

125: sous-espaces stables d'un endomorphisme en dimension finie.

Pierre Lissy

March 7, 2010

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1. Soit E un k -ev de dimension finie et $u \in L(E)$. Soit F un sev de E . F est dit u -stable ssi $u(F) \subset F$. On définit alors l'induit de u sur F , noté u_F qui est un endomorphisme de F .

La propriété fondamentale est la suivante:

Proposition 1. Soit u et v deux endomorphismes qui commutent. Alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Remarque 1. Notamment, les sous espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Remarque 2. Une droite est stable s'écrit $\exists \lambda | u(x) = \lambda x$. Dans ce cas, λ est dans le spectre de u .

Théorème 1. Dans un corps algébriquement clos, il existe une droite stable. Dans $\mathbb{R}$, il existe une droite ou un plan stable. On suppose que le corps est tel que les polynômes irréductibles sont tous de degré inférieur ou égal à un certain r . Il existe un sev de dimension inférieure à r stable.

1.2 Induits et polynômes d'endomorphismes

Remarque 3. On considère un sev F de E qui soit u -stable. on a alors F qui est stable par tout les polynômes en u . De plus, $P(u)_F = P(u_F)$. Idem avec toute série entière de u , donc avec $\exp$.

Proposition 2. Soit F un sev u -stable. Alors $\mu_{u_F} | \mu_{u_F}$. Soit G un supplémentaire stable de F (si il en existe). Alors $\mu(u) = \text{ppcm}(\mu_{u_F}, \mu_{u_G})$.

Proposition 3. Soit F un sev u -stable. Alors $\chi_{u_F} | \chi_{u_F}$. Soit G un supplémentaire stable de F (si il en existe). Alors $\chi(u) = \chi_{u_F} \chi_{u|G}$

Remarque 4. En fait dans les cas du polynôme caractéristique, sdi on prend n'importe quel supplémentaire et qu'on restreint l'endomorphisme au départ et à l'arrivée (cf matriciellement) pour obtenir $\bar{u}$, on a l'égalité des polynômes.

Théorème 2. [1] Soit F un sev de E qui soit u -stable. On considère la décomposition en éléments irréductibles du polynôme caractéristique $\chi_u = \prod P_i^{\alpha_i}$. Alors F est égal à la somme des intersections de F avec les noyaux de $P_i^{\alpha_i}$.

1.3 Aspect matriciel

Proposition 4. Un sev est u -stable ssi quand on complete une base de ce sev en une base de E et qu'on s'intéresse à la matrice dans cette base de F , elle est triangulaire par bloc avec le bloc en haut qui est ce se stable.

Proposition 5. Il existe des sev u -stables supplémentaires (en nombre r) ssi il existe une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est diagonale par blocs avec r blocs diagonaux.

1.4 Nombres de sous-espaces stables

Remarque 5. Il y a au moins deux sev de E u -stables: E et 0 .

Définition 2. Un endomorphisme est dit simple ssi ses seuls sous-espaces stables sont E et 0 .

Théorème 3. Un endomorphisme est simple ssi son polynôme caractéristique est irréductible dans $K[X]$. Notamment un endomorphisme simple est nécessairement cyclique.

Réciproque fausse.

Exemple 1. On considère un espace réel en dimension 2, et n'importe quel endomorphisme trigonalisable inversible. Cet endomorphisme est cyclique mais pas simple.

Corollaire 1. On considère un espace vectoriel E sur un corps algébriquement clos de dimension quelconque. En dimension 1, tout endomorphisme est simple. En dimension supérieure, aucun endomorphisme n'est simple. On considère un endomorphisme réel. En dimension 1, tout endo est simple. En dimension 3 ou supérieure, tout endomorphisme est simple. En dimension 2, les endomorphismes simples sont ceux pour lequel le polynôme est irréductible dans $\mathbb{C}$, donc celui pour lesquels on a deux valeurs propres complexes distinctes, ie les matrices telle que $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$.

Dans la même veine on a

Théorème 4 (Schur). [1] On considère un espace vectoriel sur un corps algébriquement clos et une partie de $L(E)$ telle que les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de E sont E et 0 . Alors les seuls endomorphisme commutant avec tous les éléments de Q sont les homothéties. Faux pour $\mathbb{R}$ en dimension paire mais vraie en dimension impaire.

Théorème 5. Soit K un corps infini. Alors u a un nombre fini de sev stables ssi le polynôme minimal est de degré n .

Proposition 6. Soit $u \in L(E)$. u stabilise tous les sev de E ssi c'est une homothétie.

On a un résultat plus fin:

Théorème 6. [2] Soit $u \in L(E)$ stabilisant tous les sev de dimension k . Alors u est une homothétie.

Enfin, citons le théorème suivant.

Théorème 7. [2] On considère un sous-groupe du groupe linéaire sur un ev complexe et F un sev stable par tous les éléments de G . Alors il existe un supplémentaire stable par tous les éléments de G .

1.5 Comportement par passage au dual

Grâce à ce qu'on a vu précédemment, on a

Théorème 8. Soit K un corps algébriquement clos. Alors E ev sur K admet un hyperplan stable. un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ admet un hyperplan ou un sev de dim $(n-2)$ stable.

