

133: endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie

Pierre Lissy

March 8, 2010

On considère un espace vectoriel euclidien de dimension finie n , le produit scalaire sera noté $(\cdot, \cdot)$.

1 Endomorphismes normaux

1.1 Adjoints

Définition-proposition 1. Soit $u \in L(E)$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in L(E)$ tel que pour tout x, y , $(u(x), y) = (x, u^*(y))$

Proposition 1. 1. L'application $*$ est une symétrie par rapport aux endomorphismes symétriques parallèlement aux endomorphismes antisymétriques.

2. $(uv)^* = v^*u^*$

3. ${}^t\ker(u) = \operatorname{Im}(u^*)$, ${}^t\operatorname{Im}(u) = \ker(u)$.

4. F stable par $u \Leftrightarrow {}^tF$ stable par u^* .

5. En fait on identifie l'adjoint et la transposée par la bijection entre E et E^* .

6. La matrice dans la base B de u^* est la transposée de celle de u

7. On en déduit que le rang, le spectre, le polynôme minimal, le polynôme caractéristique, ... se conserve par passage à l'adjoint

Définition 1. Un endomorphisme est dit normal ssi $uu^* = u^*u$, auto-adjoint ou symétrique ssi $u^* = u$, antiauto-adjoint ou antisymétrique ssi $u^* = -u$. Evidemment un endo sym ou antisym est normal.

Proposition 2. Un endomorphisme est normal ssi $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ pour tout x .

Proposition 3. Les sous-espaces propres de u sont stables par u^* .

1.2 réduction des endomorphismes normaux

[1]

Théorème 1. On considère un endomorphisme normal. Alors f est diagonalisable par bloc avec soit des blocs diagonaux de taille 1 (sous-espaces propres) soit des blocs diagonaux de taille 2 plans stables. Dans ce dernier cas si l'on donne une base (x, y) du plan stable, on a $f(x) = ax + by \Rightarrow f(y) = -bx + ay$.

1.3 Endomorphismes antisymétriques

Remarque 1. Le spectre réel d'un endomorphisme antisymétrique (ie anti-auto-adjoint) est soit vide, soit réduit à 0. En dimension impaire, un endomorphisme anti-symétrique ne peut jamais être inversible.

Théorème 2. Tout endomorphisme antisymétrique est diagonalisable par blocs avec soit des blocs nuls soit des blocs de taille 2 antisymétriques avec des 0 sur la diagonale.

2 Le cas des endomorphismes symétriques

2.1 Réduction des endomorphismes symétriques

Théorème 3 (spectral). Tout endomorphisme de E est diagonalisable en bases orthonormées. u s'écrit comme une combinaison linéaire de projecteurs orthogonaux dont la somme vaut Id (projecteurs sur les sos-espaces propres).

2.2 Projecteurs orthogonaux

Définition-proposition 2. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. u est un projecteur orthogonal
2. u est un projecteur auto-adjoint
3. $|||u||| = 1$
4. $|||u||| \leq 1$

Un tel projecteur est appelé projecteur orthogonal.

Remarque 2. [4] On considère une BON, alors $\sum ||p(e_i)||^2$ est le rang du projecteur, ie sa trace.

Proposition 4. [4] On considère un endomorphisme u telle qu'il existe une partie A , pour tout x dans A , $v(x) \in A$ et $x - v(x) \in A^\perp$. Alors A est un espace vectoriel et v est le projecteur orthogonal sur A .

Théorème 4. On considère deux projecteurs orthogonaux p et q . Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. p et q commutent
2. pq est un projecteur
3. il existe une BON de diagonalisation commune à p et q

Proposition 5. on considère un endomorphisme de E de norme subordonnée plus petite que 1. Alors $E = \text{Ker}(\text{Id} - u) \oplus \text{Im}(\text{Id} - u)$ et la suite des moyennes des itérées de u converge vers le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(u - \text{Id})$.

Théorème 5. [4] Le produit de deux projecteurs orthogonaux est diagonalisable de spectre inclus dans $[0; 1]$.

2.3 Endomorphismes symétriques positifs, définie positifs

Définition 2. Un endomorphisme auto-adjoint est dit (déf) positif ssi $(Ax, x) \geq 0$ (resp > 0 pour $x \neq 0$). Ensemble des endomorphismes sym(éf) pos: S_n^+, S_n^{++} .

Proposition 6 (Schwarz). $|\varphi(x, y)|^2 \leq q(x)q(y)$ Si def pos égalité ssi colinéaires.

Proposition 7 (Minkovski). $Q(x + y) \leq Q(x) + Q(y)$.

Si def pos égalité ssi positivement colinéaires.

Théorème 6. l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{Z}_n^{++}(\mathbb{R})$, et même un C^∞ difféomorphisme.

2.4 Décomposition de Cholevski et résolution de système linéaire

3 Endomorphismes orthogonaux

3.1 Définitions

Définition-proposition 3. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. u conserve la norme
2. u conserve le produit scalaire
3. $uu^* = Id$
4. u transforme un BON en une BON

Un tel morphisme est appelé endomorphisme orthogonal ou isométrie.

Exemple 1. Une symétrie orthogonale est une isométrie, contrairement à un projecteur orthogonal (sauf si c'est Id ou $-Id$).

