

Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications

Pierre Lissy

December 22, 2009

Dans toute la suite E est un K -ev de dimension finie n .

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Formes linéaires

Définition 1. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K .

Exemple 1. $(x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z$

$P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P(0)$

$Tr : A \mapsto \sum a_{ii}$

$P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)}{1+t^2} dt$

2 Dual

Définition-proposition 1. L'ensemble des formes linéaires sur E est un espace vectoriel appelé dual de E .

Définition-proposition 2. Soit e_i une base de E . On appelle base duale des e_i la famille des formes linéaires coordonnées, notée e_i^* . On montre que c'est bien une base de E^* . E^* est donc de dimension n .

Remarque 1. E et E^* sont isomorphes si et seulement si E est de dimension finie (car $\varphi(\sum x_i e_i \mapsto \sum x_i)$ ne peut être représentée par un vecteur de E).

Proposition 1. [1] Toute forme linéaire sur $M_n(K)$ est de la forme $Tr(A \cdot)$.

3 Hyperplan

Définition 2. La codimension d'un sev F est la dimension de l'espace quotient E/F . C'est aussi la dimension de n'importe quel supplémentaire de F ; En dimension finie c'est $\dim(E) - \dim(F)$

Définition 3. On appelle hyperplan de E tout sev vectoriel de E de codimension 1 (donc de dimension $n-1$)

Proposition 2. Tout hyperplan de E est en somme directe avec n'importe quelle droite non incluse dans H .

Théorème 1. Tout noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan; Inversément, tout hyperplan est le noyau d'une certaine forme linéaire non nulle. De plus, deux formes linéaires définissant le même hyperplan sont colinéaires.

Exemple 2. $\{A | Tr(A) = 0\}$ est un hyperplan vectoriel. On montre qu'il est égal à l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $AB - BA$, avec A et B dans $M_n(\mathbb{K})$.

$\{(x, y, z) | 2x - 3y + z = 0\}$ est un hyperplan vectoriel.

$\{P | P(0) = 0\}$ est un hyperplan vectoriel.

3.1 Bidual

Définition 4. On appelle bidual de E le dual du dual de E , ie $(E^*)^*$, noté E^{**} .

Théorème 2. $J : x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$ est un isomorphisme canonique (ie indépendant de toute base) de E dans E^{**} tel que $\|J(x)\| = \|x\|$ pour toute norme subordonnée à une norme sur E .

Corollaire 1. Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* , il existe une unique base de E telle que $\varphi_i = e_i^*$. Cette base est appelée base antéduale de la base des $(\varphi(i))$.

Application 1 (Polynôme d'interpolation de Lagrange). Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ n points de $\mathbb{R}$ distincts et $(y_1, \dots, y_{n+1})$ n points de $\mathbb{R}$. Il existe un unique polynôme P de degré n tel que $\forall i, P(x_i) = y_i$. Ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange des points $(y_1, \dots, y_{n+1})$ aux points $(x_1, \dots, x_{n+1})$. De plus, ce polynôme s'écrit sous la forme $P_j(x) = \sum y_j l_j(x)$, où l_j est la base antéduale de la base de $\mathbb{R}_n[X]^*$ formée des applications linéaires qui à un polynôme associe sa valeur en x_i . On peut calculer explicitement le polynôme d'interpolation de Lagrange par la formule $l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}$. De plus, tout polynôme Q qui vérifie $Q(x_i) = y_j$ est de la forme PR , où $R \in \mathbb{R}[X]$.

4 Orthogonalité

4.1 Définition

Définition 5. $x \in E$ et $f \in E^*$ sont dit orthogonaux ssi $f(x) = 0$. Soit X une partie de E , on appelle $X^\perp = \{f \in E^* | \forall x \in X, f(x) = 0\}$. Soit Y une partie de E^* , $X^\circ = \{x \in E | \forall f \in Y, f(x) = 0\}$.

Proposition 3. On a $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_2^\perp \subset A_1^\perp$, $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_2^\circ \subset A_1^\circ$, $X^\perp = \bar{X}^\perp = (\text{vect} X)^\perp$, $X^\perp$ est un sev de E^* , $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$, Idem avec $^\circ$ car on a $J(F^\circ) = F^\perp$.