Ces remarques sont souvent utilisées pour faire des raisonnements par récurrence, cf après dans la réduction.

2 Sous-espaces stables et réduction des endomorphismes

Principe de la réduction: ramener l'étude d'un endomorphisme à l'étude de certains de ces induits sur des sous-espaces.

2.1 Lemme des noyaux

C'est le théorème fondamental.

Théorème 9. *Si P et Q sont premiers entre eux alors $\text{Ker}(P(f))$ et $\text{Ker}(Q(f))$ sont en somme directe égale à $\text{Ker}(PQ(f))$ et les projecteurs sont des polynômes en f . Idem avec k polynômes.*

Corollaire 2. *On considère n'importe quel annulateur de u qui s'écrit comme produits d'irréductibles $\prod P_i^{\alpha_i}$. Alors $E = \bigoplus \text{ker}(P_i^{\alpha_i})$ et ces sous-espaces sont stables. On a donc décomposé E en sous-espaces stables, pour peu qu'on est au moins deux termes dans la décomposition en irréductibles.*

Définition 3. *On suppose le polynôme minimal scindé. Alors le polynôme caractéristique l'est aussi. On décompose le polynôme caractéristique en irréductibles : $\chi_u = \prod (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Le sous-espace $\text{Ker}(P(u) - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}$ est appelé sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ .*

Proposition 7. 1. *La dimension de $\text{Ker}(P(u) - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}$ est α_i .*

2. *On considère la décomposition en irréductibles du polynôme minimal qui s'écrit sous la forme $\prod (X - \lambda_i)^{\beta_i}$. Alors on a $\text{Ker}(P(u) - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i} = \text{Ker}(P(u) - \lambda_i \text{Id})^{\beta_i}$*

3. *Le sous-espace caractéristique est stable par u , et par tout polynôme de u et toute série entière de u .*

2.2 Diagonalisabilité

Définition 4. *Un endomorphisme est diagonalisable ssi il admet n droites stables distinctes stables.*

Théorème 10. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *u est diagonalisable*
2. *χ_u est scindé et la multiplicité de chaque racine est égale à la dimension du se propre correspondant.*
3. *Π_u est scindé simple*
4. *Il existe un annulateur scindé simple*

Théorème 11. *Soit K un corps fini à q éléments. Alors u est diagonalisable ssi le polynome $X^q - X$ est un annulateur de f .*

Corollaire 3. *Si un endomorphisme est diagonalisable alors sa restriction à n'importe quel espace u -stable l'est aussi.*

2.3 Trigonalisabilité

Définition 5. *Un drapeau est une suite croissante F_i de sous-espaces vectoriels stables tels que $\dim(F_i) = i$.*

Définition 6. *Un endomorphisme est dit trigonalisable ssi il existe un drapeau de sous-espaces stables. La matrice dans une base adaptée au drapeau est alors trigonale supérieure.*

2.4 Réduction de Dunford

3 Polynôme minimal ponctuel et applications

3.1 Polynôme minimal ponctuel

Définition-proposition 1. *On considère l'ensemble suivant: $E_{u,x} = \{P(u)(x) | P \in K[X]\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E stable par u . C'est le plus petit sous-espace stable contenant x .*

Théorème 12. *L'ensemble des annulateurs de x est un idéal, il admet donc un unique générateur*

Lemme 1. *Il existe un vecteur totalisateur, ie tel que le polynôme minimal soit le polynôme minimal de ce vecteur.*

3.2 Semi-simplicité

Définition 7. *Un endomorphisme est dit semi-simple ssi Tout sev u -stable admet un supplémentaire u -stable.*

Proposition 8. *Un endomorphisme diagonalisable est semi-simple*

En général un endomorphisme n'est pas semi-simple.

Exemple 2. *N'importe quelle matrice trigonale non diagonale en dimension 2.*

Lemme 2. *On suppose μ_u irréductible. Alors u est semi-simple.*

Théorème 13. *Un endomorphisme est semi-simple ssi Π_f est produit de polynômes irréductibles unitaires premiers deux à deux.*

Corollaire 4. *un endomorphisme est diagonalisable ssi il est semi-simple et trigonalisable. Dans un corps algébriquement clos, il est diagonalisable ssi il est semi-simple.*

Corollaire 5. *Un endomorphisme de K est semi-simple ssi il est diagonalisable dans la clôture algébrique de K . Dans le cas réel il se réduit sous la forme d'une partie diagonale et de blocs 2-2 antisymétriques.*

Corollaire 6. *[4] un endomorphisme nilpotent n'est jamais semi-simple, sauf si il est nul.*

Application 1. *[4] L induit d'un endomorphisme semi-simple sur un sev stable est lui aussi semi-simple*

Application 2. *Dunford généralisé: dans $\mathbb{R}$ (mais aussi dans n'importe quel corps), tout endomorphisme se décompose de manière unique sous la forme semi-simple + nilpotent commutant entre eux. ,*

Application 3. *[4] $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A = B^2\}$*

3.3 Invariants de Smith

References

- [1] Gourdon
- [2] fgn1
- [3] fgn 2
- [4] Objectif agrégation