

131: formes quadratiques; orthogonalité, isotropie. Applications.

Pierre Lissy

April 25, 2010

1 Formes bilinéaires et quadratiques

1.1 Définitions

Définition 1. On appelle forme bilinéaire sur E tout carré d'une forme bilinéaire

Proposition 1. Si l'on se donne une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire symétrique dont elle soit le carré, appelée forme polaire associée à Q et notée φ

Corollaire 1. l'ensemble des formes quadratiques est un espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$.

Exemple 1. Dans k^n , $Q(x) = \sum x_i^2$.

Proposition 2. Formules de polarisation: $\varphi(x, y) = 1/2(q(x+y) - q(x) - q(y)) = 1/4 * (q(x+y) - q(x-y))$

1.2 matrice d'une forme quadratique, rang

Définition 2. On appelle matrice d'une forme quadratique Q la matrice de la forme bilinéaire associée, ie $(\varphi(e_i, e_j))$ où $B = (e_i)$ est une base. Le rang de Q est alors le rang de la matrice

Exemple 2. La matrice de la forme quadratique précédente est I_n .

Proposition 3. Changement de bases: Si $P = M_B(B')$, alors $M_{B'}(Q) = {}^t P M_B(Q) P$.

Définition-proposition 1. Deux matrices sont dites congruentes ssi elles sont reliées par la condition précédente. C'est une relation d'équivalence, qui sont aussi les orbites pour l'action du groupe linéaire par congruences. Deux matrices sont congruentes ssi elles représentent

Définition-proposition 2. deux formes quadratiques sont dites équivalentes ssi elles diffèrent à un isomorphisme près. c'est équivalent à dire que dans n'importe quelle base les matrices sont congrues.

Le problème de classification est difficile, mais on peut déjà affirmer facilement que

Remarque 1. Deux matrices congrues ont nécessairement même rang.

Proposition 4 (Gauss). On pose $Q(x) = \sum_i a_{ii}x_i^2 + \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j$. Alors Q admet une décomposition en carrés (ie en carrés de formes linéaires) dont le nombre de formes linéaires non nulles est le rang de Q . De plus, on connaît un moyen effectif de le faire.

1. Si un des a_{ii} est non nul, par exemple a_{11} . $Q(x) = a_{11}x_1^2 + x_1B + C$, B linéaire en $(x_2, \dots, x_n)$, C quadratique en $(x_2, \dots, x_n)$. $Q(x) = a_{11}(x_1 + B/2a_{11})^2 + [C - B^2/4a_{11}]$. On réapplique l'algorithme à la partie entre crochets.
2. Si tous les a_{ii} sont nuls. Soit tous les a_{ij} sont nuls et l'algorithme s'arrête, soit un est non nul, par exemple a_{12} . $Q(x) = a_{12}x_1x_2 + x_1B + x_2C + D$, B, C linéaire, D quadratique en $(x_3, \dots, x_n)$. $Q(x) = a_{12}/4 * [(x_1 + x_2 + (B+C)/a_{12})^2 - (x_1 - x_2 + (C-B)/a_{12})^2 + [D - (B+C)/a_{12}]]$ et on réapplique l'algorithme à la partie entre crochets.

Définition 3. On appelle déterminant de Q dans la base B la quantité $\det(M_B(Q))$. On appelle discriminant de Q n'importe lequel des déterminants dans une base. C'est donc une quantité définie aux carrés dans $\mathbb{F}_q$ près.

Corollaire 2. Deux formes quadratiques équivalentes ont même discriminant

Corollaire 3. Dans $\mathbb{C}$ (ou dans n'importe quel corps algébriquement clos), deux matrices sont congruentes ssi elles ont même rang, deux formes quadratiques sont équivalentes ssi elles ont même rang.

Théorème 1. Dans les F_q il y a deux classes de forme quadratiques non dégénérées, Id et un α qui n'est pas un carré au dernier coef. On en déduit les classes de formes quadratiques dégénérées!!?

