

123. Déterminant. Exemples et applications.

Pierre Lissy

April 24, 2010

Dans toute la suite sauf exception E désigne un k -ev de dim finie n avec k un corps.

1 formes n -linéaires alternées. Déterminant. Premières propriétés.

1.1 Formes n -linéaires alternées

Définition 1. *Application p -linéaire: linéaire séparément par rapport à chacune de ses variables. Formet un espace vectoriel de dimension n^p*

Définition 2. *Application antisymétrique: pour toute permutation σ , $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$. Application alternée: $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux termes sont égaux. Les applications alternées forment un ev.*

Proposition 1. *Une forme alternée est antisymétrique. Réciproque vrai en caractéristique différente de 2.*

Remarque 1. *Pour que f soit antisymétrique, il suffit d'avoir $x_i = x_{i+1} \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

Proposition 2. *Si une famille est liée alors son image par une app p -linéaire alternée est nulle. On ne change pas la valeur en ajoutant à un vecteur une combinaison linéaire des autres*

1.2 Déterminant

Théorème 1. *L'espace vectoriel des formes n -linéaires alternées sur un ev de dimension n est de dimension 1. Si l'on se donne une base B , il existe une unique fla valant 1 sur cette base, appelé déterminant dans la base B , notée $\det_B$. En outre, si l'on se donne une fla alternée f on a $f(x_1, \dots, x_n) = \det_B(x_1, \dots, x_n) f(e_1, \dots, e_n)$, notamment si on se donne une nouvelle base B' on a $\det_{B'}(x) = \det_B(B') \det_B(x)$, de telle sorte que $\det_B(B') \det_{B'}(b) = 1$. On a en fait, si l'on écrit $x_i = \sum a_{ij} e_j$, que $\det_B(x_i) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$.*

Application 1. *Une famille est liée ssi son det ds toute base est nul ssi son det dans une base est nul*

Théorème 2. *La quantité $\det_B(f(B))$ ne dépend pas de la base B considérée. Cette quantité est appelé déterminant de l'endomorphisme f . En fait, l'application $x \mapsto \det_B(f(x))$ est une forme n -linéaire alternée et on a $\det_B(f(x)) = \det_B(x) \det(f)$.*

Proposition 3. *$\det(fg) = \det(f) \det(g)$, f inversible ssi son déterminant est non nul, ds ce cas $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$. $\det(\text{Id}) = 1$*

Définition 3. *Déterminant d'une matrice = det de l'endomorphisme canoniquement associé, ou alors determinant de ses colonnes ds la base canonique, ou alors ce qui revient au même de ses lignes.*

Proposition 4. 1. $\det(A) = \det({}^t A)$

2. $\det$ dépend linéaire des lignes et des colonnes

3. $\det(\lambda A) \lambda^n \det(A)$
4. Matrice triangulaire : produit des coef diag
5. Triangulaire par blocs : produits des det diagonaux.
6. $\det(f) = \det$ ds sa matrice
7. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

1.3 Déterminants classiques

Théorème 3. *Déterminant de Vandermonde:* $\det(x_i^j) = \prod (x_i - x_j) = \Delta$

Application 2. Si l'on considère un polynôme unitaire P de degré n alors $\det(P(x_i)) = \Delta$

Application 3. Une matrice est nilpotente ssi les traces de toutes ses itérées sont nulles.

Théorème 4 (Déterminant de Cauchy). $\det(1/(a_i + b_j)) = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j)(b_i - b_j) / \prod (a_i + b_j)$.

Application 4. Théorème de Müntz: x^{α_n} dense dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ ssi la série des $1/\alpha_n$ diverge.

Théorème 5 (Déterminant circulant). On définit la matrice circulante C associée à un polynôme P . Alors $\det(C) = \prod_k P(w^k)$ où w est la racine n -ième élémentaire. Notamment si les coefficients sont entier alors $\det(C) \equiv c_1 + \dots + c_n [n]$.

