

126 : endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Pierre Lissy

December 30, 2009

Dans toute la suite, E est un ev de dimension n sur un corps K . On suppose connue les notions et les propriétés usuelles des objets suivants: polynôme minimal, polynôme caractéristique, valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.

1 Définition et premières propriétés

1.1 Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

Définition 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit diagonalisable ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .

Définition 2. Soit $M \in M_n(K)$. M est dite diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

On a le lien suivant:

Proposition 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et M la matrice de u dans une certaine base. Alors u est diagonalisable ssi M est diagonalisable. Inversément, si on se donne une matrice M , elle est diagonalisable ssi l'endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Exemple 1. Une homothétie est un endomorphisme diagonalisable. Un projecteur est un endomorphisme diagonalisable. Une symétrie est un endomorphisme diagonalisable.

Remarque 1. si $K \subset L$ est une extension de corps et que u (ou A) est diagonalisable dans E pris en temps que K – ev , alors il est diagonalisable en temps que L – ev mais réciproque fausse.

Exemple 2. On considère la matrice de rotation $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

1.2 Premières propriétés

Lemme 1 (Lemme des noyaux). On considère des polynômes P_i premiers entre eux deux à deux. Alors si l'on se donne un endomorphisme u , on a que $\text{Ker}(\prod P_i(u))$ est la somme directe des $\text{Ker}(P_i(u))$. De plus, la projection sur chacun de ses espaces est un polynôme en u .

Proposition 2. On a les équivalences suivantes:

1. u (ou A) diagonalisable
2. la dimension de chaque sous-espace propre est égal à la multiplicité de la valeur propre
3. E s'écrit comme somme directe des sous-espaces propres

Corollaire 1. On considère un endomorphisme (ou une matrice) ayant n valeurs propres distinctes. Alors il est diagonalisable.

Exemple 3. [2] $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisable.

Proposition 3 (décomposition spectrale). Soit u un endomorphisme diagonalisable, λ_i ses valeurs propres, E_i ses sous-espaces propres. On appelle p_i le projecteur sur le se propre i par rapport à la somme des autres sous-espaces propres. Alors $p_i p_j = \delta_{ij}$, on a $u = \sum \lambda_i p_i$ et les p_i sont des polynômes en u . Enfin, $\sum p_i = Id$. Inversément, si on suppose qu'on peut trouver des projecteurs vérifiant $p_i p_j = 0$, $\sum p_i = Id$ et des λ_i tels que $u = \sum \lambda_i p_i$ alors u est diagonalisable et ses valeurs propres sont exactement les λ_i . Les p_i sont alors nécessairement des polynômes en u .

1.3 Diagonalisation simultanée

Théorème 1. Soit u et v dans endomorphismes diagonalisables. Alors u et v sont diagonalisables dans une même base ssi u et v commutent.

Théorème 2. Soit A et B deux matrices diagonalisables. Alors il existe une même matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonalisables ssi A et B commutent.

Théorème 3. Soit u_i une famille d'endomorphismes diagonalisables. Alors ils sont simultanément diagonalisables ssi ils commutent deux à deux

Théorème 4. Soit A_i une famille de matrice diagonalisables, alors elles sont simultanément diagonalisables ssi elles commutent deux à deux.

Corollaire 2. Si on prend deux endomorphismes diagonalisables qui commutent, alors leur somme, leur différence, leur produit restent diagonalisables

2 Critères de diagonalisabilité

2.1 Utilisation des annulateurs

Théorème 5. On a les équivalences suivantes:

1. u est diagonalisable
2. le polynôme minimal de u est scindé simple
3. il existe un annulateur de u scindé simple

Corollaire 3. On peut maintenant démontrer le résultat important de stabilité suivant: Si F est un sev stable de E alors $u|_F$ diago $\Rightarrow u_F$ diago.

On a donc une nouvelle équivalence.

Corollaire 4. Un endomorphisme est diagonalisable ssi la restriction de u à $Im(u)$ est diagonalisable.

Exemple 4. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable.

2.2 Diagonalisabilité des endomorphismes de rang 1

Théorème 6. Un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable ssi sa trace est non nulle. Dans le cas où sa trace est nulle, on $f^2 = 0$.

