

129:algèbre des polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications

Pierre Lissy

March 6, 2010

1 L'algèbre $K[u]$, polynôme minimal

1.1 Définitions

Définition-proposition 1. L'application $\varphi_u : K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ qui à P associe $P(u)$ est un morphisme de K -algèbre. Son image est notée $K[u]$, c'est donc une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. $K[u] = P(u) | P \in K[X]$.

Proposition 1. $K[u]$ est une algèbre commutative.

Remarque 1. $K[u] \simeq K[X]/\text{Ker}(\varphi_u)$ avec $\text{Ker}(\varphi_u)$ non réduit à 0 puisque pour des raisons de dimension le morphisme ne peut être injectif. Isomorphisme de K -algèbre.

Remarque 2. Si u est inversible l'inverse appartient aussi à $K[u]$.

1.2 Polynôme minimal, polynômes annulateurs

Définition-proposition 2. $K[X]$ étant principal, l'idéal $\text{Ker}(\varphi_u)$ s'écrit sous la forme $\Pi_u K[X]$ avec Π_u unitaire. Le polynôme Π_u est appelé polynôme minimal de u . L'idéal engendré par le polynôme minimal est appelé l'ensemble des annulateurs de u . C'est en outre un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Corollaire 1. La dimension de $K[u]$ (en temps que K -ev) est égale au degré du polynôme minimal.

Remarque 3. [3]/exo 2.58/deg(μ_u) $\leq 1 + \text{rg}(u)$

Ce polynôme minimal n'est pas forcément irréductible (différent du polynôme minimal d'un élément sur un corps)

Exemple 1. $K = \mathbb{C}$, et p un projecteur différent de l'identité et différent de 0. Alors le polynôme minimal est $X(X-1)$.

Proposition 2. Soit F un sous-espace u -stable. Alors $\Pi_{u_F} | \Pi_u$. Supposons que G est supplémentaire u -stable de F . Alors $\Pi_u = \text{ppcm}(\Pi_{u_F}, \Pi_{u_G})$.

Théorème 1. [1] Grâce au lemme chinois, on a l'isomorphisme d'algèbre suivant: $K[u] \simeq K[X]/(P_1 K[X]) \dots \times K[X]/P_r K[X]$ où $P_1, \dots, P_r$ est la décomposition en irréductibles du polynôme minimal.

Proposition 3. $K[u]$ intègre $\Leftrightarrow$ l'idéal $\mu_u K[X]$ est premier $\Leftrightarrow$ il est maximal ssi c'est un corps ssi le polynôme minimal est irréductible.

Remarque 4. En fait on a $P(u)$ inversible ssi il est premier avec le poly minimal (ssi il est premier avec le poly caractéristique)

Remarque 5. Notion de polynôme minimal invariante par changement de corps (rang + famille libre).

Remarque 6. La fonction $u \mapsto \Pi_u$ n'est pas continue dans le cas réel ou complexe: par exemple on considère une application linéaire de rang 2 qui envoie un vecteur sur lui-même et l'autre sur $(1+1/k)$. Son polynôme minimal est $(X-1)(X-1-1/k)$ qui tend vers $(X-1)^2$ alors que le polynôme minimal de la limite est $X-1$.

1.3 Etude topologique de $K[u]$

Proposition 4. $K[u]$ est un sev de $L(E)$, il est donc fermé, et il reste donc une algèbre normée complète commutative de dimension finie.

Corollaire 2. On considère une série entière de rayon de cv non nul. Alors la série $\sum a_n u^n$ appartient encore à $K[u]$, ie s'écrit en fait comme un polynôme.

Application 1. Pour tout endomorphisme u , il existe un polynôme P_u (dépendant évidemment de u) tel que $P_u(u) = \exp(u)$.

1.4 Polynômes d'endomorphismes et sous-espaces stables

Proposition 5. Evidemment le noyau de n'importe quel $P(u)$ est stable par u .

1.5 Polynôme caractéristique. Applications à la réduction d'endomorphisme

1.6 Annulateurs et valeurs propres

Proposition 6. Soit P un annulateur de A . Alors si λ est valeur propre de P , on a $P(\lambda) = 0$.

De manière plus générale.

Proposition 7. Soit P un polynôme et $u(x) = \lambda x$. Alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Donc $\text{Sp}(P(A)) \subset P(\text{Sp}(A))$.

Réciproque fausse.

Exemple 2. p projecteur différent de Id et 0 . $X(X-1)(X-2)$ annule p et 2 pas valeur propre.

Proposition 8. λ valeur propre de $u \Leftrightarrow \Pi_u(\lambda) = 0$.

1.7 Lemmes des noyaux et lemmes des images

[2]

Théorème 2.

$$\begin{aligned} \text{Im}(P(u)) + \text{Im}(Q(u)) &= \text{Im}(\text{pgcd}(P, Q)(u)) \\ \text{Im}(P(u)) \cap \text{Im}(Q(u)) &= \text{Im}(\text{ppcm}(P, Q)(u)) \\ \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u)) &= \text{Im}(\text{ppcm}(P, Q)(u)) \\ \text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u)) &= \text{Im}(\text{pgcd}(P, Q)(u)) \end{aligned}$$

Notamment si P et Q sont premiers entre eux alors $\text{Ker}(P(f))$ et $\text{Ker}(Q(f))$ sont en somme directe égale à $\text{Ker}(PQ(f))$ et les projecteurs sont des polynômes en f .

Remarque 7. On généralise facilement ces résultats à k polynômes.

1.8 Théorème de Cayley-Hamilton

Définition 1. Polynôme caractéristique d'une matrice $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Proposition 9. Invariant par changement de base et par changement de corps aussi. De plus valeurs propres = racines du polynôme caractéristique.

