

130: matrice symétriques réelles et matrices hermitiennes

Pierre Lissy

January 7, 2010

On suppose connues les notions et les propriétés usuelles d'espace euclidien, espace hermitien, base orthonormée, vecteur propre, valeur propre, sous-espace propres, la notion d'orthogonalité, d'endomorphisme, de forme bilinéaire ou sesquilinéaire, de transposée, d'adjoint, de matrice d'une forme bilinéaire (ou sesquilinéaire), d'une forme quadratique (ou hermitienne), de changement de base pour les matrices de formes bilinéaires, de matrices congruentes.

1 Définitions, premières propriétés.

1.1 Définitions

Définition 1. Une matrice à coefficient dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est dite *symétrique* (resp. *hermitienne*) ssi $A^* = A$ où A^* est la transposée (resp. la transconjugée) de A .

Remarque 1. 1. L'ensemble des matrices symétriques (resp hermitiennes) est un $\mathbb{R}$ - ev de dimension $n(n+1)/2$ (resp. n^2).

2. Les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels

3. Les matrices réelles hermitiennes sont les matrices symétriques

4. $A = -A^*$: matrices anti-symétriques ou anti-hermitiennes.

1.2 Lien avec les endomorphismes auto-adjoints, les formes bilinéaires symétriques ou sesquilinéaires hermitiennes, les formes quadratiques ou hermitiennes

Définition 2. Un endomorphisme est *symétrique* (resp) *hermitien* ssi il est égal à son adjoint, ie $(u(x)|u) = (x|u(y))$.

Proposition 1. Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et u un endomorphisme. u est symétrique (resp. hermitien) ssi sa matrice dans une BON (dans n'importe quelle BON) est symétrique (resp. hermitienne). Dans ce cas on obtient un isomorphisme d'ev en associant à un endo sa matrice dans une BON.

Définition-proposition 1. Une forme bilinéaire (sesquilinéaire) est *symétrique* (resp hermitienne) ssi $f(x,y)=f(y,x)$ (resp. $f(y,x)$). Une forme quadratique (resp. herm) est le carré d'une forme bil (sesq), il existe une unique forme bil sym (sesq herm) telle qu'elle en soit le carré, c'est sa forme polaire.

Proposition 2. Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) de $E \times E$. u est symétrique (resp. hermitienne) ssi sa matrice dans une BON (dans n'importe quelle BON) est symétrique (resp. hermitienne). Dans ce cas on obtient un iso d'ev en associant à une forme sa matrice dans une BON.

1.3 Théorème d'inertie de Sylvester

Définition 3. Deux formes quadratiques (hermitiennes) sont dites *équivalentes* ssi il existe un endomorphisme inversible tq $q'=qu$.

Proposition 3. Deux formes quadratiques sont équivalentes ssi leurs matrices dans une même base sont congruentes ssi il existe deux bases différentes telles que la matrice dans une base de l'une et la matrice dans l'autre base de l'autre soit les mêmes.

Lemme 1. Si on se donne une forme quadratique ou hermitienne q , alors il existe une base de E qui soit orthogonale: $q(\sum x_i e_i) = \sum \lambda_i |x_i|^2 = \sum \lambda_i e_i^*(x)$. De plus les λ_i sont nécessairement réels, on peut donc quitter à renormaliser la base les choisir égaux à 1, -1 ou 0. De plus, les e_i^* sont des formes linéaires indépendantes. Autrement dit toute matrice sym ou hermitienne est congruente à une matrice diagonale avec des 1, -1 ou 0 sur la diagonale.

Théorème 1. [1] Quelle que soit la décomposition de q du type $\varphi_1^2 + \dots + \varphi_r^2 - \psi_1^2 - \dots - \psi_p^2 = \varphi'^2_1 + \dots + \varphi'^2_{r'} - \psi'^2_1 - \dots - \psi'^2_{p'}$, où les formes linéaires sont indépendantes, on a toujours $r = r'$ et $p = p'$. Le couple (r, p) est appelée la signature de q . Si l'on se donne une matrice A symétrique, la signature cette matrice est la signature de la forme quadratique canoniquement associée, donc le couple (r, p) tel que n'importe quel matrice congruente à A diagonale avec que des 1, -1 et 0 sur la diagonale ait exactement r 1 sur la diagonale et p -1 sur la diagonale.

