

120: Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications

Pierre Lissy

March 4, 2010

Dans toute la suite, on considère un espace vectoriel E sur un corps commutatif K . On considère connues les définitions et propriétés habituelles des ev, des famille libres, génératrices, de bases, d'endomorphismes (toutes les propriétés antérieures dans un cours sur la dimension)

1 Dimension d'un espace vectoriel

1.1 Théorème de la dimension

Dixmier.

Définition 1. *Un espace vectoriel est dit de dimension finie ssi il existe une famille génératrice de E qui soit de cardinal fini. Dans le cas contraire, il est dit de dimension infinie*

Remarque 1. *Ceci implique notamment que le cardinal de toute famille libre est fini.*

Exemple 1. $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie (on exhibe facilement une famille génératrice). Par contre $K[X]$ est de dimension infinie (rem précédente)

Lemme 1. *Soit E un espace vectoriel, $A \subset A'$ deux sous-ensembles de E . On suppose que A' est génératrice et que A est libre. Alors il existe une base de E notée B telle que $A \subset B \subset A'$.*

Corollaire 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et on considère une famille génératrice. On peut en extraire une base. Inversément si on considère une famille libre d'une ev de dimension finie on peut le compléter en une base.*

Lemme 2. *On considère p vecteurs, et on prend $p + 1$ vecteurs cl de ces vecteurs. Alors ces vecteurs sont liés*

Théorème 1. *Invariance du cardinal d'une base: dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les bases ont le même cardinal. Ce cardinal sera appelé dimension de l'espace.*

Proposition 1. *Tous les espaces de dimension n sont isomorphes entre eux et isomorphes à K^n .*

Proposition 2. *Une famille libre est de card plus petit que n . Une famille génératrice est de cardinal plus grand que n . Une famille libre de card n est une base, une famille gén de card n est une base.*

Proposition 3. *Soit E un L – ev de dimension finie n avec $K \subset L$ et l'extension est finie de degré p . Alors E est un K – ev de dimension finie $n * p$.*

Exemple 2. 1. K^n est de dimension finie n

2. $K_n[X]$ de dimension finie $n + 1$

3. Les suites récurrentes vérifiant une relation à l'ordre n forment un ev de dimension n

4. Les solutions d'une équation différentielle linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ forment un ev de dimension n

1.2 Sous-espaces d'un ev de dim finie

Théorème 2. Soit F un sous-espace vectoriel de E ev de dim finie. Alors F est un ev de dimension finie inférieur à celle de E , et égale à celle de E ssi c'est E lui-même.

Corollaire 2. Tout sev d'une ev de dim finie admet un supplémentaire.

Remarque 2. C'est ce théorème qui est la base d'énormément de raisonnements par récurrence; citons-en deux.

Application 1. [1] Soit A et B deux sev de E de même dim. Ils ont un sev supplémentaire commun

Application 2. Un endomorphisme de trace nulle est tel qu'on peut trouver une base telle que la composante de $f(e_i)$ selon e_i soit nulle. Idem matrices

Application 3. Les endomorphismes d'un ev sur un corps algébriquement clos sont trigonalisables.

Proposition 4. Si E et F sont en somme directe alors somme est de dimension finie égale à $\dim(E) + \dim(F)$. Si la somme est pas directe on a qd même un résultat: $\dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$. Des sev sont en somme directe ssi la somme des dimensions est égale à la dimension de la somme.

1.3 Dimension de certains espaces importants

Proposition 5. 1. Si E et F sont de dimension finie, alors $L(E, F)$ est de dimension finie égale à $(\dim E)(\dim F)$. Notamment le dual est de même dimension.

2. Si E et F sont de dimension finie, le produit et de dim finie qui est la somme

3. Les matrices (n, m) à coeff dans K sont de dimension nm

4. Les matrices symétriques sont de coeff $n(n+1)/2$, celles antisym $n(n-1)/2$

5. Les formes quadratiques sont de dim $n(n+1)/2$

6. les formes bilinéaires sur $E \times F$ sont de dimension $(\dim E)(\dim F)$.

7. La dimension de l'espace quotient E/F est la différence $\dim(E) - \dim(F)$

2 Rang d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice...

2.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 2. Le rang d'une famille de vecteurs est le rang de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs.

Proposition 6. On considère $(e_1, \dots, e_p)$. Elle est libre ssi son rang est p . Elle est génératrice ssi son rang est n .