Proposition 8. 1. Le déterminant d'un endomorphisme orthogonal est 1 ou -1

2. L'ensemble des isométries est un groupe pour la composition, non commutatif en général
3. On considère la représentation d'une isométrie dans une BON. Alors la somme des coeff aux carrés sur les lignes et les colonnes est égale à 1.
4. Pour la représentation dans une BON, on a ${}^tAA = I_n$.
5. Un endomorphisme orthogonal est bijectif d'inverse u^* .

Définition 3. Le groupe spécial orthogonal est le groupe des isométries de déterminant égal à 1, noté $SO(E)$ et $O^+(E)$. Isométries directes. Les isométries indirectes sont les autres, notée $O^-(E)$. Ce n'est pas un groupe en général.

Proposition 9. [3] Si on se donne deux espaces de même dimension, on peut trouver une isométrie positive qui envoie l'un sur l'autre. On considère deux symétries orthogonales de même nature (ie telles que les espaces par rapport auquel se fait la symétrie sont de même dimension). Alors ils sont conjugués par un élément de $SO(E)$.

3.2 Réduction des endomorphismes orthogonaux

3.3 Endomorphismes orthogonaux en dimension deux et trois

Théorème 7. Dans un espace euclidien de dimension 2, les isométries sont uniquement les rotations, et les isométries indirectes

Proposition 10. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif

On suppose maintenant E orienté.

Définition-proposition 4. La matrice d'une isométrie directe est la même dans toute BON. Angle d'une rotation = le θ de cette matrice.

Proposition 11. $tr(u) = 2\cos(\theta)$. Soit x un vecteur unitaire. $[x, u(x)] = \sin(\theta)$.

Proposition 12. La composition de deux symétries est une rotation d'angle le double de l'angle entre les deux symétries. La composée d'une symétrie et d'une rotation est une symétrie par rapport à la droite dont l'angle avec la première est la moitié de l'angle de la symétrie.

Théorème 8. Dans un espace euclidien de dimension 3, les seules isométries directes sont les rotations par rapport à un axe. Les isométries indirectes s'en déduisent facilement, ce sont les opposées des isométries directes. Il y a dedans les symétries par rapport à un plan.

On considère maintenant E orienté.

Définition-proposition 5. *On considère un plan orienté et la droite orthogonale orientée de telle sorte d'obtenir une orientation cohérente avec elle de E . Alors la matrice dans n'importe quelle BOND telle que sur le plan on est une BOND du plan d'une rotation est indépendante d'une telle BOND. Angle = le theta correspondant.*

Proposition 13. $Tr(u) = 1 + 2\cos(\theta)$. On considère un vecteur directeur direct de la droite, et un vecteur y du plan. $[x, y, u(y)] = \sin(\theta)$

Proposition 14. [4] les seuls endomorphismes en dimension 3 qui conservent le produit vectoriel sont les rotations.

3.4 Etude topologique et analytique des groupe de $O(E)$ et $SO(E)$ [3]

Proposition 15. $O(E)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$, tout comme $SO(E)$.

Théorème 9. $O(E)$ a deux composantes connexes qui sont $SO(E)$ et $O^-(E)$. Ces composantes connexes sont de plus connexes par arcs.

Remarque 3. Le groupe $SO(E)$ n'est pas simplement connexe. En effet on peut montrer que son groupe fondamental (ie les classes d'équivalences de chemins partant de l'Id muni de la concaténation de chemins et de l'inversion de chemins, dont l'élément neutre est le chemin constant à Id) est Z_2 .

Proposition 16. $O_n, SO_n(\mathbb{R})$: espace tangent en Id est les matrices telles que ${}^tM = -M$, variété de dimension $n(n-1)/2$

On a le résultat remarquable suivant [4]

Proposition 17. Tout sous-groupe compact de $GL(E)$ est inclus dans un conjugué de $O(E)$. Tout sous-groupe compact maximal de $GL(E)$ est conjugué à $O(E)$.

3.5 Etude algébrique de ses groupes

Proposition 18. Le centre de $O(E)$ est Id et $-Id$, celui de $SO(E)$ est Id en dimension impaire, Id et $-Id$ en dimension paire. En dimension paire, $O(E)$ est isomorphe à un produit semi-direct $O(E) \rtimes Z_2$, dans le cas impair $O(E) \times Z_2$.

Définition 4. Groupe projectif orthogonal: on quotiente $O(E)$ par son centre, noté $PO(E)$, de même $PO^+(E)$. En dimension paire, $PSO(E) = SO(E)$.

Proposition 19. $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément, il est produit d'au plus n réflexions orthogonales. Dans le cas de $SO(E)$ on a un nombre pair de réflexions, sinon un nombre impair. Enfin, $SO(E)$ est engendré par les renversements (réflexion par rapport à un plan)

Proposition 20. $D(SO(E)) = D(O(E)) = SO(E)$.

Théorème 10. $SO(E)$ est simple en dimension 3. $PSO(E)$ est simple pour $n \geq 5$.

Remarque 4. $PSO(E)$ n'est pas simple en dimension 4, tout comme $PSO(E)$ avec E de dimension 2. Pour $SO(E)$, il est homéomorphe à $S^3 \rtimes SO(F)$ avec F un espace vectoriel de dimension 3.

Remarque 5. On obtient qu'en dimension paire $SO(E)$ est simple.

Théorème 11. Tout automorphisme de $SO(E)$ est intérieur.

4 Décompositions remarquables et applications

4.1 Décomposition en valeurs singulières

4.2 Décomposition d'Iwasawa

4.3 Décomposition QR

4.4 Décomposition polaire

References

[1] Gourdon

[2] Objectif agrégation

[3] Perrin

[4] FGN3