Proposition 4. $A^{\perp \circ} = A$, $A^{\circ \perp} = A$, $\dim F + \dim F^\perp = E$, $\dim F + \dim F^\circ = E$.

Corollaire 2. $A = E$ si et seulement si l'orthogonal de A est réduit à 0.

4.2 Application transposée

Définition 6. Soient E et F deux K -ev de dimension finie. Soit $f \in L(E, F)$. On appelle application transposée de f , notée ${}^t f$, l'application $f \in E^* \mapsto fu$.

Proposition 5. La transposée d'un endomorphisme est linéaire et c'est la seule application v de F^* vers E^* qui vérifie $v(y(x)) = y(u(x))$.

Proposition 6. L'application qui à une al associe sa transposée est un isomorphisme appelé transposition.

Proposition 7. ${}^t(uv) = {}^t v {}^t u$, si u est inversible sa transposée aussi et $({}^t u)^{-1} = {}^t (u^{-1})$, $J(u) = {}^{tt} u$, $\text{Ker } {}^t u = \text{Im}(u)^\perp$, $\text{Im } {}^t u = \text{Ker}(u)^\perp$, donc u injective (resp. surjective) ssi ${}^t u$ surjective (resp. injective).

Proposition 8. G stable par u ssi $G^\perp$ stable par ${}^t u$

Théorème 3. Si B est une base de E , B' une base de F , et B^* , B'^* les bases duales, alors $M_{B, B'}(u) = {}^t (M_{B'^*, B^*}({}^t u))$. Notamment si u est un endomorphisme, $M_B(u) = {}^t (M_{B^*}({}^t u))$. Ainsi, si P est la matrice de passage de B à C , celle de B^* à C'^* est ${}^t P^{-1}$. Donc $M_{C'^*, C}(u) = {}^t P {}^t M_B(u) P$.

Ce théorème permet de calculer facilement la base antéduale d'une base de E^* .

Exemple 3. [1] Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E . la base antéduale de $(2e_1^* + e_2^* + e_3^*, -e_1^* + 2e_3^*, e_1^* + 3e_2^*)$ est la base $1/13 * (6e_1 - 2e_2 + 3e_3, -3e_1 + e_2 + 5e_3, -2e_1 + 5e_2 - e_3)$.

Corollaire 3. u et ${}^t u$ ont même déterminant, même polynôme minimal, même polynôme caractéristique, même rang, même valeurs propres, même invariants de similitude, etc.

Ce corollaire permet avec la remarque sur la stabilité des sev de faire des raisonnements par récurrence. Par exemple on peut montrer le théorème suivant en se servant de cette remarque: si x est un vecteur propre de ${}^t u$ alors $(Kx)^\circ$ est un hyperplan stable de u .

Application 2. Un endomorphisme de E est trigonalisable ssi il admet un annulateur scindé.

On peut aussi utiliser cette remarque pour démontrer le théorème suivant:

Théorème 4. Soit $u \in L(E)$, il existe une unique suite de polynôme $P_1 | P_2 \dots | P_r$ tels qu'une matrice de u est la matrice diagonale par blocs formée des matrices compagnons des P_i .

5 Application à l'étude des formes bilinéaires[1][3]

5.1 Définitions

Définition 7. Une forme bilinéaire sur K est une application de $E \times E$ dans K linéaire par rapport à chacune de ses variables. l'espace des formes bilinéaires sur E est un espace vectoriel.

Exemple 4. $(x, y) \mapsto xy$ est une forme bilinéaire sur K .

Remarque 2. On fait le lien avec l'étude des formes linéaires en remarquant que $a(x, \cdot)$ et $a(\cdot, y)$ sont toutes les deux des formes linéaires, et donc les applications $x \mapsto a(x, \cdot)$ et $y \mapsto a(\cdot, y)$ sont des applications linéaires de E dans son dual E^* . On les notera I et J .

Définition 8. a est dite symétrique (resp antisymétrique) ssi $a(x, y) = a(y, x)$ (resp $a(x, y) = -a(y, x)$), ie. $I=J$ (resp $I = -J$). L'ensemble des formes bil (anti)sym est un espace vectoriel.

Définition 9. On appelle forme quadratique le carré d'une forme linéaire, ie $Q(x) = a(x, x)$. L'ensemble des formes quadratiques sur E forme un espace vectoriel.