Application 5. On remarque qu'on a pour le passage des coefficients aux valeurs propres une formule de type TFD. Ainsi, par transformée de Fourier inverse on peut calculer les coefficients à partir des valeurs propres. Ainsi, le calcul des solutions d'un système circulant est très rapide: $Cx = b$ équivaut à un produit de convolution discrète $c * x = b$ où c est la première ligne de C , à partir de là par la formule de trivialisatoin du produit de convolution on a $F_n(c * x) = F_n(c)F_n(x) = F_n(b)$ et donc $x = F_n^{-1}(F_n(b)/F_n(c))$ et à l'aide d'un algorithme de transformée de Fourier rapide on fait cela en $O(n \log(n))$ (bien meilleur que du Gauss par exemple qui ids le cas général le fait en $O(n^3)$)

1.4 matrices à coef dans un anneau intègre

On a encore la notion de déterminant (il suffit de plonger l'anneau dans le corps des fractions. On a de plus le théorème suivant (grâce à la comatrice)

Théorème 6. On considère une matrice M à valeurs dans A anneau intègre. Alors M est inversible dans l'anneau $M_n(A)$ ssi elle est inversible en tant que matrice sur le corps de s fractions de A et que son déterminant est un inversible de A .

2 Déterminants mineurs, extraits, utilisation ds la résolution des systèmes linéaires

2.1 Mineurs, comatrice

Définition 4. Mineur numéro i, j = déterminant obtenu en enlevant la i ème ligne et la j ème colonne, noté Δ_{ij} . Comatrice = matrice des $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$. Mineurs principaux = $\Delta_{ii} = \Delta_i$.

Proposition 5. developpement par rapport à une ligne ou une colonne: $\sum_i a_{ij} \Delta_{ij} = \det(A) = \sum_j a_{ij} \Delta_{ij}$.

Proposition 6. $A^t \text{Com}(A) = \det(A) I_n$

Utilisation des mineurs d'ordre inférieur (ie déterminants extraits)

Application 6. le rang d'une matrice est le plus grand rang r tel qu'il existe un déterminant extrait non nul de taille r .

Application 7. Rang de la comatrice: n si inversible, 1 si A de rang $n - 1$, 0 sinon.

Application 8. Une matrice sym est déf pos ssi les déterminants extraits diagonaux sont tous strictement positifs.

2.2 Formules de Cramer. Rouché-Fontené

Théorème 7. *Le système $Ax = b$ avec A inversible se résout de manière formelle sous la forme $x_i = \det(A_1, \dots, a_{i-1}, b, \dots)$.*

Remarque 2. *Evidemment numériquement il est hors de question de se servir de ses formules telles quelles qui ont un coût assez prohibitif: il faut calculer des déterminants ce qui se fait en $n!$.*

Théorème 8. *On considère maintenant un système $Ax = b$ avec A pas forcément carré. Il existe un déterminant carré non nul extrait de A de taille $r = \text{rg}(A)$, appelé déterminant principal (il n'est en général pas unique). Quitte à échanger les inconnues et à échanger les lignes on peut supposer que le mineur diagonal de taille r est non nul. La matrice extraite est notée C . On appelle déterminant caractéristique (ou bordant) un déterminant de la forme $\begin{pmatrix} C & b_i \\ a_{kj} & b_k \end{pmatrix}$ avec $k \geq r$. Le système est compatible ssi tous les bordants sont nuls.*

3 Déterminant en algèbre et analyse

3.1 Différentiabilité du déterminant

Théorème 9. *Le déterminant est une application de classe C^∞ donc la différentielle est $d\det(M)(H) = \text{tr}({}^tMH)$.*

Application 9. $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ ne sont pas connexes.

