Exponentielles de matrices. Applications

Pierre Lissy

April 26, 2010

On considère l'ensemble des matrices carrés $M_n(k)$ avec k le corps des réels ou le corps de complexes. Une matrice sera dénotée A.

1 Définitions et propriétés remarquables

1.1 Exponentielle

Définition-proposition 1. *En prenant une norme subordonnée, on voit que la série suivante: $\sum A^k/k!$ converge normalement sur tout compact $M_n(\mathbb{R})$. Ca somme sera notée $exp(A)$. Cela reste donc une matrice.*

Proposition 1. $|||exp(A)||| \leqslant e^{|||A|||}$ *pour toute norme subordonnée.*

Proposition 2. *L'exponentielle de l'adjoint est l'adjoint de l'exponentielle, idem avec la transposée. L'exponentielle d'une matrice hermitienne ou symétrique reste hermitienne ou symétrique.*

Proposition 3. *L'exponentielle est un endomorphisme inversible, d'inversible $exp(-A)$. De plus, l'exponentielle est un polynôme en A et commute donc avec A. Si A et B commutent, $exp(A+B) = exp(A)exp(B)$ (donc $exp(A)$ et $exp(B)$ commutent). $exp(P^{-1}AP) = P^{-1}exp(A)P$.*

Proposition 4. $(Id + A/n)^n \to exp(A)$. *Si $A_n \to A$, alors $(Id + A_/n)^n \to exp(A)$.*

1.2 Exponentielle et réduction

Proposition 5. $Sp(Exp(A)) = Exp(Sp(A))$

Théorème 1. *Si A est trigonalisable, alors A diagonalisable ssi $exp(A)$ diagonalisable*

Proposition 6. *L'exponentielle réduite aux matrices diagonalisables est injective.*

En triangulant on a facilement

Application 1. $det(exp(A)) = e^{Tr(A)}$.

Proposition 7. *Si la décomposition de Dunford de A est $A = D + N$, alors cette de $exp(A)$ est $exp(D) + exp(D)(exp(N) - 1)$.*

Application 2. *La décomposition de Dunford étant effective, on peut calculer de manière effective l'exponentielle d'une matrice. Rappelons que dès qu'on aura obtenu la partie diagonalisable ca sera fini. Or cette aprtie diagonalisable s'écrit sous la forme (décomposition spectrale) $\sum \lambda_i p_i$ où λ_i sont les valeurs propres et les p_i les projecterurs sur les sous-espaces caractéristiques. On suppose que les valeurs propres sont calculées (c'est la le principal souci quand même, mais bon...). Il reste donc à trouver les projecteurs. On considère le polynôme caractéristique scindé $\prod(X-\lambda_i)^{r_i}$. On décompose en éléménts simples la fraction rationelle $1/\prod(X-\lambda_i)^{r_i}$. On obtient $1/\chi_A = \sum_i \sum_j x_{ij}/(X-\lambda_i)^j$. Posons $U_i := \sum_j^{r_i}(X-\lambda_i)^{r_i-j}$. Alors $1 = \sum U_i Q_i$ avec $Q_i := \prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{r_j}$. Les projecteurs sont alors donnés par $U_iQ_i(A)$. L'exponentielle de la matrice est alors facliement calculable par la formule au-dessus.*

Exemple 1. *Exponentielle de la matrice page 199 du Gourdon.*

1.3 Défaut d'injectivité de l'exponentielle

Proposition 8. *L'exponentielle définit une surjection (continue) de $M_n(C)$ vers $Gl_n(\mathbb{C})$. Elle définit une surjection de $M_n(\mathbb{R})$ vers $GL_n(\mathbb{R}) \cap \{A|\exists B, B^2 = A\}$.*

$Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. L'ensemble des matrices inversibles qui sont des carrés dans $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Corollaire 1.

C'est une application non injective.