Voici une propriété qui sera utile pour déterminer le rang d'une matrice

Proposition 7. Le rang d'une famille de vecteurs ne change pas lorsqu'on multiplie un de ses vecteurs par un scalaire non nul, lorsqu'on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs, ou lorsqu'on échange deux vecteurs.

2.2 Rang d'un endomorphisme

Définition 3. Le rang d'un endomorphisme est le rang de la famille des images d'une base. C'est aussi la dimension de l'image de u

Théorème 3 (th du rang). Tout supplémentaire de $\text{Ker } f$ est isomorphe à l'image de f . Donc $\dim(E) = (\dim \text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$

Théorème 4. Si E et F ont même dimension, f injective ssi f surjective ssi f bijective ssi $\text{rg}(f) = n$ ssi inversible à droite ssi inversible à gauche.

Proposition 8. Soit U un sev de E , on a $\dim U = \dim(\text{Ker}(f)) \cap \text{rg}(f|_U)$.

Proposition 9. $[2] |\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$. La deuxième inégalité est une égalité ssi les images sont disjointes et les noyaux ont pour somme E tout entier.

Proposition 10. [2] On a aussi que le rang d'une composée $g \circ f \leq \text{rg}(g)$ et $\text{rg}(f)$. Cas d'égalité : dans le premier cas ssi F est somme de $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(f)$, dans le deuxième ssi $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ est réduit à 0. On a aussi que $\text{rg}(a) + \text{rg}(b) \leq \text{rg}(ab) + n$.

Proposition 11. [2] $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(g)$ ssi il existe un automorphisme u et une application linéaire v tels que $uf = gv$

3 Rang d'une matrice

Définition-proposition 1. Le rang d'une matrice est de manière équivalente: soit le rang des vecteurs pris en tant que colonnes, soit ceux pris en tant que lignes, soit le rang de l'endomorphisme canoniquement associé.

Théorème 5. Toute matrice de rang r est équivalente à la matrice I_r . Donc les classes d'équivalences de matrices sont les matrices de même rang.

Corollaire 3. Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée. Donc le rang d'un endomorphisme est aussi égal au rang de l'endomorphisme transposé

Proposition 12. Le rang de A est la plus grande matrice carré que l'on puisse extraire qui soit inversible, ie qui soit de déterminant non nul.

Corollaire 4. Le rang est une notion qui est invariante par extension de corps.

Pour déterminer pratiquement le rang d'une matrice (et donc d'une application linéaire), on peut appliquer le théorème énoncé précédemment sur le rang d'une famille de vecteurs (pivot de Gauss).

Exemple 3.

4 Applications en théorie des corps

4.1 Degré d'une extension de corps

Définition-proposition 2. Soit L une extension d'un corps K . Alors L est naturellement muni d'une structure de K -ev. On dit que cette extension est finie ssi la dimension de L est finie. Dimension de L sur K , noté $[L:K]$ est appelé degré de l'extension.

La première conséquence est la suivante.

Proposition 13. Soit k un corps fini. Il a un sous-corps premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Alors nécessairement $|k| = p^n$.

Théorème 6 (base télescopique). $k \subset K \subset L$. Alors $[K:k][L:K] = [L:k]$, de plus il suffit de multiplier les bases.

4.2 Extension monogène

Définition 4. L'extension L est dit monogène ssi $L = K(\alpha)$. α est dit algébrique ssi le morphisme $T \mapsto P(\alpha)$ est non injectif, transcendant dans le cas contraire. Si il est algébrique, on appelle polynôme minimal μ_α le polynôme unitaire qui engendre l'idéal qu'est le noyau.

Théorème 7. On a les équivalences suivantes.

1. α algébrique
2. $K[\alpha] = K(\alpha)$
3. $\dim_K K[\alpha] < \infty$

Plus précisément dans ce cas, le polynôme P est irréductible sur $K[X]$ et la dimension de l'extension est exactement le degré du polynôme minimal.

Exemple 4. $\sqrt{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$, de polynôme minimal $X^2 - 2$. Donc l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est de dimension 2.

Exemple 5. [4] Polynôme minimal de $^3\sqrt{7} + \sqrt{2}$: $X^6 - 6X^4 - 14X^3 + 12X^2 - 84X + 41$

4.3 Construction à la règle et au compas

Définition 5. Soit A un sous-ensemble du plan. On dit qu'un point M est constructible en un pas à partir de A ssi M est point d'intersection d'éléments du type suivant:

1. Droites affines passant par deux points de A .
2. Cercles centrés en un point de A et passant par un autre point de A .

