

135: isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications en dimension 2 et 3

Pierre Lissy

April 25, 2010

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. Soit E un ev. Une application est une isométrie ssi elle conserve les distances. Il revient au même de dire grâce aux formules de polarisation qu'elle conserve le produit scalaire.

Proposition 1. Une telle application est linéaire bijective, de déterminant 1 et vérifie $u^* = u^{-1}$.

Définition-proposition 1. On considère une application de l'espace affine. Elle conserve les distances ssi c'est une application affine dont la partie linéaire est une isométrie vectorielle. f est alors dite isométrie affine.

Définition 2. $O(E)$, et $O(\mathcal{E})$. Ce sont des sous-groupes du groupe linéaire pour la composition. idem isométries directes $O^+(E)$ et $O^+(\mathcal{E})$.

1.2 Décomposition commutative

Lemme 1. Toute isométrie est telle qu'un sev est stable ssi son orthogonal l'est.

Théorème 1. Toute isométrie vectorielle s'écrit comme produit d'au plus n réflexions vectorielles. Toute isométrie affine s'écrit comme produit d'au plus n réflexions affines.

Application 1. On reconnaît si on a affaire à un déplacement ou à un anti-déplacement en regardant le nombre de réflexions dans la décomposition.

Théorème 2 (décomposition commutative). Toute isométrie affine u de $\mathcal{E}$ se décompose de manière unique en le produit d'une translation de vecteur v et d'une isométrie ψ ayant un ev de points fixes $\mathcal{F}$ non vide et tel que $v \in \mathcal{F}$, $u = t_v \psi$. De plus, la translation et l'isométrie commutent.

1.3 Réduction des isométries

Proposition 2. un endomorphisme est orthogonal ssi sa matrice dans une BON vérifie $A^t A = Id$.

Corollaire 1. Les groupes $O(E)$, $SO(E)$ sont compacts.

Remarque 1. Ce n'est évidemment plus le cas dans un espace affine puisqu'on peut avoir des translations de vecteur aussi grand que l'on veut. Par contre le caractère fermé doit être conservé?

Lemme 2. Tout endomorphisme réel a soit une droite soit un plan stable.

Théorème 3. Toute isométrie a dans une certaine base une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont soit de taille 1 avec 1 ou (-1), soit de taille 2 et de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Corollaire 2. $O_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes cpa homéomorphes.

Corollaire 3. $O(\varepsilon)$ connexe par arcs aussi.

Application 2. En utilisant la décomposition polaire qui est un homéomorphisme, on a les composantes cpa de $Gl_n(\mathbb{R})$.

Application 3. l'exponentielle est un homéomorphisme entre les matrices antisymétriques et les matrices orthogonales.

2 Dimension 2

Dans ce paragraphe, E désigne un plan euclidien orienté muni du ps $(\cdot, \cdot)$. On ramène l'étude de $O(2, R)$ à celle de $O(E)$.

2.1 $O(E)$ en dimension 2

Proposition 3. Tout élément de $O(E)$ est soit de déterminant 1 et c'est une rotation, sa matrice dans n'importe quelle BON est alors de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où θ indépendant de la base choisie est appelée angle de la rotation, soit de déterminant -1 et c'est une réflexion (symétrie orthogonale), il existe une BOND telle que la matrice soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le premier vecteur donne la droite par rapport à laquelle se fait la rotation.

Proposition 4. Les rotations forment un sous-groupe de $O(E)$ noté $SO(E)$ commutatif, plus exactement la composée d'une rotation d'angle θ et d'angle θ' est une rotation d'angle $\theta + \theta'$. Les éléments d'ordre fini de $SO(E)$ sont les rotation d'angle $2k\pi/n$. Si τ est une réflexion et r une rotation, alors il existe une rotation τ' telle que $u = \tau\tau'$, et $\tau u\tau^{-1} = u^{-1}$.

Proposition 5. On note $O^-(E)$ les réflexions. Toute réflexion est d'ordre 2. Si l'on conjugue une réflexion par une rotation on retombe sur elle-même.