1.3 Orthogonalité

Définition 4. Deux vecteurs sont dit orthogonaux pour q ssi $\varphi(x, y) = 0$.

Définition-proposition 3. L'orthogonal d'une partie est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A . C'est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 5. Le noyau de q est E^t . Une forme est dite non dégénérée ssi son noyau est trivial, dégénère sinon.

Remarque 2. On fait le lien avec l'étude des formes linéaires en remarquant que $\varphi(x, \cdot)$ et $\varphi(\cdot, y)$ sont toutes les deux des formes linéaires, et donc les applications $x \mapsto \varphi(x, \cdot)$ et $y \mapsto \varphi(\cdot, y)$ sont des applications linéaires de E dans son dual E^* , dont la matrice dans une base B, B^* est $M_B(\varphi)$. Ainsi, on a que le noyau de Q est le noyau de la matrice $M_B(Q)$.

Proposition 5. ${}^\perp A$ est un sev de E , ${}^\perp \text{vect} A = {}^\perp A$, ${}^\perp 0 = E$, ${}^\perp(A \cup B) = {}^\perp A \cap {}^\perp B$, ${}^\perp A + {}^\perp B \subset {}^\perp(A \cap B)$, $\dim(H) + \dim({}^\perp H) = \dim E + \dim(f \cap \text{Ker } Q)$.

Proposition 6. Si une forme quadratique est non dégénérée on a ${}^\perp {}^\perp A = A$, $\dim(A) + \dim({}^\perp A) = \dim E$ mais A et ${}^\perp A$ ne sont pas nécessairement en somme directe.

1.4 Isotropie

Définition 6. un vecteur est dit isotrope ssi $q(x) = 0$. le cône isotrope est l'ensemble des vecteurs isotropes. Une f_q est dite définie ssi son cône isotrope est trivial.

Définition 7. Un sev est dit totalement isotrope ssi tous ses vecteurs sont isotropes. Il est dit setim ssi il est maximal pour l'inclusion

Proposition 7. 1. $\text{Ker}(q) \subset C(q)$

2. F non isotrope ssi F et $F^\perp$ sont d'intersection triviale ssi F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale dans E

3. F seti $\Leftrightarrow F \subset F^\perp$, ce qui implique $2\dim(F) \leq \dim E$, pour q non dégénérée.

2 Cas des formes quadratiques non dégénérées

Dorénavant la forme quadratique est non dégénérée.

2.1 SETIM et indice

Proposition 8. tout seti est inclus dans un SETIM

Définition 8. Lagrangien = setim de dimension $\dim(E)/2$ (si il en existe).

2.2 espaces hyperboliques

Définition 9. un plan (P, q) est dit hyperbolique ssi $q(e_1) = 0, q(e_2) = 0$ et $f(e_1, e_2) \neq 0$.

Théorème 2. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. (P, q) est un plan hyperbolique
2. q est non dégénérée non définie
3. Le discriminant de q est égal à -1 à un carré près

Application 1. On peut toujours englober un vecteur isotrope dans un plan hyperbolique (sur un espace q).

Définition 10. Espace hyperbolique: somme orthogonale de r plans hyperboliques P_r . La forme quadratique q est dite hyperbolique.

Proposition 9. Si on se donne une base (e_i, ε_i) de chacun des plans, alors la matrice dans la base $e_1, \dots, e_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ est $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$. Dans une autre base convenable, la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$.

Théorème 3. Tout SETIM est inclus dans une extension hyperbolique (ie H de dimension double tel que H est hyperbolique.)