Théorème 5. Soit Q une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire symétrique a telle que $a(x, x) = Q(x)$. Elle est appelée forme polaire associée à Q .

5.2 matrice d'une forme bilinéaire,quadratique

Définition 10. On appelle matrice de a dans la base $B=e_1, \dots, e_n$ la matrice $a(e_i, e_j)$. C'est donc la matrice de la famille des formes linéaires $(a(e_i, \cdot))$ dans la base B^* , ou alors la transposée de la matrice des $a(\cdot, e_i)$ dans la base B^* . La matrice d'une forme quadratique est la matrice de sa forme polaire.

Théorème 6. L'application qui a une application bilinéaire associe sa matrice dans une base est un isomorphisme. Donc l'ev des app bil est de dim n^2 .

Proposition 9. Si X et Y représentent les vecteurs x et y dans la base B , et que M est la matrice de a dans la base B Alors $a(x, y) = {}^t XMY$.

Proposition 10. Soit P la matrice de passe de B à B' , M la matrice de a dans B . Alors la matrice de a dans B' est ${}^t PMP$.

Définition 11. Deux matrices A et B qui vérifient la relation $A = {}^t PBP$ avec P inversible sont dites congruentes. C'est ie relation d'équivalence, les classes d'équivalences sont appelées classes de congruence.

Théorème 7. Une forme bilinéaire est symétrique (resp. antisymétrique) ssi sa matrice dans n'importe quelle base est symétrique (resp. antisymétrique). l'espace vectoriel des formes bil sym (resp antisym) est donc de dim $n(n+1)/2$ (resp. $n(n-1)/2$).

5.3 Rang, noyau d'une forme bilinéaire ou quadratique. Orthogonalité

Proposition 11. Les applications I et J ont le même rang, que l'on appellera le rang de a . Le rang d'une forme quadratique sera le rang de sa forme polaire.

Proposition 12. Le rang de a est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelle base de E .

Définition 12. Deux vecteurs e et e' sont dit orthogonaux pour a (ou pour Q) ssi $a(e, e') = 0$. Une famille de vecteurs de E est dite orthogonale pour a ssi tous les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Définition 13. Soit A une partie de E . Soit a la forme polaire de Q . On appelle orthogonal de A l'ensemble suivant: $\{y \in E | a(x, y) = 0, \forall x \in A\}$. C'est donc l'orthogonal au sens des formes linéaires du sous-ensemble suivant de E^* : $\{a(x, \cdot) | x \in A\}$. L'orthogonal de E est appelé le noyau de a .

Proposition 13. ${}^\perp A$ est un sev de E , ${}^\perp \text{vect} A = {}^\perp A$, ${}^\perp 0 = E$, ${}^\perp (A \cup B) = {}^\perp A \cap {}^\perp B$, ${}^\perp A + {}^\perp B \subset {}^\perp (A \cap B)$, $\dim(H) + \dim({}^\perp H) \geq E$.

Définition 14. Une forme quadratique de noyau réduit à 0 est dite non dégénérée. Dans ce cas, on identifie E et E^* au moyen de J (ou de I) qui est un isomorphisme.

Proposition 14. Si une forme quadratique est non dégénérée on a ${}^{\perp\perp} A = E$, $\dim(A) + \dim({}^\perp A) = \dim E$ mais A et ${}^\perp A$ ne sont pas nécessairement en somme directe.

6 Réduction des matrices symétriques et antisymétriques dans un corps quelconque

Le théorème suivant utilise la formes linéaire $I(=J$ ici).

Théorème 8. *Il existe une base de E orthogonale pour Q .*

Remarque 3. *Traduit matriciellement, ce système nous donne la classe de congruence d'une matrice symétrique: c'est l'ensemble des matrices congruentes à une certaine matrice diagonale, qui est la valeur sur une base orthogonale de $a(e_i, e_i)$*

Remarque 4. *Le rang apparaît alors clairement: c'est le nombre de coefficients diagonaux non nuls.*

Grâce à la forme linéaire I , on peut aussi donner un résultat de réduction sur les formes antisymétriques.