Proposition 10. [3] L'application $A \mapsto \chi_A$ est une application surjective dans l'ensemble des polynômes unitaires.

Définition 2. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme = polynôme caractéristique de la matrice de cet endomorphisme dans n'importe quelle base.

Proposition 11. On considère un sous-espace stable F . Soit G un supplémentaire stable. Alors $\chi_f = \chi_{f_F} \chi_{f_G}$. Même résultat pour les matrices triangulaires par blocs, diagonales par blocs...

Proposition 12. $u \mapsto \chi_u$ est continue.

Théorème 3 (C-H). $\Pi_u | \chi_u$, ie $\chi_u(u) = 0$.

Corollaire 3. La dimension de $K[u]$ est inférieure à $\dim(E)$.

1.9 Diagonalisabilité

Théorème 4. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. u est diagonalisable
2. χ_u est scindé et la multiplicité de chaque racine est égale à la dimension du se propre correspondant.
3. Π_u est scindé simple
4. Il existe un annulateur scindé simple

Application 2. [3] Une matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable ssi A est nul. Une matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec C et A qui commutent est diago ssi $C = 0$. Si C et A ne commutent pas peut être diago.

Application 3.

Théorème 5. *Un endomorphisme est diagonalisable ssi $k[U] \simeq k^l$ pour un certain l .*

1.10 Trigonalisabilité

Théorème 6. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. u est trigonalisable
2. χ_u est scindé
3. Π_u est scindé
4. Il existe un annulateur scindé

Remarque 8. *Notamment dans un corps algébriquement clos tout endomorphisme est trigonalisable.*

Proposition 13. *Un endomorphisme est niloptent ssi son poly minimal est une puissance de X ssi son polynôme caractéristique aussi.*

Application 4. [3] Soient A, B telles que $AB - BA = B$. Alors B nilpotente (on se sert du poly minimal)

1.11 Semi-simplicité

Définition 3. *Un endomorphisme est dit semi-simple ssi Tout sev u -stable admet un supplémentaire u -stable.*

Théorème 7. *Un endomorphisme est semi-simple ssi Π_f est produit de polynômes irréductibles unitaires premiers deux à deux.*

Corollaire 4. *un endomorphisme est diagonalisable ssi il est semi-simple et trigonalisable. Dans un corps algébriquement clos, il est diagonalisable ssi il est semi-simple.*

Corollaire 5. *Un endomorphisme de K est semi-simple ssi il est diagonalisable dans la clôture algébrique de K . Dans le cas réel il se réduit sous la forme d'une partie diagonale et de blocs 2-2 antisymétriques.*

Théorème 8. *un endomorphisme est semi-simple ssi l'algèbre $k[U]$ est isomorphe en tant que k -algèbre à un produit de corps.*

1.12 Lien entre la réduction d'un endomorphisme et la réduction de ses polynômes

Théorème 9. u diagonalisable $\Rightarrow P(u)$ diagonalisable et $Sp(P(u)) = P(Sp(u))$. Idem trigonalisable.

Réciproque fausse. On peut néanmoins énoncer dans le cas diagonalisable:

Théorème 10. u^p diagonalisable et $Ker() = Ker(u^2) \Rightarrow u$ diagonalisable.

Théorème 11. u semi-simple $\Rightarrow P(u)$ semi-simple.

Remarque 9. L'exponentielle étant aussi un polynôme en u , on a le même résultat. Mais on a aussi:

Théorème 12. Dans $\mathbb{C}$, on a $\exp(u)$ diagonalisable $\Rightarrow u$ diagonalisable. Dans $\mathbb{R}$, il faut rajouter en plus que u doit être le carré d'un endomorphisme.

Inversément, on peut montrer ceci

Théorème 13. Soit u un endomorphisme diagonalisable et P un polynôme quelconque. On peut trouver un endomorphisme v aussi diagonalisable tel que $P(v) = u$.

2 Autres applications

2.1 Algèbre des polynômes d'endomorphismes et commutant

Définition 4. Commutant d'un endomorphisme = ensemble des éléments qui commutent avec lui.

Proposition 14. Le commutant est une sous k -algèbre NON COMMUTATIVE en général de $L(E)$. On considère des espaces u -stables en somme directe. v commute avec u ssi les induits commutent entre eux.

Exemple 3. à trouver

Remarque 10. Le commutant contient les polynômes d'endomorphismes.

Proposition 15. [3] La dimension du commutant est toujours supérieure à n .

Ceci assure qu'en général l'inclusion est stricte, sauf éventuellement si le polynôme minimal est de degré n . Il est remarquable que la réciproque est vraie. Du coup on a

Théorème 14. $\dim K[u] = n \leftrightarrow \dim C(u) = n \leftrightarrow \deg(\mu_u) = n \leftrightarrow \mu_u = \chi_u \leftrightarrow C(A) = K[u] \leftrightarrow u$ cyclique $\Leftrightarrow$ On peut écrire u dans une base comem une matrice compagnon.

Corollaire 6. On suppose u diago. $K[u] = C(u)$ ssi toutes les valeurs propres de u sont simples.

Proposition 16. $\dim(C(u)) = \sum_1^n (2s - 2i + 1) \deg(P_i) = \sum_{i,n} \min(\dim(P_i), \dim(P_j))$ où les P_i sont les invariants de Smith.

Corollaire 7. Théorème du bicommutant (trouver une référence): $K[u] = C(C(u))$

2.2 Calcul effectif des puissances d'un endomorphismes, de l'exponentielle d'un endomorphisme

Grâce à la décomposition de Dunford, on peut calculer de manière effective les puissances d'un endomorphisme.

2.3

References

- [1] Beck
- [2] Gourdon algèbre
- [3] FGN algèbre 2