Proposition 6. Si l'on considère une rotation, alors son angle θ est tel que

1. $\cos(\theta) = \text{tr}(u)/2$
2. Si x est n'importe quel vecteur unitaire non nul, alors $\sin(\theta) = [x, u(x)]$

Théorème 4. Les isométries d'un plan affine sont

1. Soit Id si elle a trois points fixes non alignés $z \mapsto z$
2. Soit Une réflexion d'axe AB si elle a deux points fixes A et B $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a\bar{b} + b = 0$.
3. une rotation de centre A si elle a un unique point fixe $z \mapsto az + b$ avec $|a| = 1$
4. Dans les cas où elle n'a pas de point fixe, c'est soit une translation, soit une réflexion glissée; Dans ce dernier cas, il existe une unique translation et une unique réflexion telles que les deux commutent et leur composée soit ce qui nous intéresse. $z \mapsto az + b$ avec $a\bar{b} + b \neq 0$

2.2 Sous-groupes finis

Définition 3. Un polygone convexe est une intersection d'un nombre fini de demi-plans. Un polygone régulier à n côtés est un polygone convexe tel qu'il existe un point O et un entier n pour lesquels P est invariant par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$.

Définition-proposition 2. On considère un polygone régulier à n côtés centré en O . Les isométries qui conservent ce polygone forment un groupe, appelé groupe diédral, noté D_n . Il contient n rotations (d'angle $2k\pi/n$) qui forment un sous-groupe abélien distingué de D_n et n réflexions.

Remarque 2. Si l'on considère un polygone plus gros mais ayant le même nombre de côtés, on évidemment on obtient le même groupe diédral que le précédent!

Théorème 5. Soit G un sous-groupe fini de $O(E)$.

1. Soit $G \subset SO(E)$. Alors G est formée de rotation d'angle $2k\pi/n$. G est alors un groupe cyclique d'ordre n , et est donc isomorphe à Z/nZ .

2. Soit $G \not\subset \text{So}(E)$. Alors G est de cardinal pair et est un certain groupe diédral (ou $Z/2Z$ si il contient juste une symétrie et Id).

Corollaire 4. Comme une isométrie d'un espace stabilisant un polygône affine stabilise aussi l'isobarycentre des sommets de ce polygône, on a le même résultat pour le sous-groupe fini des groupes des isométries affines d'un plan affine

Lemme 3. Tout sous-groupe fini de $GL(E)$ est conjugué à un sous-groupe fini de $O(E)$ (pour n'importe quel espace euclidien E de dimension finie)

Application 4. Tout sous-groupe fini de $GL(E)$ est soit conjugué à un groupe de rotations (et dans ce cas il est cyclique), soit conjugué à un groupe diédral. On doit pouvoir disjoncetr ces cas selon qu'il contient des matrices de déterminant négatif ou non.

2.3 Applications de groupes diédraux aux problèmes de colliers

Lemme 4 (Burnside). Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X . Soit k le nombre d'orbites, et posons $\text{fix}(g) := \{x \in X | g.x = x\}$. Alors $k = 1/|G| \sum |\text{fix}(g)|$.

Application 5. 1. Avec 4 perles bleues, 3 perles blanches et 2 perles orange on peut fabriquer 76 colliers "différents" (ie différents pour le fabricant du collier, tels qu'on peut passer d'un collier à un autre par n'importe quel composé d'une rotation et d'une réflexion).

2. Avec 4 perles bleues, 6 perles blanches et 4 perles oranges on peut fabriquer 7620 colliers "différents"

Application 6. Le nombre de colorations d'un collier à n perles avec m couleurs est $1/n \sum_{d|n} \varphi(d) m^{n/d}$ (seules les rotations du collier sont considérées ici)

3 Dimension 3

On considère dorénavant un espace euclidien de dimension 3 orienté. On ramène l'étude de $SO(3, R)$ à celle de $SO(3)$.

3.1 Rappels sur $SO(E)$

Proposition 7. Tout élément u est une rotation par rapport à un axe.

Proposition 8. Tout élément de $SO(E)$ est produit de deux réflexions. Les retournements engendrent $SO(E)$.

Proposition 9. $SO(E)$ est simple. $Z(SO(E)) = \text{Id}$, $D(SO(E)) = SO(E)$. Tout automorphisme de $SO(E)$ est intérieur

Proposition 10. Pour tout axe D , on choisit un vecteur unitaire x . On appellera BOND relativement à D toute base de la forme $B = (x, \hat{B})$ où $\hat{B}$ est une base de l'orthogonal de D telle que B soit une BOND. Si l'on considère maintenant une rotation d'axe D , sa matrice dans n'importe quelle BOND relativement à D s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où θ indépendant de la base choisie est appelée angle de la rotation.