Théorème 2. *Les applications telles que $exp(A) = Id$ sont les matrices diagonalisables dont le spectre est inclus dans $21\pi\mathbb{Z}$. Cet ensemble est noté L. L'ensemble des matrices telles que $exp(A) = B$ contient, une fois qu'on connait une solution particuière $exp(A_0)$, l'ensemble des $A_0 + l$ avec $l \in L$ commutant avec A_0.*

1.4 Logarithme

Définition 1. *On appelle logarithme d'une matrice dans $B(0,1)$ la série suivante, qui est absolument convergente: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(A - Id)^n/n$.*

Proposition 9. *Sur le domaine de définition, on a $exp(log(A)) = A$.*

Proposition 10. *Le logarithme est bien défini sur les matrices unipotentes.*

2 Régularité de l'exponentielle et applications

2.1 Régularités

Proposition 11. *L'exponentielle est une application de classe C^1 et même C^∞. Sa différentielle en 0 est l'identité. l'exponentielle réalise donc un difféomorphisme local entre un voisinage de 0 et un voisinage de Id.*

Application 3. *$GL_n(K)$ n'admet pas de sous-groupes arbitrairement petits; Tout sous-groupe de $GL_n(K)$ n'admet pas de sous-groupes arbitrairement petits.*

Proposition 12. *L'application $t \mapsto exp(tA)$ est dérivable de dérivée $Aexp(tA)$. De même $t \mapsto exp(tA)x$ est dérivable de dérivée $exp(tA)x$. Ceci fournit les solutions de l'équation différentielle $X' = AX$ avec condition de Cauchy. Si A et A' commutent on en déduit de même une solution de $X'(t) = A(t)X(t)$.*

Application 4. *Si pour tout t, $exp(tA)$ et $exp(tB)$ commutent alors A et B commutent.*

2.2 Calcul de la différentielle

Définition 2. *on définit $ad : A \mapsto (X \mapsto AX - XA)$.*

Proposition 13. *ad est la différentielle en l'identité de l'application $Ad : A \mapsto (M \mapsto AMA^{-1}$.*

Lemme 1. $exp(ad(M)) = Ad(exp(M))$

Théorème 3. $d(exp(M))(X) = exp(M) * \sum_m = 0^\infty(-1)^m M^m/(m+1)!)X$

Corollaire 2. *$d(exp(M))$ est inversible ssi $Ad(M)$ n'a aucune valeur propre dans $2i\pi\mathbb{Z}$.*

2.3 Etoile de l'exponentielle

Définition 3. *On appelle étoile de l'exponentielle (rélle ici) l'ensemble des matrices dont toutes les valeurs propres complexes sont telles que $|Im(\lambda_i)| < \pi$.*

Proposition 14. *L'étoile de l'exponentielle est un ouvert étoilé, stable par automorphismes intérieurs.*

Théorème 4. *l'exponentiellle réalise un difféomorphisme de l'étoile sur son image, qui est un voisinage ouvert de Idd dans $GL_n(\mathbb{R})$ stable par automorphismes intérieurs et contenant toute boule ouverte unité pour une norme sous-multiplicative.*

3 Applications

3.1 Sous-groupes à un paramètre

Théorème 5. *Tout morphisme de* $\mathbb{R}$ *vers* $GL_n(\mathbb{C})$ *est de la forme* $t \mapsto e^{tA}$.

Théorème 6. *Tout morphisme de* $\mathbb{R}$ *vers* $SL_2(\mathbb{R})$ *est de la forme* $t \mapsto e^{tA}$ *avec* A *de trace nulle.*

Théorème 7. *Tout morphisme de classe* C^1 *de* $\mathbb{R}$ *vers* $M_n(\mathbb{C})$ *est de la forme* $s \mapsto Pexp(sA)$.

Théorème 8. *Les morphismes continus de* U *vers* $Gl_n(\mathbb{C})$ *sont les* $z \mapsto P^{-1}Diag(z^{k_1}, \dots, z^{k_n})P$. *ceux de* U *vers* $Gl_n(\mathbb{R})$ *sont les* $e^{i\theta} \mapsto Qf(\theta)Q^{-1}$ *avec* $f(\theta)$ *est une matrice avec des 1 sur la diagonale ou des blocs de rotation d'angle* $k_i\theta$.

