

124: polynômes d'endomorphismes, réduction d'endomorphismes en dimension finie, applications.

Pierre Lissy

January 12, 2010

On suppose connus les concepts de base de l'algèbre linéaire, et la notion de valeur propre/vecteur propre/ sous-espace propre. On considérera dans toute la suite un corps K , E un K -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 L'algèbre $K[u]$

1.1 Définitions

Définition-proposition 1. L'application $\varphi_u : K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ qui à P associe $P(u)$ est un morphisme de K -algèbre. Son image est notée $K[u]$, c'est donc une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. $K[u] = P(u) | P \in K[X]$.

Proposition 1. $K[u]$ est une algèbre commutative.

Remarque 1. $K[u] \equiv K[X]/\text{Ker}(\varphi_u)$ avec $\text{Ker}(\varphi_u)$ non réduit à 0 puisque pour des raisons de dimension le morphisme ne peut être injectif.

1.2 Polynôme minimal, polynômes annulateurs

Définition-proposition 2. $K[X]$ étant principal, l'idéal $\text{Ker}(\varphi_u)$ s'écrit sous la forme $\Pi_u K[X]$ avec Π_u unitaire. Le polynôme Π_u est appelé polynôme minimal de u . L'idéal engendré par le polynôme minimal est appelé l'ensemble des annulateurs de u . C'est en outre un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Corollaire 1. La dimension de $K[u]$ (en temps que K -ev) est égale au degré du polynôme minimal.

Ce polynôme minimal n'est pas forcément irréductible (différent du polynôme minimal d'un élément sur un corps)

Exemple 1. $K = \mathbb{C}$, et p un projecteur différent de l'identité et différent de 0. Alors le polynôme minimal est $X(X-1)$.

Proposition 2. Soit F un sous-espace u -stable. Alors $\Pi_{u_F} | \Pi_u$. Supposons que G est supplémentaire u -stable de F . Alors $\Pi_u = \text{ppcm}(\Pi_{u_F} \Pi_{u_G})$.

Remarque 2. Notion de polynôme minimal invariante par changement de corps (rang + famille libre).

Remarque 3. La fonction $u \mapsto \Pi_u$ n'est pas continue dans le cas réel ou complexe: par exemple on considère une application linéaire de rang 2 qui envoie un vecteur sur lui-même et l'autre sur $(1+1/k)$. Son polynôme minimal est $(X-1)(X-1-1/k)$ qui tend vers $(X-1)^2$ alors que le polynôme minimal de la limite est $X-1$.

Proposition 3. Si f est inversible alors f^{-1} est un polynôme en f .

1.3 Annulateurs et valeurs propres

Proposition 4. Soit P un annulateur de A . Alors si λ est valeur propre de P , on a $P(\lambda) = 0$.

De manière plus générale.

Proposition 5. Soit P un polynôme et $u(x) = \lambda x$. Alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Donc $\text{Sp}(P(A)) \subset P(\text{Sp}(A))$.

Réciproque fausse.

Exemple 2. p projecteur différent de Id et 0 . $X(X-1)(X-2)$ annule p et 2 pas valeur propre.

Proposition 6. λ valeur propre de $u \Leftrightarrow \Pi_u(\lambda) = 0$.

1.4 Lemmes des noyaux et lemmes des images

[2]

Théorème 1.

$$\text{Im}(P(u)) + \text{Im}(Q(u)) = \text{Im}(\text{pgcd}(P, Q)(u))$$

$$\text{Im}(P(u)) \cap \text{Im}(Q(u)) = \text{Im}(\text{ppcm}(P, Q)(u))$$

$$\text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u)) = \text{Im}(\text{ppcm}(P, Q)(u))$$

$$\text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u)) = \text{Im}(\text{pgcd}(P, Q)(u))$$

Notamment si P et Q sont premiers entre eux alors $\text{Ker}(P(f))$ et $\text{Ker}(Q(f))$ sont en somme directe égale à $\text{Ker}(PQ(f))$ et les projecteurs sont des polynômes en f .

Remarque 4. On généralise facilement ces résultats à k polynômes.

1.5 Théorème de Cayley-Hamilton

Définition 1. Polynôme caractéristique d'une matrice $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Proposition 7. Invariant par changement de base et par changement de corps aussi. De plus valeurs propres = racines du polynôme caractéristique.

Définition 2. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme = polynôme caractéristique de cet endomorphisme dans n'importe quelle base.