2.3 Théorème de Witt

Théorème 4. On considère F et F' deux sev de E . Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. Il existe $u \in O(q)$ tq $u(F) = F'$.
2. $q|_F$ et $q|_{F'}$ sont équivalentes.
3. Il existe une isométrie σ relativement à $q|_F$ et $q|_{F'}$

Corollaire 4. Les setim ont tous même dimension appelée indice de q noté $v(q)$

Corollaire 5. Tout espace E se décompose de manière orthogonale en H et G avec H hyperbolique et G est anisotrope. nécessairement, on a $2v(q) = \dim(H)$. De plus, deux décompositions diffèrent d'un élément de $O(q)$. Enfin, si on pose q_a la forme quadratique anisotrope, elle est entièrement déterminée par q à équivalence près.

Ceci permet de préciser la classification des formes quadratiques.

Théorème 5. deux formes quadratiques non dégénérées sont équivalentes ssi elles ont même indice et que les formes anisotropes sont équivalentes.

2.4 Groupe orthogonal

Définition 11. groupe des isométries de q : $O(q)$ c'est les u tq $q(u(x)) = q(x)$. $O^+(q)$ de même avec $\det(u) = 1$.

Remarque 3. deux formes quadratiques équivalentes donnent des groupes orthogonaux isomorphes.

Lemme 1. Si u est une symétrie orthogonale par rapport à F et g un endo orthogonal, alors gug^{-1} est une symétrie orthogonale par rapport à $g(F)$.

Théorème 6. $O(q)$ est engendré par les réflexions, et même par au plus n réflexions (th de Cartan-Dieudonné). Si $n \geq 3$, $So(q)$ est engendré par les demi-tours.

3 Le cas des formes quadratiques réelles

3.1 Théorème d'inertie de Sylvester

[?]

Théorème 7. On suppose E de dimension finie n . On peut décomposer Q sous la forme suivante: $Q(x) = f_1(x) + \dots + f_p(x) - f_{p+1}(x) - \dots - f_{p+q}(x)$, où les f sont des formes linéaires indépendantes. Toute autre décomposition de Q sous la forme $Q(x) = f'_1(x) + \dots + f'_{p'}(x) - f'_{p'+1}(x) - \dots - f'_{p'+q'}(x)$ où les formes linéaires sont aussi indépendantes est tel que $p = p'$ et $q = q'$.

Définition 12. Signature de $Q =$ couple (p, q) .

Remarque 4. 1. $p + q = \text{rg} Q$

2. Si l'on trouve 3 sev de E notés F^+, F^- et F^0 qui sont en somme directe Q -orthogonale de somme E , avec Q déf pos sur F^+ , déf neg sur F^- et nulle sur le dernier, Alors la signature est $(\dim F^+, \dim F^-)$. Inversément la démo du théorème précédent montre qu'on peut trouver de tels sev

Proposition 10. Si l'on effectue l'algorithme de Gauss à une forme quadratique réelle, On obtient $Q = \lambda_1 L_1^2 + \dots + \lambda_p L_p^2 - \lambda_{p+1} L_{p+1}^2 - \dots - \lambda_q L_q^2$ avec les formes linéaires indépendantes. La signature est alors (p, q) .

Exemple 3. 1. $Q(x, y, z, t) = xy + yz + xz + yz = 1/4 * ((x + y + z + t)^2 + (x + z - y - t)^2)$ de signature $(1, 1)$ et de rang 2.

2. $Q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz = (x + z/2)^2 - 2(y - z/4)^2 - z^2/8$ de signature $(1, 2)$ de rang 3.

Théorème 8. Deux formes quadratiques réelles sur un ev de dim finie sont équivalentes ssi elles ont même signature. Deux matrices sont dans la même classe de congruence ssi les formes quadratiques associées ont même signature.

3.2 Réduction des formes quadratiques réelles en dimension finie

Théorème 9. Soit B une base de E . Soit $A = M_B(Q)$. Alors A est orthogonalement semblable à une matrice diag diag (λ_i) .

Corollaire 6. La signature est $(\text{Card}\{\lambda_i > 0\}, \text{Card}\{\lambda_i < 0\})$

Théorème 10. Si Q est définie positive, et si Q' est une autre forme quadratique, alors il existe une base B qui est Q -orthonormée et telle que $M_B(Q')$ diagonale.

