

# 128: endomorphisme diagonalisables, endomorphismes nilpotents

Pierre Lissy

April 24, 2010

## 1 Définitions et caractérisations

### 1.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 1.** Un endomorphisme est dit triangulable ssi il existe une base de  $E$  telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme soit triangulaire supérieure. Cela revient à dire qu'il existe un drapeau de sous-espaces stables; Cela revient à dire qu'on peut trouver une base dans laquelle la matrice est triangulaire inférieure.

**Définition 2.** Une matrice est dite triangulable ssi elle est semblable à une matrice supérieure.

**Proposition 1.** Une fois triangulé, on déduit facilement la trace, le déterminant de l'endomorphisme en question.

**Définition 3.** Un endomorphisme (resp une matrice) est dite nilpotent(e) ssi  $\exists r | A^r = 0$ . Indice de nilpotence = le plus petit  $r$  qui convient

**Proposition 2.** 1. Un endomorphisme nilpotent n'est jamais inversible

2. Si  $u$  est nilpotent d'indice  $p$  alors il existe un vecteur  $x$  tq la famille  $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$  soit libre. ceci implique que l'indice de nilpotence est inférieur à  $n$  et que  $u^n = 0$  pour toute matrice nilpotente
3. Le rang décroît strictement pour un endomorphisme nilpotent, ce qui implique qu'il n'existe pas de racines carrées d'une matrice nilpotente
4.  $u, v$  nilpotent qui commutent  $\Rightarrow uv$  et  $u + v$  nilpotents
5. Si  $u$  est nilpotent alors  $Id - u$  est inversible.
6. l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotent est un hyperplan, le noyau de la trace
7. On considère  $n + 1$  nombres complexes  $\lambda_i$  tels que pour tout  $i$ ,  $A + \lambda_i B$  soient nilpotentes. Alors  $A$  et  $B$  sont nilpotentes.
8. si  $q = \dim(\text{Ker}(f))$ , alors  $N/q \leq r \leq n + 1 - r$

**Théorème 1.** L'exponentielle réalise un homéomorphisme entre les nilpotents et les unipotents.

### 1.2 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

**Théorème 2.** Les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $u$  diago
2. sa matrice ds n'importe quelle base diago
3.  $\xi_u$  scindé

4.  $\mu_u$  scindé

5. il existe un annulateur scindé

**Corollaire 1.** Dans un corps algébriquement clos, tout endomorphisme est diagonalisable.

**Corollaire 2.** La restriction d'un endo trigonalisable à un sous-espace stable est trigonalisable.

**Corollaire 3.**  $A \text{ trigo} \Rightarrow {}^t A \text{ trigo}$ .

### 1.3 Caractérisation des endomorphismes nilpotents

**Théorème 3.** Les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $f$  nilpotent

2.  $\chi_f = X^n$

3.  $\mu_f = X^r$  avec  $r > 0$

4. pour tout  $k$ ,  $\text{Tr}(f^k) = 0$

5. 0 est la seule valeur propre dans toute extension algébrique de  $k$

6. Si la caractéristique de  $k$  est nulle: pour tout  $\lambda$ ,  $f$  et  $\lambda f$  sont semblables

7. Si la caractéristique de  $k$  est nulle: il existe un  $\lambda > 0$ ,  $f$  et  $\lambda f$  sont semblables

8. dans  $R$  ou  $C$ : 0 est dans l'adhérence de la classe de similitude de  $f$

**Application 1.** Tout sous-groupe d'exposant fini de  $GL_n(\mathbb{C})$  est fini

### 1.4 Sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent

**Proposition 3.** Un endomorphisme nilpotent de rang maximum (ie  $n-1$ ) a exactement  $n+1$  sous-espaces stables, ses noyaux itérés

**Proposition 4.** Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent et  $S$  un sev de  $E$  stable par  $u$  tel que  $\text{Im}(u) + S = E$ . Alors  $S = E$ .

**Proposition 5.** Tout endomorphisme nilpotent et semi-simple est nul

**Proposition 6.** Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent, et  $V$ . Alors  $V$  admet un supplémentaire stable ssi  $f^k(V) = f^k(E) \cup V$  pour tout  $k$ .

## 2 Dunford, Jordan

### 2.1 Réduction de Dunford

**Définition 4.** On considère un endomorphisme trigonalisable. Sous-espace caractéristique associé à la valeur propre  $\lambda$ , de multiplicité  $a$ :  $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^a$ .