Application 3. *Toute matrice antisymétrique sur K s'écrit sous la forme d'une matrice diagonale par blocs avec soit des blocs 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a/a \\ a/a & 0 \end{pmatrix}$ ou alors des 0.*

6.1 Cas réel

En utilisant la remarque sur la réduction des endomorphismes, on peut démontrer par récurrence le résultat suivant:

Théorème 9. *Toute matrice symétrique sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme ${}^{\perp}PDP$, avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale.*

7 Autres applications

7.1 Equations d'un sous-espace vectoriel ou affine

Théorème 10. *Soit p formes linéaires de E^* notées f_i . Alors $\dim \bigcap_{Ker(f_i)} = n - rg((f_i))$. Inversément, si F est un sev de E de dimension r alors il existe $n - r$ formes linéaires indépendantes (f_i) telles que $\bigcap_{Ker(f_i)} = F$.*

Remarque 5. *Ce théorème dit que si l'on se donne un sev de dimension r , alors ce sev peut être représenté comme la solution à $n-r$ équations linéaires indépendantes. C'est juste la traduction en terme d'équations d'autres résultats déjà vus.*

Théorème 11. *Soit F un sous-espace affine de dimension r , et soit x_0 un point de F , alors il existe $n - r$ formes linéaires indépendantes (f_i) telles que $\bigcap Ker(f_i) + x_0 = F$.*

Application 4 (Intersection de sous-espaces en dimension 3). *Soit un espace vectoriel affine représenté par trois équations de la forme $\varphi_1(x) = b_1, \varphi_2(x) = b_2, \varphi_3(x) = b_3$. Alors*

1. *Soit les trois formes linéaires sont indépendantes et alors les 3 plans s'intersectent en un unique point, (ie la matrice des φ_i est inversible), que l'on peut facilement trouver en inversant une matrice.*
2. *Soit les trois formes linéaires sont linéairement dépendantes et leur rang est 2, par exemple $\varphi_3 = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$. Alors si $b_3 \neq \lambda b_1 + \mu b_2$ on a pas de solutions, sinon une droite solution.*
- 3.
4. *Soit les trois formes linéaires sont linéairement dépendantes et le rang est 1, dans ce cas on a un hyperplan ou pas de solutions.*

7.2 Endomorphismes en dimension finie[1]

Théorème 12. *Tout espace vectoriel en dimension finie s'écrit comme somme de deux endomorphismes*

7.3 Générateurs du groupe $O_n(\mathbb{R})$

Définition 15. *Un endomorphisme d'un espace euclidien est appelé réflexion ssi c'est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.*

Théorème 13 (Cartan-Dieudonné). *Tout élément de $O_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme produit d'au plus n réflexions. Plus exactement, tout élément de $SO_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme produits d'au plus $n-1$ réflexions et tout produit de $O_n^-(\mathbb{R})$ s'écrit comme produit d'au plus n réflexions.*

7.4 Hahn-Banach géométrique en dimension finie

Définition 16. On dit qu'un hyperplan sépare (au sens struct) deux ensembles au sens large si il existe un hyperplan tel que l'une des parties soit (strictement) au-dessus d'hyperplan et l'autre (strictement) au-dessous.

Théorème 14. On peut séparer un convexe et un ouvert convexe disjoint au sens large. On peut séparer un convexe fermé et un convexe compact au sens strict.

Application 5. Tout convexe fermé d'un evn de dim finie s'écrit comme intersection de demi-espaces.

Application 6. La boule fermée unité pour la norme infinie est l'enveloppe convexe de $\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) | \varepsilon_i = 1, -1\}$.

Application 7. L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$.

Application 8 (Hyperplans d'appui). [2] Soit f une fonction convexe à valeurs réelles sur un ouvert convexe C de $\mathbb{R}^n$ de graphe Γ . On appelle hyperplan d'appui en un point $M(a)$ du graphe tout hyperplan passant par $M(a)$ et situé "en dessous" de Γ . Alors tout point du graphe admet un hyperplan d'appui. De plus, cet hyperplan est unique si la fonction est différentiable en ce point et alors l'hyperplan d'appui est l'hyperplan tangent au graphe, ie l'hyperplan d'équation $y = (\nabla f(a).x)$.

Developpements: Hahn-Banach géométrique en dimension finie + applications aux hyperplans d'appui d'une fonction convexe, invariants de similitude d'un endomorphisme (démon utilisant l'orthogonalité)

References

- [1] Gourdon algèbre
- [2] Choquet
- [3] Lelong-Ferrand Arnaudiès algèbre