

121 : Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.

Pierre Lissy

April 23, 2010

1 Matrices équivalentes

1.1 Définitions

Lemme 1. *Les matrices inversibles à coefficients dans un anneau intègre sont les matrices inversibles dans le corps des fractions de cet anneau dont le déterminant est un inversible de A .*

On considère l'action suivante, du groupe produit $GL_p(A) \times GL_q(A)$ sur $M_{p,q}(A)$: $\varphi(P, Q, M) \mapsto PMQ^{-1}$. C'est une action de groupe appelée opération de Steinitz.

Définition 1. *Deux matrices sont dites équivalentes ssi elles sont dans la même orbite pour cette action, ie ssi $\exists(P, Q)$ tels que $B = PAQ^{-1}$.*

1.2 Cas d'un corps

Lemme 2. *Changement de bases: si l'on considère deux k -ev E et F , deux bases B_0 et B'_0 de E ainsi que deux bases B_1 et B'_1 de F . Soient P et Q les matrices de passages correspondantes. Alors Si l'on considère la matrice A d'un endomorphisme f dans les bases B_0 et B_1 , la matrice de f dans les nouvelles bases est $Q^{-1}AP$.*

Corollaire 1. *Toute matrice de rang r est équivalente à la matrice I_r qui vaut l'identité sur la sous-matrice carré d'ordre r en haut à gauche et 0 partout autre part.*

Application 1. $rg({}^t A) = rg(A)$

Théorème 1. *Les orbites pour l'action de Steinitz sont exactement les matrices de même rang. Il y a donc un nombre fini d'orbites.*

Corollaire 2.

1.3 Invariants de Smith

En général, dans le cas d'un anneau principal, deux matrices ayant même rang ne sont pas équivalentes.

Exemple 1. *On se place dans $\mathbb{Z}$, qui est lui-même un espace de matrices. Les matrices inversibles sont 1 et -1 . Alors les matrices 1 et 2 ont même rang (à savoir 1), mais elles ne peuvent pas être équivalentes.*

Théorème 2. *Toute matrice à coefficients dans un anneau principal est équivalente à une matrice quasi-diagonale D où les coefficients diagonaux vérifient $d_1 | d_2 \dots | d_n$. De plus, si on considère une autre décomposition sous la même forme (ie D') alors les coefficients d_i et d'_i sont associés. Autrement dit les nombres d_i sont uniques aux inversibles près. Ils sont appelés invariants de Smith de la matrice.*

Corollaire 3. *Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont les mêmes invariants de Smith.*

Corollaire 4. *Une matrice est inversible ssi ses invariants de Smith sont $(1, 1, \dots, 1)$. Les matrices inversibles forment donc une classe*

En général, on a donc un nombre infini de classes d'équivalence.

1.4 Matrices élémentaires, systèmes échelonnés

En fait, si on se restreint au cas d'un anneau euclidien, on peut de manière effective trouver les invariants de Smith. En effet,

Définition 2. *Matrices élémentaires :*

Matrices de transposition: matrice d'une permutation

Matrices de dilatation: $D_i(\lambda)$ matrice diagonale avec que des 1 sauf

Matrices de transvection: $T_{ij}(\lambda) = Id + \lambda$ en position ij .

Théorème 3. *les matrices de dilatation et de transvections engendrent $GL_n(k)$ dans le cas d'un corps. Dans un anneau euclidien, il faut rajouter les matrices de transposition pour que cela devienne vrai.*

Lemme 3. *On sait transformer avec des opérations élémentaires de manière effective une ligne ou une colonne en une ligne ou une colonne ayant des 0 partout sauf le premier coefficient qui est le pgcd des coeff.*

Théorème 4. *Dans le cas d'un anneau euclidien, on peut de manière effective juste avec des opérations élémentaires sur les lignes transformer une matrice M en une matrice échelonnée suivant les lignes (ie la ligne numéro i a strictement moins de 0 que la ligne $(i-1)$, et ceci pour tout i). $LM=E$, où E est échelonnée et L est un produit de matrices élémentaires. De même on peut obtenir avec des opérations élémentaires sur les colonnes une matrice échelonnée suivant les colonnes.*

Corollaire 5. *On peut de manière effective en utilisant une matrice L et une matrice C transformer M en sa matrice des invariants de Smith.*

Application 2. *Ceci fournit un algorithme effectif de calcul du rang ou du déterminant. De plus, on remarque que cet algorithme est en $O(n^3)$ opérations élémentaires, ce qui est bien plus faible que le calcul du déterminant obtenu avec la formule de base (qui donnerait quand même du $O(n!)$...).*

1.5 Résolution de systèmes linéaires

Lemme 4. *Le rang d'une matrice carré ou non est le plus grand entier r tel que l'on peut trouver un mineur de taille r non nul.*

Application 3. *Résolution des systèmes linéaires dans le cas d'un corps: on considère l'équation $Ax = b$. On transforme A en une matrice échelonnée $LAx = Ex = Lb = b'$, E étant échelonnée. Maintenant, de deux choses l'une.*

