appelés polynômes de Bernoulli.

Proposition 17. $B_k(X) = N^{k-1} \sum_{a=0}^{N-1} B_k((X+a)/N)$. $B_k(X) = X^k - 1/2.k.X^{k-1} + \text{termes de degré inférieur}$.

3 Applications

3.1 Utilisation des séries génératrices

Définition 10. On considère une suite de cardinaux A_n qu'on aimerait bien calculer; On lui associe deux séries formelles suivantes appelées série entière génératrice et série exponentielle génératrice : $\sum_{n=0}^{\infty} A_n X^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} A_n/n! X^n$

Application 2. Retour sur les dérangements. Ils vérifient $\sum C_n^k D_k = n!$. On considère la série génératrice $\sum D_k/k! X^k$. On montre que son rayon de convergence est plus grand que 1. On montre que la série génératrice vaut $e^{-z}/(1-z)$ et on en déduit que D_k est la partie entière de $k!/e + 1/2$, et donc qu'asymptotiquement D_k est équivalent à $k!/e$.

Application 3. Nombre de Bell B_n = nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Ils vérifient $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k$. On considère la série génératrice $\sum b_n/n! X^n$. On montre qu'elle vérifie une équation différentielle du type $T' = e^X T$. On montre à l'aide de ceci que $B_n = \sum_1^n S(n, k)$.

Application 4. Nombre de Catalan: en considérant encore la série génératrice entière ce coup-ci, on obtient que le nombre de produits différents est C_{2n-2}^{n-1}/n .

3.2 Retour à la réalité: les séries entières

Définition 11. On appelle série entière à coefficients dans une k -algèbre normée complète A la substitution de A dans la série formelle $\sum a_n X^n$

Définition-proposition 1. Il existe r tel que $\|A\| < r$ implique la série converge absolument et $\|A\| > r$ implique que $a_n r^n$ n'est pas bornée. r est le rayon de convergence de la série entière.

Proposition 18. $1/r = \limsup |a_n|^{1/n}$.

Théorème 3. On a convergence uniforme sur toute boule incluse dans le cercle de convergence.

Grâce à tout ce qu'on a fait précédemment, on a

Application 5. La composée formelle de deux séries entières de rayon de cv non nulle reste une série entière de rayon non nul et la composition sur ce disque de cv correspond à la vraie composée

Application 6. Dans le cas réel ou complexe, la série entière dérivée est de même rayon de cv et correspond à la vraie dérivée de la série entière. De même avec les dérivées successives

Application 7. Dans le cas d'une série entière telle que a_0 est non nul, alors dans le cas réel ou complexe la série formelle entière définit une série entière de rayon de cv non nulle et l'inverse formel est le vrai inverse.

3.3 Résolution d'équations différentielles

L'idée est la suivante: si l'on considère une équation linéaire scalaire d'ordre n résolue à coefficients polynomiaux, notée $a^{(n)} + l_1 a^{(n-1)} + \dots + l_{n-2} a = 0$, alors on cherche une série formelle vérifiant cette équation différentielle. On obtient une relation de récurrence sur les a_i et on vérifie ensuite qu'on a un rayon de convergence non nulle pour vérifier qu'on a pas fait quelque chose de formel uniquement.

Exemple 2. $t^2 y'' + (a+1)ty' + (t^2 + 1/4)y = 0$. On cherche une solution sous la forme $t^\alpha \varphi(t)$ où φ est une somme de série entière. On montre que les coefficients vérifient la relation $[(\alpha + n)(\alpha + n - 2) + (a+1)(\alpha + n) + 1/4]u_n + u_{n-2} = 0$ qui se résout (si l'on impose $\varphi(0) = 1$) que $u_{2n} = 1/(\prod P(\alpha + 2k))$ avec $P = X(X-1) + (a+1)X + 1/4$ et $u_{2n+1} = 0$. On en déduit le comportement asymptotique en 0^+ .

3.4 Fractions rationnelles et séries formelles

On sait grâce à la théorie des séries formelles qu'on peut développer inverser formellement les fractions rationnelles puis en utilisant la structure d'algèbre, on arrive à obtenir des égalités intéressantes. En effet en utilisant en même temps la décomposition en éléments simples et le développement en série formelle on obtient des choses intéressantes.

Théorème 4. Cf gfgn analyse 2 je crois: dans l'anneau des séries formelles la produit $\prod_{k=1}^n (1-X^k)$ converge quand $n \rightarrow \infty$ vers la série formelle $\sum p(n)X^n$ où $p(n)$ est le nombre de manières de décomposer n en sommes d'entiers.

Application 8. Il y a 541 manières de payer 100 euros avec des pièces de 1,2 euros et un billet de 5 euros. Pour ce faire, on applique la méthode suivante décrite au début: On cherche le centième coefficient du développement en série formelle de $1/[(1-X)(1-X^2)(1-X^5)]$, on décompose cette fraction en éléments simples puis on développe chacun des coefficients en série formelle puis on identifie les coefficients pour tomber au résultat.

References

[1]