Proposition 8. On considère un sous-espace stable F . Soit G un supplémentaire stable. Alors $\chi_f = \chi_{f_F} \chi_{f_G}$. Même résultat pour les matrices triangulaires par blocs, diagonales par blocs...

Proposition 9. $u \mapsto \chi_u$ est continue.

Théorème 2 (C-H). $\Pi_u|_{\chi_u}$, ie $\chi_u(u) = 0$.

Corollaire 2. La dimension de $K[u]$ est inférieure à $\dim(E)$.

2 Polynômes d'endomorphismes et réduction des endomorphismes

2.1 Diagonalisabilité

Définition 3. Un endomorphisme est dit diagonalisable ssi il existe une base de vecteurs propres.

Théorème 3. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. u est diagonalisable

2. χ_u est scindé et la multiplicité de chaque racine est égale à la dimension du se propre correspondant.
3. Π_u est scindé simple
4. Il existe un annulateur scindé simple

Théorème 4. Soit K un corps fini à q éléments. Alors u est diagonalisable ssi le polynome $X^q - X$ est un annulateur de f .

2.2 Trigonalisabilité

Définition 4. Un endomorphisme est dit trigonalisable (ou triangulable) ssi il existe un drapeau de sev stables.

Théorème 5. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. u est trigonalisable
2. χ_u est scindé
3. Π_u est scindé
4. Il existe un annulateur scindé

Remarque 5. Notamment dans un corps algébriquement clos tout endomorphisme est trigonalisable.

2.3 Semi-simplicité

Définition 5. Un endomorphisme est dit semi-simple ssi Tout sev u -stable admet un supplémentaire u -stable.

Théorème 6. Un endomorphisme est semi-simple ssi Π_f est produit de polynômes irréductibles unitaires premiers deux à deux.

Corollaire 3. un endomorphisme est diagonalisable ssi il est semi-simple et trigonalisable. Dans un corps algébriquement clos, il est diagonalisable ssi il est semi-simple.

Corollaire 4. Un endomorphisme de K est semi-simple ssi il est diagonalisable dans la clôture algébrique de K . Dans le cas réel il se réduit sous la forme d'une partie diagonale et de blocs 2-2 antisymétriques.

2.4 Lien entre la réduction d'un endomorphisme et la réduction de ses polynômes

Théorème 7. u diagonalisable $\Rightarrow P(u)$ diagonalisable et $Sp(P(u)) = P(Sp(u))$. Idem trigonalisable.

Réciproque fausse. On peut néanmoins énoncer dans le cas diagonalisable:

Théorème 8. u^p diagonalisable et $Ker() = Ker(u^2) \Rightarrow u$ diagonalisable.

Théorème 9. u semi-simple $\Rightarrow P(u)$ semi-simple.

Remarque 6. L'exponentielle étant aussi un polynôme en u , on a le même résultat. Mais on a aussi:

Théorème 10. Dans $\mathbb{C}$, on a $\exp(u)$ diagonalisable $\Rightarrow u$ diagonalisable. Dans $\mathbb{R}$, il faut rajouter en plus que u doit être le carré d'un endomorphisme.

3 Applications

3.1 Décomposition de Dunford généralisée

Lemme 1. *On suppose que A et B matrices à valeurs dans K sont semblables dans L . Alors elles le sont aussi dans K .*

Théorème 11. *Tout endomorphisme u s'écrit comme somme unique d'un endomorphisme semi-simple et d'un endomorphisme nilpotent qui commutent. De plus ces deux endomorphismes sont des polynômes en u . Dans un corps algébriquement clos on remplace semi-simple par diagonalisable.*

3.2 Commutant d'un endomorphisme [2]

Définition 6. *Le commutant d'un endomorphisme est l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec celui-là. Noté Γ_u .*

Proposition 10. *Clairement $K[u] \subset \Gamma_u$.*

Condition pour avoir la réciproque?

Théorème 12. *Si Π_f est de degré n alors on a l'égalité. Réciproque vraie mais utilise invariants de similitudes.*

Proposition 11. *$\dim \Gamma_f$ est la somme des carrés des dimensions des se propres si l'endomorphisme est diagonalisable.*

3.3 Caractérisation des matrices nilpotentes[2]

3.4 Topologie de certains ensembles de matrices

Théorème 13. *$[2]A$ diagonalisable ssi sa classe de similitude est fermée*

Théorème 14.

Developpements: réduction de Dunford dans le cas réel et complexe,

References

- [1] Combes
- [2] Gourdon algèbre
- [3] arithmétique pour amateurs
- [4] Perrin
- [5] Ortiz
- [6] Lang