Application 10. $\chi'_A = \text{Tr}(\text{Com}(XI_n - A))$

Application 11. *Wronskien: $\det(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ où les Y_i sont des bases de solutions d'une équation linéaire; Alors ce wronskien ne s'annule jamais. Si l'on considère une équation scalaire d'ordre 2, on montre grâce au wronskien qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 il y a un unique zéro de y_2 .*

3.2 Polynôme caractéristique

Définition 5. $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Polynôme caract très utile en réduction etc

Proposition 7. *valeurs propres de A = racines de χ_A .*

Théorème 10. *A trigo ssi χ_A scindé. A diago ssi χ_A scindé et la multiplicité des valeurs propres sont égales à la dimension du se propre correspondant.*

Théorème 11 (C-H). $\chi_A(A) = 0$

3.3 Invariants de Smith

Définition 6. *Deux matrices (rectangulaires) à valeurs dans un anneau principal sont dites équivalentes ssi elles sont reliées par la formule $M' = PMQ$ avec P et Q inversibles.*

Théorème 12. *Il existe une unique matrice quasi-diagonale D (aux inversibles près) telle que $d_1 | d_2 \dots d_n$ et M est semblable à D . Les coefficients de D sont appelés les invariants de Smith. Ils vérifient les propriétés suivantes: le produit $d_1 \dots d_k$ est exactement égal au pgcd de tous les déterminants mineurs d'ordre k . Ce point est crucial dans la démonstration.*

Application 12. *Deux matrices sont semblables ssi elles ont les mêmes invariants de Smith (aux inversibles près)*

3.4 Groupe spécial linéaire

Définition 7. Groupe des matrices de déterminant 1, noté SL . $PSL = SL/Z(SL)$

Proposition 8. 1. $GL(E) \simeq SL(E) \rtimes k^*$

2. $SL(E)$ engendré par transvections

3. $GL(E)$ engendré par transvections et dilatations

4. PSL simple sauf pour $n = 2, k = 2$

5. $D(GL(E)) = SL(E)$ sauf pour $n = 2, k = 2$

3.5 Théorème de Frobenius-Zolotarev

Théorème 13. On considère un élément de $Gl_n(\mathbb{F}_p)$, notamment il peut être vu comme une permutation de $\mathbb{F}_p$. Alors $\varepsilon(u) = \det(u)/p$ (symbole de Legendre)

4 Déterminant en géométrie

4.1 Déterminant et volume

Théorème 14. On considère λ la mesure de Lebesgue. Alors si u est un endomorphisme, pour tout borélien A on a $\lambda(u(A)) = |\det(u)|\lambda(A)$.

Application 13. Formule du changement de variable dans une intégrale.

Application 14. On considère un parallépipède P engendré par des vecteurs libres $v_1, \dots, v_n$. Alors $\lambda(P) = |\det(v_i)|$. En outre d'après l'inégalité d'Hadamard, on a $|\det(v_i)| \leq \prod \|v_i\|$ avec "égalité" ssi les v_i forment une famille orthogonale. Ainsi, le volume d'un parallépipède est maximal ssi c'est un parallépipède rectangle.

Théorème 15. On considère un ellipsoïde E défini par une forme quadratique déf pos q dont la forme polaire a pour matrice dans la base canonique A . Alors $\lambda(E) = 1/\sqrt{(\det(A))} 2\pi^{n/2}/\gamma(1/2, n)$

Application 15. Ellipsoïde de John: si l'on se donne un compact de $\mathbb{R}^n$ il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K . On en déduit que tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ sans passer par les mesures de Harr.

4.2 Géométrie plane

Théorème 16. On considère trois points du plan. Ils sont alignés ssi $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ On considère trois droites $x_i x + y_i y + z_i = 0$. Elles sont concourantes ou parallèles ssi $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

4.3 Matrices de Gram et applications

Définition 8. Soit E un espace euclidien (ou hermitien) muni du ps $(\cdot, \cdot)$. Matrice de Gram $G(e_1, \dots, e_n) = (e_i | e_j)$. C'est une matrice symétrique (ou hermitienne). on note g le déterminant de G .

Proposition 9. Dans le cas réel ou complexe, une matrice de Gram est toujours positive (et déf pos ssi les vecteurs sont libres)

Application 16. Distance d'un point à un sev (dans un espace vectoriel réel): $d(x, \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)) = \sqrt{(g(v_1, \dots, v_p, x) / g(v_1, \dots, v_p))}$.

References

[1]