**Lemme 1.** La dimension du sous-espace caractéristique est égal à la multiplicité de la racine.

**Théorème 4.** On considère un corps algébriquement clos; Alors tout endomorphisme s'écrit de manière unique sous la forme diagonalisable + nilpotent, avec le diago et le nilpotent qui commutent. De plus, ce sont des polynômes en  $f$

**Lemme 2.** un endomorphisme est semi-simple ssi il est diagonalisable ds la clôture algébrique de  $k$ .

**Lemme 3.** Deux matrices à coef ds  $k$  semblables dans une extension  $L$  de  $k$  sont semblables dans  $k$

**Théorème 5.** Soit  $k$  un corps maintenant quelconque. Alors tout endomorphisme s'écrit de manière unique sous la forme semi-simple + nilpotent commutant entre eux.

**Application 2.** [?] Si l'on se donne une matrice  $A$  complexe, de décomposition de Dunford de  $\exp(A)$  en fonction de celle de  $A$  (ie  $A = D + N$  est  $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D) * (Id - \exp(N))$ ). Ainsi, les matrices  $A$  qui vérifient  $\exp(A) = Id$  sont exactement les matrices diagonalisables dont les valeurs propres sont dans  $2i\pi\mathbb{Z}$ .

**Application 3.** Il n'existe pas de sous-groupes de  $M_n(\mathbb{C})$  arbitrairement petits.

**Application 4.** Tout morphisme du cercle unité sur  $GL_n(\mathbb{R})$  est de la forme  $e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} R(\theta_{k_1}) \\ R(\theta_{k_r}) \\ 1 \end{pmatrix}$  où les  $R$  sont des matrices de rotation

**Application 5.** On a existence d'un logarithme et des racines  $n$ -èmes d'une matrice inversible complexe.  $GL_n(\mathbb{C})$  est cpa

## 2.2 Réduction des endomorphismes nilpotents, réduction de Jordan

**Lemme 4.** Il existe des supplémentaires  $G_i$  du noyau itéré  $\text{Ker}(u^i)$  dans  $\text{Ker}(u^{i-1})$  tel que  $u$  injective sur  $G_i$  et  $u(G_i) \subset G_{i-1}$

**Théorème 6.** On considère un endomorphisme nilpotent. Alors il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme une sur-diagonale avec des 0 et des 1, le reste nul.

**Remarque 1.** On peut aussi voir ça comme semblable à une unique (à permutation près) matrice de blocs dont la surdiagonale est constituée de 1.

**Corollaire 4.** Réduction de Jordan: toute matrice triangulable est semblable à une unique matrice (à permutation près) matrice de la forme des blocs diagonaux de la forme  $\lambda Id + N$  avec  $N$  de la forme précédente.

**Théorème 7.** Toute matrice est semblable à une unique matrice réduite (à permutation près), où une matrice réduite est une matrice avec des blocs de Jordan ou y a que des 1, et des blocs diagonaux.

**Corollaire 5.** Dans un corps algébriquement clos, deux matrices sont semblables ssi elles ont les même réduite de Jordan

**Application 6.** Dans un corps algébriquement clos, l'ensemble des matrices ayant un polynôme minimal donné est une réunion FINIE de classes de similitude de matrices.

**Application 7.** Toute matrice est semblable à sa transposée.

## 3 Applications

### 3.1 Calcul effectif de l'exponentielle et des puissances

**Proposition 7.** La décomposition de Dunford est effective:

### 3.2 Systèmes linéaires d'ordre 2

### 3.3 Commutant

**Définition 5.** Commutant d'un endomorphisme = ensemble des éléments qui commutent avec lui.

**Proposition 8.** Le commutant est une sous  $k$ -algbre NON COMMUTATIVE en général de  $L(E)$ . On considère des espaces  $u$ -stables en somme directe.  $v$  commute avec  $u$  ssi les induits commutent entre eux.

**Remarque 2.** *Le commutant contient les polynômes d'endomorphismes.*

**Théorème 8.**  *$\dim(C(u))$  est la somme des carrés des tailles de blocs de Jordan dans la décomposition de Jordan de  $u$ .*

**Corollaire 6.**  *$\dim(C(u)) \leq n$ .*

## References

[1]