Faux avec les formes quadratiques complexes qui peuvent toutes être mises sous la forme d'une somme de carrés de formes linéaires.

Corollaire 1. Deux formes quadratiques sont équivalentes ssi elles ont même signature. Deux matrices symétriques sont congruentes ssi elles ont même signature.

Corollaire 2. la nombre $p+r$ donne le rang de la matrice ou de la forme quadratique. Une matrice symétrique est inversible ssi $p+r = \dim(E) =: n$, une forme quadratique est non dégénérée ssi $p+r = \dim(E) =: n$.

Remarque 2. Deux formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ sont équivalentes ssi elles ont même rang.

On a un algorithme efficace pour calculer la signature d'une forme quadratique ou hermitienne, ou la signature d'une matrice symétrique.

Proposition 4 (Méthode de Gauss). Soit une forme quadratique $q = \sum a_{ii}x_i^2 + \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j$ (potentiellement issue d'une matrice).

1. Si un des a_{ii} est non nul, on peut supposer que c'est a_{11} . On écrit alors q sous la forme $a_{11}x_1^2 + x_1B(x_2, \dots, x_n) + C(x_2, \dots, x_n) = a_{11}(x_1 + \frac{B(x_2, \dots, x_n)}{2a})^2 + (C(x_2, \dots, x_n) - \frac{B(x_2, \dots, x_n)^2}{4a})$. Et on réitère le processus au deuxième morceau.
2. Si tous les a_{ii} sont nuls. Si tous les a_{ij} sont nuls l'algorithme s'arrête, sinon L'un des a_{ij} est non nul, par exemple a_{12} . Alors $q(x) = ax_1x_2 + x_1B + x_2C + D = a(x_1 + C/a)(x_2 + B/a) + (D - BC/a) = a/4((x_1 + x_2 + (B+C)/a)^2 - (x_1 - x_2 + (C-B)/a)^2 + (D - BC/a)$. On itère alors la méthode de Gauss sur le dernier morceau.

A la fin on obtient qqch du type $\sum \lambda_i \varphi_i^2$ avec des formes linéaires indépendantes, on trouve donc la signature en regardant le signe des λ_i : le nombre > 0 donne r , ceux < 0 donne p .

Exemple 1. $\varphi(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz = (x + z/2)^2 - z^2/4 - 2y^2 + yz = (x + z/2)^2 - 2(y - z/4)^2 + z^2/8 - z^2/4$
La forme quadratique est donc de signature $(1, 2)$ et de rang $1 + 2 = 3$.

Exemple 2. $\varphi(x, y, z) = \bar{x}x + \bar{y}y + \bar{z}z + \bar{x}y + \bar{y}x - \bar{y}z - \bar{z}y = (x + y)(\bar{x} + \bar{y}) + z\bar{z} - \bar{y}z - y\bar{z} = (x + y)(\bar{x} + \bar{y}) + (z - y)(\bar{z} - \bar{y}) - y\bar{y}$. La forme hermitienne est de signature $(1, 2)$ et de rang $1 + 2 = 3$.

1.4 Matrices positives, définies positives

Définition 4. Un endomorphisme auto-adjoint est dit (déf) positif ssi $(Ax, x) \geq 0$ (resp > 0 pour $x \neq 0$). Une forme quadratique (hermitienne) est dite (déf) positive ssi sa forme polaire est (déf) positive. Une matrice symétrique est dite (déf) pos ssi l'endomorphisme canoniquement associé l'est. Ensemble des endomorphismes sym (resp herm) (déf) pos: $S_n^+, S_n^{++}, H_n^+, H_n^{++}$.

On a donc une nouvelle expression de la signature.

Proposition 5. La signature (r, p) est l'unique couple telle que r est la dimension maximale sur laquelle q est déf pos et p celle où elle est déf neg.

Proposition 6 (Schwarz). $|\varphi(x, y)|^2 \leq q(x)q(y)$ Si déf pos égalité ssi colinéaires.

Proposition 7 (Minkovski). $Q(x + y) \leq Q(x) + Q(y)$.

Si déf pos égalité ssi positivement colinéaires.