Définition 6. . Un point est dit constructible ssi il existe une suite $A_1, \dots, A_n$ d'ensembles tels que

1. $A_0 = (0, 0), (1, 0)$
2. $M \in A_n$
3. $A_i = A_{i-1} \cup M_i$ où M_i est constructible en un pas à partir de A_{i-1} .

Un réel x est dit constructible ssi $(x, 0)$ l'est.

Théorème 8. Une condition nécessaire pour qu'un réel soit constructible est qu'il soit algébrique sur $\mathbb{Q}$ est que la dimension de l'extension soit une puissance de 2 (ie le degré du poly min est une puissance de 2)

Application 4. Impossibilité de la duplication du cube. Impossibilité de la trissection de l'angle. Impossibilité de la quadrature du cercle.

5 Utilisation en calcul différentiel

5.1 Immersion, submersion, rang constant

Théorème 9 (Submersion). [7] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 . On suppose qu'en un point de a de U la différentielle $Df(a)$ est une application linéaire surjective. Alors on peut localement compléter les fonctions $f_1, \dots, f_p$ en un difféomorphisme sur un voisinage V . Dans ce nouveau système f est la projection, f est une application ouverte, et il n'existe aucune application φ non identiquement nulle telle que $\varphi(f_1(), \dots, f_p(x)) = 0$ sur V . De plus f admet un inverse à droite C^1 .

Remarque 3. Ce théorème généralise le théorème de la base incomplète.

Théorème 10 (Immersion). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 . On suppose la différentielle injective en un point a . On peut quitte à permuter les coordonnées transformer après un changement de coordonnées f en l'injection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$. f a un inverse à gauche C^1 .

Remarque 4. Ce théorème généralise le théorème qui dit qu'on peut extraire une base d'une famille libre.

Théorème 11 (rang constant). On suppose le rang constant égal à r sur l'ouvert. Alors on peut changer de coordonnées au départ et à l'arrivée pour obtenir la projection sur les r premières coordonnées.

Remarque 5. Ce théorème généralise le théorème sur les matrices équivalentes qui dit qu'on peut se ramener à I_r .

5.2 Sous-variétés

Définition 7. Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in V$. et d un entier naturel. On dit que V est lisse en a , de dimension d , s'il existe un difféomorphisme F de classe C^1 d'un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, qui transforme V en un sous-espace vectoriel de dimension d , ie. $F(U \cap V) = V' \cap F(U)$ avec $V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. On dit que V est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ si V est lisse de dimension d en chacun de ses points.

Remarque 6. On pourrait étendre aux sous-variétés de classe C^k ou C^∞ .

Théorème 12. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \dots, f_p$ de U dans $\mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 . Soit V l'ensemble des points x tels que $x \in U$ et $f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_p(x_1, \dots, x_n) = 0$. On suppose les différentielles indépendantes. Alors V est une sous-variété de dimension $n-p$ de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 13. 1. V lisse en a , de dimension d

2. Pour tout a , il existe un voisinage de a et une submersion g à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap V = g^{-1}(0)$;
3. Pour tout a , il existe un ouvert contenant A et autre ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et une app C^∞ telle qu'après permutation des coordonnées $U \cap V$ soit le graphe.

Théorème 14. Si V est lisse en a , de dimension d , ses vecteurs tangents en a forment un sous-espace vectoriel de dimension d , appelé espace vectoriel tangent en a à V . L'espace affine est le même mais passant par a .

Théorème 15. Dans une sous-variété définie implicitement, l'espace vectoriel tangent est défini par les équations $\sum \partial_j f_i(a) v_j = 0$ pour tout i entre 1 et p .

Exemple 6. [6]

1. $SL_n(\mathbb{R})$: espace tangent en Id est les matrices de traces nulles, variété de dimension $n^2 - 1$
2. $SL_n(\mathbb{C})$: espace tangent en Id est les matrices de traces nulles, variété de dimension $2(n^2 - 1)$
3. $O_n, SO_n(\mathbb{R})$: espace tangent en Id est les matrices telles que ${}^t M = -M$, variété de dimension $n(n-1)/2$
4. $U_n(\mathbb{C})$: espace tangent en Id est les matrices telles que ${}^t \bar{M} = -M$, variété de dimension n^2

References

- [1] Gourdon algèbre
- [2] fgn algèbre 1
- [3] Lelong-Ferrand Arnaudiès Algèbre

- [4] Ortisz
- [5] Perrin
- [6] Mnémé-Testard
- [7] Rouvière