2.3 Diagonalisabilité des endomorphismes de rang 2[3]

Théorème 7. On suppose le corps de caractéristique différente de 2. Un endomorphisme de rang 2 est diagonalisable ssi la quantité $\Delta = 2tr(u^2) - tr(u)^2$ est un carré dans k et que l'on est dans une des situations suivantes:

1. $\Delta \neq 0$ et $tr(u^2) \neq tr(u)^2$.
2. $\Delta = 0$, $tr(u^2) \neq tr(u)^2$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre $(2tr(u))^{-1}$ est de dimension 2.

2.4 Diagonalisabilité dans les corps finis

Théorème 8. *Soit K un corps fini de cardinal q . u est diagonalisable ssi $u^q = u$.*

2.5 Autres critères

Proposition 4. *On a les équivalences suivantes:*

1. u diagonalisable
2. Tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u , et les endomorphismes induits sont diagonalisables
3. Pour tout (ou un certain) λ , $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ et $\text{Im}(f - \lambda \text{Id})$ sont en somme directe et l'endomorphisme induit sur l'image est diagonalisable
4. Tout sous-espace propre de u admet un supplémentaire stable (qui est alors forcément l'image de $u - \lambda \text{Id}$), et l'induit est diagonalisable

Proposition 5. *Soit K un corps algébriquement clos. M diagonalisable ssi $\exp(M)$ diagonalisable (cf [2][page 202])*

Proposition 6. *Une matrice est diagonalisable ssi sa classe de similitude est fermée (idem endomorphisme)*

Proposition 7. [3] *Soit u un endomorphisme tel que u^l soit diagonalisable. u est diagonalisable ssi $\text{Ker } u^l = \text{Ker } u$.*

3 Quelques classes d'endomorphismes diagonalisables

3.1 Projecteurs, symétries

3.2 Endomorphismes autoadjoints réels

Dans ce paragraphe le corps de base est $\mathbb{R}$.

Définition 3.

3.3 Endomorphismes normaux

Dans ce paragraphe le corps de base est $\mathbb{C}$.

4 Applications

4.1 Sous-groupes du groupe linéaire

Théorème 9. [3] *On considère un corps algébriquement clos. Les seuls sous-groupes finis de $GL_n(k)$ (n premier à la caractéristique de k) sont les groupes conjugués à un sous-groupes de matrices diagonales.*

Théorème 10 (Burnside). *Tout sous-groupe du groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie et d'exposant fini est d'ordre fini.*

Théorème 11. *Dans un sous-groupe d'indice 2, tous les endomorphismes sont simultanément diagonalisables.*

Application 1. *$GL_n(K)$ est isomorphe (groupe) à $GL_m(K)$ ssi $n = m$.*

4.2 Quelques résultats topologiques

Proposition 8. *Les matrices diagonalisables sont denses dans l'ensemble des matrices de $\mathbb{C}$.*

Proposition 9. *L'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables sont les matrices n valeurs propres distinctes.*

4.3 Réduction de Jordan, calcul pratique de l'exponentielle

4.4 Etude des équations différentielles

4.5 Etude des suites récurrentes

4.6 Méthode de la puissance

Théorème 12. *On se place dans les réels ou les complexes. Soit A une matrice diagonalisable dont on supposera la valeur propre dominante λ unique. Soit v_0 un vecteur. On pose $w_{k+1} = Av_k$ et $v_{k+1} = w_{k+1}/||w_{k+1}||$. Alors la suite v_k tend vers un vecteur propre de valeur propre λ , et la norme des w_k tend vers le module de λ .*

Remarque 2. *cet algorithme permet donc de calculer le rayon spectral d'une matrice de manière approchée et de trouver un vecteur propre associé de manière approchée. Ceci est utile en analyse numérique à cause du théorème suivant.*

Application 2.

5 Extension de la notion de diagonalisabilité: endomorphismes semi-simples

5.1 Définition

Définition 4. *Un endomorphisme u est dit semi-simple ssi tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u .*

A faire (cf Beck ou Gourdon) : diagonalisabilité crochets de Lie, AM-MV, etc Developpements: méthode de la puissance + application, Théorème de Burnside (avec Lemme sur les traces ou le trouver?)

References

- [1] Serre matrices
- [2] Gourdon algèbre
- [3] Objectif agrégation