2 Réduction des matrices symétriques ou hermitiennes. Applications

2.1 Théorème spectral

Lemme 2. *Soit F un sev stable par u autoadjoint. Alors u_F est encore autoadjoint.*

Lemme 3. *Soit u autoadjoint. Alors il n'a que des valeurs propres réelles.*

Théorème 2. *Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une BON. Toute matrice symétrique ou hermitienne est orthogonalement semblable à une matrice diagonale*

Remarque 3. *Réciproque vraie dans le cas réel mais fausse dans le cas complexe: l'endomorphisme est normal mais pas nécessairement hermitien.*

Exemple 3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable en BON dans $\mathbb{C}$ mais pas hermitien.

2.2 Principe du mini-max et application

[4]

2.3 Etude des matrices positives

Théorème 3. *Une matrice est positive (déf positive) ssi toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement).*

Remarque 4. *Un endomorphisme sym def pos a donc une trace strictement positive et un déterminant strictement positif.*

Théorème 4. [1] *Soit deux matrices positives, alors leur produit est diagonalisable à valeurs propres positives. De plus si on note λ_1, μ_1 les plus petites et grandes vp de A et B , alors toute vp de AB est comprise entre $\lambda_1 \mu_1$ et $\lambda_n \mu_n$.*

Théorème 5. *Une matrice est déf pos ssi tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.*

Application 1. *La matrice des $\frac{1}{1 + |i - j|}$ est définie positive.*

Théorème 6. *L'exponentielle réalise un endomorphisme entre S_n et S_n^{++} .*

2.4 Calcul fonctionnel continu

Définition-proposition 2. H_n est muni d'une structure d'espace de Banach en le munissant de n'importe quelle norme subordonnée, par exemple la norme 2. Si on se donne une matrice A , les fonctions de $Sp(A)$ dans $\mathbb{C}$ sont naturellement munies d'une structure d'espace de Banach en considérant la norme infini (nombre fini de points images ici!). Un morphisme d'algèbre de Banach est une application linéaire qui est en plus un morphisme d'anneaux et qui respecte la multiplication par un scalaire.

Théorème 7. *Soit A une matrice hermitienne. Il existe un unique morphisme d'algèbre de Banach φ_A entre $F(Sp(A), \mathbb{C})$ et (H_n) tel que $\varphi_A(\text{Id})A$. De plus, φ_A est une isométrie et on a $\varphi_A(f)^* = \varphi_A(\bar{f})$. De plus $\varphi_A(f)$ commute avec tout opérateur qui commute avec A (donc $\varphi_A(f)$ est normal). Enfin si g est réelle, on a $\varphi_A(g \circ f) = \varphi_{\varphi_A(f)}(g)$.*

Exemple 4. $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}^{++}$, donc si l'on se donne une matrice symétrique positive A il existe une unique matrice B normale (elle sera alors en fait nécessairement symétrique) telle que $\exp(A) = B$. De même la racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^{++}$ si l'on se donne une matrice A il existe une unique matrice B normale (elle sera alors en fait nécessairement symétrique positive) telle que $B^2 = A$. De même la fonction racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$ donc pour toute matrice A symétrique il existe B unique normale (elle sera en fait symétrique) tq $B^3 = A$. On retrouve les mêmes théorèmes pour les matrices hermitiennes mais on obtient seulement des endomorphismes normaux?!

2.5 Décomposition polaire

Théorème 8. *Toute matrice complexe A s'écrit comme produit d'une matrice unitaire U et d'une matrice hermitienne positive H . De plus, si A est inversible H est définie positive et le couple (U, H) est unique. De plus l'application $GL_n(\text{mathtt{C}}) \rightarrow U_n \times H_n^{++}$ qui à A associe le couple (U, H) est un homéomorphisme.*

3 Applications à l'inversion de systèmes linéaires ou à la recherche de vp

[5]

3.1 Décomposition de Cholesky et applications

3.2 Méthode du Gradient

3.3 Méthode de Jacobi

Développements: décomposition polaire, principe du mini-max + conséquences Cauchy cf FGN, calcul fonctionnel continu

References

[1] Gourdon algèbre

[2] Choquet

[3] Lelong-Ferrand Arnaudiès algèbre

[4] FGN algèbre 2

[5] Sibony AN 1