

119: exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

Pierre Lissy

April 22, 2010

On suppose connues toutes les notions habituelles sur les actions de groupes (orbites, stabilisateur, formule des classes, formule de Burnside) ainsi que sur les groupes topologiques agissant sur un ensemble. Dans la partie 1, on considèrera des matrices à coefficients dans un anneau A supposé principal pour simplifier. Dans les parties 2 et 3 on se placera dans le cadre d'un corps k .

1 Action de Steinitz

1.1 Définitions

Lemme 1. *Les matrices inversibles à coefficients dans un anneau intègre sont les matrices inversibles dans le corps des fractions de cet anneau dont le déterminant est un inversible de A .*

On considère l'action suivante, du groupe produit $GL_p(A) \times GL_q(A)$ sur $M_{p,q}(A)$: $\varphi(P, Q, M) \mapsto PMQ^{-1}$. C'est une action de groupe appelée opération de Steinitz.

Définition 1. *Deux matrices sont dites équivalentes ssi elles sont dans la même orbite pour cette action, ie ssi $\exists(P, Q)$ tels que $B = PAQ^{-1}$.*

1.2 Cas d'un corps

Lemme 2. *Changement de bases: si l'on considère deux k -ev E et F , deux bases B_0 et B'_0 de E ainsi que deux bases B_1 et B'_1 de F . Soient P et Q les matrices de passages correspondantes. Alors Si l'on considère la matrice A d'un endomorphisme f dans les bases B_0 et B_1 , la matrice de f dans les nouvelles bases est $Q^{-1}AP$.*

Corollaire 1. *Toute matrice de rang r est équivalente à la matrice I_r qui vaut l'identité sur la sous-matrice carré d'ordre r en haut à gauche et 0 partout autre part.*

Théorème 1. *Les orbites pour l'action de Steinitz sont exactement les matrices de même rang. Il y a donc un nombre fini d'orbites.*

Corollaire 2.

1.3 Invariants de Smith

En général, dans le cas d'un anneau principal, deux matrices ayant même rang ne sont pas équivalentes.

Exemple 1. *On se place dans $\mathbb{Z}$, qui est lui-même un espace de matrices. Les matrices inversibles sont 1 et -1 . Alors les matrices 1 et 2 ont même rang (à savoir 1), mais elles ne peuvent pas être équivalentes.*

Théorème 2. *Toute matrice à coefficients dans un anneau principal est équivalente à une matrice quasi-diagonale D où les coefficients diagonaux vérifient $d_1 | d_2 \dots | d_n$. De plus, si on considère une autre décomposition sous la même forme (ie D') alors les coefficients d_i et d'_i sont associés. Autrement dit les nombres d_i sont uniques aux inversibles près. Ils sont appelés invariants de Smit hde la matrice.*

Corollaire 3. *Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont les mêmes invariants de Smith.*

Corollaire 4. *Une matrice est inversible ssi ses invariants de Smith sont $(1, 1, \dots, 1)$. Les matrices inversibles forment donc une classe*

En général, on a donc un nombre infini de classes d'équivalence.

1.4 Action des matrices de transvections

En fait, si on se restreint au cas d'un anneau euclidien, on peut de manière effective trouver les invariants de Smith. En effet, on a la propriété que

Proposition 1. *Si l'on considère le groupe engendré par les matrices de transvections, ie SL , alors l'action restreinte à $SL \times SL$ donne les mêmes orbites que précédemment. On peut grâce à des transvections sur les lignes et les colonnes transformer de manière effective (Gauss) la matrice en celle donnant les invariants de Smith.*

Exemple 2.

2 Action par conjugaison

2.1 Définitions

On considère l'action suivante, du groupe produit $GL_p(A)$ sur $M_p(A)$: $\varphi : (P, M) \mapsto PMP^{-1}$. C'est une action de groupe.