Soit les conditions de compatibilités ne sont pas vérifiées et pas de solutions

Soit les conditions de compatibilité (ie les $n - r$ coef de b' sont nuls) sont vérifiées. On conclut facilement dans ce cas en voyant qu'en fait les r premières inconnues (où r est le rang de A et donc celui de E , que l'on devine maintenant facilement en utilisant la caractérisation par les mineurs) font office d'inconnues principales: on paramétrise en les dernières inconnues et on se ramène à un système carré: on réécrit $EX = b'$ sous la forme $E'x' = b''$ où x' n'est plus que de taille r , et on a ramené tous les termes en plus dans le terme à droite. On a alors toutes solutions en résolvant ce système.

2 Matrices semblables

2.1 Définitions

On considère l'action suivante, du groupe $GL_p(A)$ sur $M_p(A)$: $\varphi : (P, M) \mapsto PMP^{-1}$. C'est une action de groupe.

Définition 3. *Deux matrices sont dites semblables ssi elles sont dans la même orbite pour cette action, ie ssi $\exists P$ tel que $B = PAP^{-1}$.*

Remarque 1. Deux matrices semblables ont même déterminant, même trace, même rang, même polynôme caractéristique, même valeurs propres.

Réciproque fausse.

Exemple 2.

Par contre, on a le résultat absolument remarquable suivant.

Théorème 5. [?] En dimension 2 et 3, deux matrices sont semblables ssi elles ont même polynôme minimal et même polynôme caractéristique.

Définition 4. Une matrice est triangulable ssi il existe une matrice triangulaire sup ds sa classe de similitude. Diagonalisable ssi il existe une matrice diagonale ds ca classe de similitude.

2.2 Réduction des endomorphismes

Théorème 6. une matrice est diagonalisable ssi son poly minimal est scindé simple ssi la dim du sepropre est égal à la multiplicité de la valeur propre ssi E est somme des sous-espaces propres ssi elle admet un annulateur scindé simple.

Théorème 7. Une matrice est trigonalisable ssi son poly min est scindé ssi son poly carac est scindé ssi il existe un annulateur scindé

Théorème 8. Dans un corps algébriquement clos, on a une décomposition unique sous la forme diagonalisable + nilpotent, et cette décomposition est effective.

La réduction permet par exemple de calculer facilement les puissances et l'exponentielle d'une matrice diagonalisable.

Application 4. Problème 1 du Gourdon page 204

Application 5. exo 4 page 199 du Gourdon

La réduction permet aussi de résoudre des équations matricielles.

Application 6. Résolution de l'équation $\exp A = I_n$ dans $\mathbb{C}$.

Application 7. Résolution de l'équation $A^p = B$ avec B symétrique définie positive et A symétrique.

2.3 Description des classes de similitude

Définition 5. Matrice de Jordan

Lemme 5. Dans un corps algébriquement clos, toute matrice est semblable à une réduite de Jordan. On a même unicité à permutation des indices près.

Théorème 9. Soit K un corps algébriquement clos. Deux matrices sont semblables ssi elles ont même réduite de Jordan.

Application 8. dans $\mathbb{C}$, M et $2M$ sont semblables ssi M nilpotente.

Corollaire 6. une fois que l'on s'est donné des valeurs propres, il n'y a plus qu'un nombre fini de classes de similitude de matrices ayant ses valeurs propres. Autrement dit, l'ensemble des matrices ayant le même polynôme caractéristique est une réunion d'un nombre fini d'orbites pour l'action de conjugaison.

Définition 6. Matrice compagnon d'un polynôme.

Théorème 10. Th de Serre

Corollaire 7. deux matrices sont semblables ssi elles ont les mêmes invariants de similitude.

Les invariants de similitude nous donnent en fait le résultat suivant.

Application 9. Deux matrices à coef dans k semblables dans une extension L sont en fait semblables dans k .

Application 10. Toute matrice est semblable à sa transposée.

Application 11. Comme la décomposition est effective, on obtient une manière effective de calculer le polynôme minimal qui est le premier facteur. De plus le poly caractéristique est le produit des invariants de similitude, et on retrouve C-H.

2.4 Topologie et classes de similitudes

On considère une matrice complexe $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $S(M)$ sa classe de similitude.

Proposition 1. 1. $S(M)$ bornée ssi M scalaire.

2. $S(M)$ fermée ssi M diagonalisable

3. 0 est adhérent à $S(M)$ ssi M nilpotente

Corollaire 8. Dans la décomposition de Dunford, la matrice diagonale D est dans l'adhérence de $S(M)$.

Corollaire 9. Si G est un ouvert contenant les matrices diagonales et stable par similitude alors $G = M_N(\mathbb{C})$.

FGN algèbre 2

Théorème 11. Il n'existe pas de norme sur l'ensemble des matrices qui soit invariante par similitude. Les semi-normes invariantes par similitude sont les $\lambda \text{Tr}(A)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

References

[1]