Proposition 11. L'angle de la rotation est tel que

1. $\cos(\theta) = (1 + \text{tr}(u))/2$.
2. si u est le vecteur directeur de D , et v un vecteur orthogonal unitaire, alors $\sin(\theta) = [x, v, u(v)]$.

Proposition 12. Tout élément de $O^-(E)$, appelé anti-déplacement, s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Théorème 6. Les isométries d'un espace affine de dimension 3 sont

1. Soit Id si elle a quatre points fixes non coplanaires
2. Soit Une réflexion de plan ABC si elle a trois points fixes ABC
3. une rotation de droite AB si elle a un deux points fixes
4. Un unique point fixe: soit c'est $-Id$, soit c'est la composée (commutative) d'une rotation d'axe D et d'une réflexion de plan P , les deux étant orthogonaux.
5. Dans les cas où elle n'a pas de point fixe, c'est soit une translation, soit un vissage (composée d'une rotation et d'une translation le long de l'axe de rotation). Dans ce dernier cas, il existe une unique translation et une unique rotation telles que les deux commutent et leur composée soit ce qui nous intéresse. Soit c'est une symétrie glissée (composée commutative d'une translation et d'une réflexion)

3.2 Solides platoniciens

Définition 4. Un polyèdre P est une intersection d'un nombre fini de demi-espaces. P est alors entièrement situé du même côté de chaque plan et est délimité par des surfaces polygonales qu'on appelle faces. Il est dit régulier ssi ses faces sont des polygones réguliers convexes.

Théorème 7. Il n'existe que 5 solides platoniciens

1. Tétraèdre. $S = 4, A = 6, F = 4, (p, q) = (3, 3)$. Autodual
2. Cube. $S = 8, A = 12, F = 6, (p, q) = (4, 3)$ Dual: octaèdre
3. octaèdre. $S = 6, A = 12, F = 8, (p, q) = (3, 4)$ Dual: cube
4. Dodécaèdre. $S = 20, A = 30, F = 12, (p, q) = (5, 3)$ Dual: icosaèdre
5. Icosaèdre. $S = 12, A = 30, F = 20, (p, q) = (3, 5)$ Dual: dodécaèdre

Définition 5. On considère un solide de Platon centré en 0. On appelle groupe des déplacements de P , noté $Is^+(P)$, le groupe des éléments de $SO(E)$ qui conservent le solide P .

Ils permettent de donner des représentations géométriques des petits groupes symétriques ou alternés.

Application 7. $Is^+(T) \simeq A_4, Is^+(C) = Is^+(O) \simeq S_4, Is^+(D) = Is^+(I) = A_5$.

On en déduit les groupes de toutes les isométries laissant invariants ces braves objets.

Application 8. $Is(T) \simeq S_4, Is(C) = Is(O) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Is(D) = Is(I) = A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3.3 Sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$

Lemme 5 (Formule des classes). Soit G un groupe agissant sur un ensemble X . Supposons G et X finis. Soit ω un ensemble de représentants des orbites de X . Alors $|X| = \sum_{x \in \omega} \frac{|G|}{|Stab(x)|}$.

Théorème 8. Les sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$ sont soit des groupes cycliques, soit isomorphes à un groupe diédral, soit isomorphes à un des trois groupes d'isométries des solides platoniciens.

Application 9. On a le même résultat pour les isométries affines d'un espace affine.

Application 10. On a du coup la même chose pour les sous-groupes finis de $GL(3, \mathbb{R})$

Remarque 3. Attention, contrairement au cas de la dimension 2 où on a décrit PRÉCISEMENT les sous-groupes, on a ici que des classes d'isomorphismes!

3.4 Applications aux problèmes de coloration

Application 11. *Il y a 57 manières de colorier le cube avec 3 couleurs (ou moins) . Il y a $1/24 * (|C|^6 + 6 * |C|^3 + 8 * |C|^2 + 6 * |C|^3 + 3 * |C|^4)$ manières de colorier le cube avec C couleurs (ou moins).*

Faire de même avec tétraèdre et icosaèdre en utilisant la formule $1/g \sum |C|^{\gamma(g)}$ où $\gamma(g)$ designe le nombre de cycles de g dans sa d'ecomposition en cycles a supports disjoints

References

[1]