3.3 Cône isotrope

Proposition 11. Supposons E de dimension finie. Si Q est non dégénérée et non définie, il existe une base de vecteurs isotropes (fqn ou Gourdon). Si B est une base et $\text{Tr}(M_B(\varphi)) = 0$ alors le cône isotrope contient une BON de vecteurs isotropes (fqn 3).

Remarque 5. En dimension 2, seulement deux droites dans le cône isotrope.

Remarque 6. Si Q est positive (ou négative), $C(Q) = \text{Ker}(Q)$ et le cône isotrope est un ev. D'habitude on a juste $\text{Ker}(Q) \subset C(Q)$. d'ailleurs la réciproque est vraie.

Théorème 11. l'indice de Q est $\min(p, q)$.

Proposition 12. Une forme quadratique réelle est hyperbolique ssi sa signature est de la forme (p, p) .

3.4 Coniques

Définition 13. Une conique est une courbe donnée par une des équations implicites suivantes:

1. $y^2 = 2px$: parabole de sommet 0, d'axe Ox , de foyer $(0, p/2)$.
2. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, a \leq b$: ellipse de center 0, de demi grand-axe suivant Ox de longueur a , de demi petit-axe de longueur b selon Oy , d'excentricité $e = c/a$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, de paramètre $p = b^2/a$, de foyers $(0, c)$ et $(0, -c)$.
3. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$: hyperbole de centre 0, d'excentricité $e = c/a$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, de paramètre $p = b^2/a$, de foyers $(0, c)$ et $(0, -c)$.

Définition 14. Une courbe du second degré est une courbe algébrique définie comme annulant un polynôme de degré 2 à deux variables.

Pour étudier une telle courbe, on isole la partie quadratique Q , que l'on réduit, puis on change de repère pour obtenir quelque chose du type $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$, et on reconnaît soit une conique soit un cas dégénérée (vide, un point, deux droites concourantes...)

Exemple 4. $[?]/13x^2 + 64y^2 + 62xy = 1$: ellipse centrée en 0

Exemple 5. $x^2 + y^2 = 0$: un point, $x^2 + y^2 = -1$: vide, $x^2 - y^2 = 0$: deux droites...

4 Quadriques

Définition 15. Une quadrique est une surface donnée implicitement par une des neuf équations réduites suivantes:

1. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$: ellipsoïde
2. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$: cône du second degré
3. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$: hyperboloïde à une nappe
4. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$: hyperboloïde à deux nappes
5. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$: cylindre elliptique
6. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$: cylindre hyperbolique
7. $x^2 = 2pz$: cylindre parabolique
8. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z$: parabolôïde elliptique
9. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = z$: parabolôïde hyperbolique

Définition 16. Surface du second degré = courbe algébrique annulant un polynôme à trois variables de degré 2.

Méthode d'étude identique.

Exemple 6. $[?]/4xy - z^2 - 1 = 0$: hyp à deux nappes

Exemple 7. $4xy - z^2 - 1 + 2x - 4y = 0$: hyp à une nappe

4.1 Hessienne

Rappel: Soit E un espace de Banach et f une application deux fois différentiable d'un ouvert U de E à valeurs réelles. Alors $df(x)$ est une forme bilinéaire symétrique et son carré est une forme quadratique. Rappelons l'isométrie $\mathcal{L}_c(E, E') \simeq (E \times E, \mathbb{R})$. Enfin, rappel sur la Hessienne: matrice symétrique telle que $d^2f(h, k) = \langle H_f(x)h, k \rangle$.

4.2 Conditions d'extrema

On se ramène tjrs à des mins quitte à changer f en $-f$. Rappel: x est un extremum $\Rightarrow df(x) = 0$.

Théorème 12. *Si f admet un min local en a , $d^2f(a)$ est positive. Si $df(a) = 0$ et $d^2f(a)$ est déf positive on a un minimum strict en a .*

Toutes les réciproques sont fausses.

References

[1]