3.2 Sous-groupes fermés de $Gl_n(K)$

Lemme 2. $Exp(X + Y) = lim(exp(X/n)exp(Y/n))^n$

Théorème 9. *Soit* G *un sous-groupe fermé de* $Gl_n(K)$. *On définit* $g = \{X \in M_n(k) | exp(tX) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}$. *Alors* g *est un sous-espace vectoriel stable par crochet de Lie. On l'appelle algèbre de Lie du groupe* G

Remarque 1. *Si* G *est discret évidemment* g *est trivial.*

Théorème 10. *Si* G *est un sous-groupe fermé de* $Gl_n(k)$, *il existe un voisinage de* 0 *dans* g *noté* U *et un voisinage de* Id *dans* G *noté* V *tel que l'exponentielel réalise un difféomorphisme entre* U *et* V.

Théorème 11 (Cartan)**.** G *est en fait nécessairement une sous-variété de* $M_n(k)$ *de dimension* $dim(g)$, *dont l'espace tangent en* Id *est* g.

Corollaire 3. *Si* G *est connexe fermé, alors* $exp(g)$ *engendre* G.

Application 5. $O_n(\mathbb{R})$ *et* $SO_n(\mathbb{R})$ *sont des sous-variétés de* $M_n(k)$ *de dimension* $n(n-1)/2$ *dont l'espace tangent en* Id *est l'ensemble des matrices antisymétriques.*

Application 6. $SL_n(\mathbb{R})$ *est une sous-variété de* $M_n(k)$ *de dimension* $n^2 - 1$ *dont l'espace tangent en* Id *est l'ensemble des matrices de trace nulle.*

3.3 Homéomorphies et applications

Lemme 3. *Décomposition polaire:*$Gl_n(\mathbb{R})$ *est homéomorphe à* $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$, $Gl_n(\mathbb{C})$ *est homéomorphe à* $U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C})$

Lemme 4. *on considère un sous-groupe* G *de* $GL_n(\mathbb{C})$ *stable par l'adjoint, et tel que pour tout* $M \in G$ *hermitien défini positif, sa racine carré est encore dans* G. *Alors* G *est stable par décomposition polaire et* G *est homéomorphe à* $(G \cap O_n) \times (G \cap HDP)$. *de même dans* $Gl_n(R)$.

Lemme 5. *Soit* G *un groupe défini par l'équation* $M^*JM = J$ *avec* $J^2 = Id$. *Alors ce groupe est invariant par décomposition polaire et tous ses éléments sont de déterminant 1.* G *est alors isomorphe à* $(G \cap U_n) \times R^d$ *pour un certain* d.

Application 7. $U(p, q)$ *est homéomorphe à* $U_p \times U_q \times R^{pq}$. *Ce groupe est donc connexe*

Application 8. $O(p, q)$ *est homéomorphe à* $O_p \times O_q \times R^{pq}$. *i la donc deux composantes connexes si* p *ou* q *est nul, 4 sinon.*

Théorème 12. *l'exponentielle réalise un homéomorphisme entre* S_n *et* S_n^{++}, *entre* H_n *et* H_n^{++}.

Corollaire 4. *Racine p-ième de l'exponentielle:* $exp(A/p)$.

Application 9. $Gl_n(\mathbb{R})$ *est homéomorphe à* $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ *et a donc deux composantes connexes.* $Gl_n(\mathbb{C})$ *est homéomorphe à* $U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Application 10. *$O(n,\mathbb{C})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.*

Théorème 13. *L'exponentielle réalise (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) un homéomorphisme des matrices nilpotentes vers les matrices unipotentes. Son ivnerse est le logarithme défini précédemment.*

Théorème 14. *L'exponentielle réalise un homéomorphisme entre les matrices antisymétriques réelles et les matries orthogonales.*

3.4 Stabilité des systèmes différentiels

Lemme 6. *e^{tM} tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ ssi M a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. e^{tM} reste bornée ssi toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative ou nulle, et pour celles ayant une valeur propre nulle le sous-espace propre est égal au sous-espace caractéristique (ie les blocs de Jordan sont de taille 1).*

Théorème 15. *Le système différentiel $X' = AX$ tend exponentiellement vers 0 (asymptotiquement stable) en $+\infty$ ssi les valeurs propres sont toutes de partie réelle strictement négatives. Stable ssi autre condition.*

Théorème 16 (Lyapunov)**.** *On cosnidère un système différentiel $y' = f(y), y(0) = x$ avec f de classe C^1. On pose A la différentielle de f en 0. Si A a toutes es valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point attractif exponentiellement stable.*

References

[1]