Définition 2. *Deux matrices sont dites semblables ssi elles sont dans la même orbite pour cette action, ie ssi $\exists P$ tel que $B = PAP^{-1}$.*

Remarque 1. *Deux matrices semblables ont même déterminant, même trace, même rang, même polynôme caractéristique, même valeurs propres.*

Il est remarquable que dans le cas $p = 2$, on ait le résultat suivant:

Théorème 3. *Deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ sont semblables ssi elles ont même déterminant et même trace, ce qui équivaut à dire qu'elles ont même polynôme caractéristique.*

Faux pour $n \leq 3$.

Exemple 3.

Définition 3. *Une matrice est triangulable ssi il existe une matrice triangulaire sup ds sa classe de similitude. Diagonalisable ssi il existe une matrice diagonale ds ca classe de similitude.*

2.2 Réduction des endomorphismes

Théorème 4. *une matrice est diagonalisable ssi son poly minimal est scindé simple ssi la dim du sepropre est égal à la multiplicité de la valeur propre ssi E est somme des sous-espaces propres ssi elle admet un annulateur scindé simple.*

Théorème 5. *Une matrice est trigonalisable ssi son poly min est scindé ssi son poly carac est scindé ssi il existe un annulateur scindé*

Définition 4. *Matrice de Jordan*

Lemme 3. *Dans un corps algébriquement clos, toute matrice est semblable à une réduite de Jordan. On a même unicité à permutation des indices près.*

Théorème 6. *Soit K un corps algébriquement clos. Deux matrices sont semblables ssi elles ont même réduite de Jordan.*

Corollaire 5. *une fois que l'on s'est donné des valeurs propres, il n'y a plus qu'un nombre fini de classes de similitude de matrices ayant ses valeurs propres. Autrement dit, l'ensemble des matrices ayant le même polynôme caractéristique est une réunion d'un nombre fini d'orbites pour l'action de conjugaison.*

2.3 Invariants de similitude

Définition 5. *Matrice compagnon d'un polynôme.*

Théorème 7. *Toute matrice est semblable*

2.4 Commutant

Définition 6. *Le commutant d'une matrice est le stabilisateur pour l'action de conjugaison de cette matrice. c'est donc aussi l'ensemble des matrices qui commutent avec A .*

Proposition 2. *Le commutant est une sous k -algèbre NON COMMUTATIVE en général de $L(E)$. On considère des espaces u -stables en somme directe. v commute avec u ssi les induits commutent entre eux.*

Exemple 4. *à trouver*

Remarque 2. *Le commutant contient les polynômes d'endomorphismes.*

Proposition 3. *[1] La dimension du commutant est toujours supérieure à n .*

Ceci assure qu'en général l'inclusion est stricte, sauf éventuellement si le polynôme minimal est de degré n . Il est remarquable que la réciproque est vraie. Du coup on a

Théorème 8. $\dim K[u] = n \leftrightarrow \dim C(u) = n \leftrightarrow \deg(\mu_u) = n \leftrightarrow \mu_u = \chi_u \leftrightarrow C(A) = K[u] \leftrightarrow u$ cyclique $\Leftrightarrow$ On peut écrire u dans une base comem une matrice compagnon.

Corollaire 6. *On suppose u diago. $K[u] = C(u)$ ssi toutes les valeurs propres de u sont simples.*

Proposition 4. $\dim(C(u)) = \sum_1^n (2s - 2i + 1) \deg(P_i) = \sum_{i,h} \min(\dim(P_i), \dim(P_j))$ où les P_i sont les invariants de similitude.

Corollaire 7. *Théorème du bicommutant (trouver une référence): $K[u] = C(C(u))$*

3 Action par congruence

3.1 Définition

Remarque 3. *Par définition, le stabilisateur de l'identité est l'ensemble des matrices telles que $P^{-1} = {}^t P$. C'est donc les matrices orthogonales. Si l'on considère une matrice A symétrique quelconque, le stabilisateur est l'ensemble des matrices orthogonales pour la forme quadratique associée à la matrice A quelconque.*

3.2 Les cas réels et complexes

3.3 Lien avec la classification des formes quadratiques

3.4 Stabilisateur de l'identité

4 Les décompositions classiques et le lien avec les actions de groupe

4.1 Décomposition polaire

4.2 Décomposition d'iwasawa

4.3

References

[1] fn algèbre je sais pas cb